

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

46. Band, Heft 6/10

1. April 1953

S. 241—480

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

● Šilov, G. E.: Einführung in die Theorie der linearen Räume. Redigiert von N. V. Efimov. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 384 S. R. 7.30. [Russisch].

Aus dem Vorwort des Redakteurs Efimov (gekürzt): Die früheren russischen Studienpläne in Mathematik hatten den Nachteil, daß zu viel Zeit an spezielle geometrische Probleme verschwendet wurde und daß analytische Geometrie und lineare Algebra getrennt waren. Die neue Einteilung sieht daher für analytische Geometrie nur noch im ersten Semester eine zweistündige Vorlesung vor, die der anschaulichen Darlegung einiger Grundbegriffe dient. In den zwei nächsten Semestern werden endlichdimensionale lineare Räume behandelt (lineare Räume, lineare Algebra, quadratische Formen, Differentialgeometrie). Auf diese Weise werden die allgemeinen Ideen in Geometrie und Algebra herausgestellt, die für eine Weiterbildung vor allem in mathematischer Physik nötig sind. Als Lehrbuch soll zuerst die „Analytische Geometrie“ von Modenov (erscheint demnächst) dienen, dann für das zweite und dritte Semester (mit Ausschluß der Differentialgeometrie) das vorliegende Buch, dessen letzte Kapitel (12—14, s. u.) einen Ausblick auf unendlichdimensionale Räume geben und für Seminare vorgesehen sind. Besondere Vorzüge des Buches sind: Anschaulicher Aufbau der Determinantentheorie; geglückte Vereinigung der Theorie der linearen Räume mit der der Matrizen; ausgiebige Verwendung von Bilinearformen, quadratischen Formen und Orthogonalisierung; einige neue Beweise bei Eigenwertproblemen; Reichtum an Beispielen und Anwendungen. — Inhalt: 1. Determinanten. Eigenschaften und Berechnung. Lineare Abhängigkeit von Spalten einer Matrix. 2. Lineare Räume. Definition. Lineare Abhängigkeit. Basen. Unterräume. Isomorphie. 3. Systeme linearer Gleichungen. Rang einer Matrix. Lösbarkeitsbedingungen. Lösung. 4. Lineare Vektorfunktionen. Darstellung. Algebra der linearen Operationen. 5. Koordinatentransformationen. Darstellung in Koordinaten. Auswirkung auf lineare Operationen. Tensoren. 6. Bilineare und quadratische Formen. Kanonische Gestalt. Trägheitsgesetz. 7. Euklidische Räume. Skalares Produkt. Metrik. Orthogonalbasen. Isomorphiesatz. Norm einer Operation. Adjungierte Operation. 8. Orthogonalisierung und Rauminhalt. Das Schmidtsche Verfahren. Legendrepolynome. Gramsche Determinante. Inhalt des Parallelepipeds. Hadamardsche Ungleichung. Matrix einer symmetrischen positiv definiten Bilinearform. 9. Eigenvektoren und Eigenwerte. Charakteristisches Polynom. Symmetrische Operationen. 10. Quadratische Formen im Euklidischen Raum. Kanonische Gestalt. Extremaleigenschaften. Paare quadratischer Formen. Normalschnitte. Störungsprobleme. 11. Flächen zweiter Ordnung. Klassifizierung. 12. Normierte und metrische Räume. Konvergenz. Vollständigkeit. Kompaktheit. Lineare Operationen. 13. Unendlichdimensionaler Euklidischer Raum (Hilbertraum). Problem der besten Näherung. Orthogonalentwicklung. Konvergenzfragen. Orthogonale Ergänzung. Lineare Funktionale. 14. Lineare Integralgleichungen. Vollstetige Operationen. Fredholmsche Integralgleichung. Unbeschränkte Operationen und Berechnung von Eigenwerten (Spezialfälle). K. Zeller.

● Perlis, Sam: Theory of matrices. (Addison-Wesley Mathematics Series.) Cambridge: Addison-Wesley Press 1952. IX, 237 p. \$ 5.50.

Das Buch enthält die Theorie der Matrizen und ihre Anwendungen auf die Formen, sowie auf die linearen Transformationen. Das Hauptgewicht liegt in der systematischen Betrachtung der verschiedenen Äquivalenzbegriffe zweier Matrizen A, B : I. $B = PAQ$ über einem Körper K (bilineare Formen); II. $B = PAQ$ über einem Polynombereich $K[x]$ (Elementarteilertheorie); III. $B = P^{-1}AP$ über einem Körper K (Ähnlichkeit der linearen Transformation); IV. $B = P'AP$ über K mit der Charakteristik $\neq 2$ und über dem reellen Körper (quadratische Formen); V. $B = \bar{P}'AP$ über dem komplexen Zahlkörper (Hermitesche Formen); VI. $B = P^{-1}AP$, $P^{-1} = P'$ über dem reellen Körper (Ähnlichkeit durch eine orthogonale Transformation); VII. $B = P^{-1}AP$, $P^{-1} = \bar{P}'$ über dem komplexen Zahlkörper (Ähnlichkeit durch eine unitäre Transformation). Alle auftretenden Grundbegriffe werden

durch einfache Beispiele eingeführt, so daß sie nicht nur für die Studenten der Mathematik sondern auch für die Studenten der Grenzgebiete verständlich werden. *Shoda.*

Room, T. G.: A synthesis of the Clifford matrices and its generalization. Amer. J. Math. **74**, 967—984 (1952).

Clifford-Matrizen werden quadratische Matrizen A_i mit 2^r Reihen genannt, die sich zu Systemen von $2r + 1$ Exemplaren ordnen und die die Beziehungen $A_i^2 = I$, $A_i A_j = -A_j A_i$ ($i \neq j$) erfüllen. Es werden besonders einfache Systeme von Clifford-Matrizen angegeben und zahlreiche Sätze hierüber bewiesen. Hierbei wird von einer geschickt gewählten Bezeichnung der Elemente von A_i Gebrauch gemacht, wobei r obere und r untere Indizes 0 und 1 in Erscheinung treten. Das Problem: Ermittlung aller Clifford-Matrices bei gegebenem r , löst Verf. nicht. Im zweiten Teil der Arbeit bespricht Verf. ausführlich die Abbildung der Matrizen für $r = 4$ auf einen projektiven Raum [15] von 15 Dimensionen, wobei im besonderen die Bildpunkte AP und deren Mannigfaltigkeiten untersucht werden, wenn A der durch die neun A_i bestimmten linearen Schaar von Clifford-Matrizen angehört. Hier ergibt sich eine quadratische \mathfrak{M}_{14}^2 und auf ihr verschiedene erzeugende Räume und Tangential-Mannigfaltigkeiten. Zwischen vier (im allgemeinen Falle r) von diesen läßt sich ein Korrespondenzprinzip („mutuality“) aufstellen, das eine Verallgemeinerung der Dualität und der Trilateralität von E. Study darstellt. *R. W. Weitzenböck.*

Osborne, Elmer E.: On matrices having the same characteristic equation. Pacific J. Math. **2**, 227—230 (1952).

Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei (n, n) -Matrizen A, B mit Elementen aus einem Körper \mathfrak{F} dieselbe charakteristische Gleichung haben, ist die folgende Bedingung: Es gibt eine nichtsinguläre Matrix P mit Elementen aus \mathfrak{F} derart, daß für $N = A - P^{-1}BP$ jedes Polynom $g(A, N)$ nilpotent ausfällt, in welchem alle Koeffizienten zu \mathfrak{F} gehören und jedes Glied mindestens einen Faktor N enthält. [Bem. d. Ref.: Verf. beweist diesen Satz mit der Voraussetzung, daß \mathfrak{F} vollkommen und unendlich ist; doch gilt der Satz auch ohne sie.] *H. Wielandt.*

Azbelev, N. und R. Vinograd: Ein Verfahren der sukzessiven Approximationen zum Aufsuchen von Eigenwerten und Eigenfunktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **83**, 173—174 (1952) [Russisch].

Verf. behandeln ein Iterationsverfahren zur Ermittlung von Eigenlösungen eines linearen Operators A im n -dimensionalen Raum. Man geht von einem Vektor $x_0 \neq 0$ aus und setzt $x_{k+1} = x_k - \eta_k y_k$, wo das rechte Glied definiert ist durch: $\lambda_k = (A x_k, x_k) / \|x_k\|^2$, $B_k = A - \lambda_k E$, $y_k = B_k^* B_k x_k$, $\eta_k = (y_k, x_k) / \|y_k\|^2$. Je nach Wahl von x_0 gilt $x_k \rightarrow 0$, oder alle Häufungspunkte von $\{x_k\}$ haben dieselbe Norm und sind Eigenvektoren zu ein und demselben Eigenwert. Für einen Eigenwert λ' von A , dem in der Jordanform der zugehörigen Matrix nur Diagonalkästchen entsprechen, erhält man Aussagen über das Gebiet der x_0 , für die x_k gegen einen Eigenvektor $x' \neq 0$ zu λ' konvergiert (dies trifft für alle x_0 zu, die mit dem zu λ' gehörigen invarianten Unterraum einen genügend kleinen Winkel bilden), und über die Güte dieser Konvergenz ($\|x_k - x'\| \leq C q^k$). *K. Zeller.*

Menger, Karl: Une théorie axiomatique générale des déterminants. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1941—1943 (1952).

Da bei einer Determinante jede Aussage über die Zeilen auch für die Spalten gilt (und umgekehrt), beschränkt man sich bei der Charakterisierung einer Determinante als Funktion ihrer Elemente auf Postulate für entweder nur die Zeilen (Weierstrass, Carathéodory, Schreier) oder nur die Spalten (Artin). Verf. fragt nach einer Charakterisierung, bei der weder die Zeilen noch die Spalten bevorzugt werden, und gibt hierfür vier Postulate (der Beweis wird in der Thèse von Frank Kozin veröffentlicht werden). Danach ist eine Determinante gekennzeichnet durch die Eigenschaften: I. Sie ist semi-additiv von unten bezüglich jeder Zeile und semi-additiv von oben bezüglich jeder Spalte. II. Sie ist semi-

homogen von unten bezüglich jeder Zeile (oder Spalte) und semi-homogen von oben bezüglich jeder Spalte (oder Zeile). III. Sie hat einen nichtnegativen Wert, falls zwei Zeilen übereinstimmen, und einen nichtpositiven Wert, falls zwei Spalten gleich sind. IV. Sie hat den Wert 1 für die Einheitsmatrix. — Dabei heißt eine Funktion von n Vektoren v_i semi-additiv bzw. semi-homogen von unten, wenn

$$f(v_1, \dots, v'_i + v''_i, \dots, v_n) \leq f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v''_i, \dots, v_n)$$

bzw. $f(v_1, \dots, c v_i, \dots, v_n) \leq c f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$ für jedes $c \geq 0$.

Die entsprechenden Eigenschaften von oben werden durch das Zeichen \geq definiert. Das Schwergewicht der Forderungen liegt bei Eigenschaft I; sie ist auf reelle Funktionen einer quadratischen Matrix übertragbar. Auch die Rolle der Eigenschaften II und III wird diskutiert.

H. Rohrbach.

Wong, Y. K.: Some inequalities of determinants of Minkowski type. Duke math. J. 19, 231—241 (1952).

Es sei $A = (a_{\kappa\lambda})$ eine (n, n) -Matrix mit $a_{\kappa\lambda} \geq 0$. Wenn dann A „nicht zu groß“ ist, besteht zwischen $D_n = \det(E - A)$ und der $(n-1)$ -ten Abschnittsdeterminante $D_{n-1} = \det(E - B)$ für jedes $m = 0, 1, 2, \dots$ die Ungleichung

$$(U) \quad [1 - p_m - \varepsilon_m] D_{n-1} \leq D_n \leq [1 - p_m] D_{n-1}, \quad A = \begin{pmatrix} B & c \\ \delta & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $p_m = a_{nn} + \sum_{\mu=0}^m \delta B^\mu c$, $\varepsilon_m = \tilde{s} B^{m+1} c$, $\tilde{s} = (s_1, \dots, s_{n-1})$, $s_\lambda = \sum_{\kappa=1}^n a_{\kappa\lambda}$.

Der Beweis beruht auf der Gleichung

$$(G) \quad D_n = \left[1 - a_{nn} - \sum_{\mu=0}^{\infty} \delta B^\mu c \right] D_{n-1}.$$

Verf. beweist (G) und die rechte Hälfte von (U) unter der Voraussetzung (1), daß der maximale Eigenwert von $A'A$ kleiner als 1 ist, und die linke Hälfte von (U) unter der Voraussetzung (2): $s_\lambda \leq 1$ ($\lambda = 1, \dots, n$). (U) wird vom Verf. noch verfeinert. [Bem. d. Ref.: Die langwierigen Beweise lassen sich durch Benutzung der Frobeniusschen Theorie des maximalen Eigenwerts r von A auf wenige Zeilen verkürzen; statt (1) genügt die schwächere, auch in (2) enthaltene Voraussetzung $r \leq 1$.]

H. Wielandt.

Rodeja F., E. G.: Note on determinants of sines and cosines. Proc. Amer. math. Soc. 3, 198—205 (1952).

Set $C(k_1, k_2, \dots, k_n) = |\cos k_i \theta_j|_{i,j=1,2,\dots,n}$, $S(k_1, k_2, \dots, k_n) = |\sin k_i \theta_j|$. It is proved that

$$|C(k_1, k_2, \dots, k_n)/C(0, 1, \dots, n-1)| \leq \prod_{h>j} (k_h^2 - k_j^2)/(n-1)! 1! 3! \dots (2n-3)!),$$

$$|S(k_1, k_2, \dots, k_n)/S(1, 2, \dots, n)| \leq \prod_{h>j} k_j (k_h^2 - k_j^2)/(1! 3! \dots (2n-1)!)$$

when θ_j are real numbers and k_i are rational integers satisfying $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$ resp. $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$. Equality holds in either case in the limit when all θ_j tend to 0. The result generalizes Theorems 1, 2 of Goodman (this Zbl. 31, 353). J. Nakayama.

Springer, Tonny Albert: Sur les formes quadratiques d'indice zéro. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1517—1519 (1952).

Wenn eine quadratische Form $Q = \sum a_{ik} x_i x_k$ mit Koeffizienten aus einem Körper K darin die Null nicht darstellt (außer in trivialer Weise,) so stellt auch Q in einem Erweiterungskörper ungeraden Grades die Null nicht dar. (Die vom Verf. gemachte Einschränkung Char. $K \neq 2$ ist unnötig.) Es genügt, diesen vom Ref. (dies. Zbl. 15, 57) vermuteten Satz für primitive Erweiterungen $K(\theta)$ von ungeradem Grade ν durch Induktion nach ν zu beweisen. Gleichbedeutend ist die Widerlegung folgender Annahme: Das irreduzible Polynom $f(t)$ mit der Wurzel θ teile $Q(t) = \sum a_{ik} \varphi_i(t) \varphi_k(t)$, ohne daß $f(t)$ alle Polynome $\varphi_i(t)$ teilt. Hierbei können die $\varphi_i(t)$ noch mod $f(t)$ reduziert und ohne gemeinsamen Teiler gedacht werden,

ihr Maximalgrad sei $\mu < \nu$. Da Q die Null nicht darstellt, hat $Q(t)$ genau den Grad 2μ . Das Polynom $Q(t)/f(t)$ wäre nun von ungeradem Grad $2\mu - \nu < \nu$, enthielte also auch einen irreduziblen Polynomteiler $g(t)$ von ungeradem Grad $< \nu$, und nach Induktionsannahme wäre $g(t)$ doch ein gemeinsamer Teiler aller $\varphi_i(t)$, Widerspruch. — Genau denselben Beweis hat Artin bereits 1937 dem Ref. freundlicherweise mitgeteilt.

E. Witt.

Debreu, Gerard: Definite and semidefinite quadratic forms. *Econometrica* 20, 295—300 (1952).

A, B seien Matrizen mit reellen Koeffizienten der Formate $n \times n, n \times m$ mit $m < n$; A sei symmetrisch. A_r bedeute die Teilmatrix von A , die durch Streichung der $n - r$ letzten Zeilen und Spalten entsteht, und B_r die Teilmatrix von B , die durch Streichung der $n - r$ letzten Zeilen entsteht. O_m bedeute die m -reihige Nullmatrix. Verf. beweist den folgenden auf H. Hotelling (dies. Zbl. 10, 407) im Falle $m = 1$ und H. B. Mann [Amer. math. Monthly 50, 430—433 (1943)] für allgemeines m zurückgehenden Satz: Es gelte $|B_m| \neq 0$. Dann und nur dann ist $\xi' A \xi > 0$ für alle einspaltigen die Gleichungen $\xi' B = 0$ erfüllenden Matrizen ξ mit reellen Koeffizienten, wenn die Determinanten $(-1)^m \begin{vmatrix} A_r & B_r \\ B_r' & O_m \end{vmatrix} > 0$ sind für $r = m + 1, \dots, n$. (Der Akzent bedeutet die spiegelbildliche Matrix). Eine ähnliche Bedingung besteht für $\xi' A \xi \geq 0$.

M. Eichler.

Young, Alfred: On quantitative substitutional analysis. IX. *Proc. London math. Soc.*, II. Ser. 54, 219—253 (1952).

Diese 9. Mitteilung fand sich unter den nachgelassenen Manuskripten und wurde, mit einer Einleitung versehen, herausgegeben von B. Robinson. Ihr Inhalt benützt die Resultate früherer Mitteilungen, insbes. Nr. 7 und 8 (dies. Zbl. 8, 49; 9, 301). Es werden verschiedene Sätze über Reduzierbarkeit auf Normalformen, sowie Reduzierbarkeit im allgemeinen bewiesen, wobei als Beispiel die Komitanten der binären f_5 behandelt werden. Bemerkt sei, daß der Inhalt der ersten 8 Mitteilungen eine sehr übersichtliche Bearbeitung gefunden hat bei D. E. Rutherford (dies. Zbl. 38, 16).

R. W. Weitzenböck.

Foulkes, H. O.: Monomial symmetric functions, S-functions and group characters. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. 2, 45—59 (1952).

D. E. Littlewood (Theory of group characters and matrix representations of groups, 2nd ed., Oxford 1950, s. 89—90, dies. Zbl. 38, 165) hat eine Methode angegeben, um eine ganze symmetrische Funktion von x_1, x_2, \dots, x_n als eine Summe von Schur-Funktionen (sogenannten S-Funktionen) auszudrücken; im Vergleich mit früheren Methoden (Schur, Hankel, Kostka) bietet die Littlewoodsche Methode viele Vorteile. Nach einigen einleitenden Bemerkungen über die Tafeln, die Kostka im Jahre 1882 für die Berechnung von symmetrischen Funktionen angegeben hat, und über ihre Bedeutung und Wichtigkeit beim heutigen Stand der Theorie der Gruppencharaktere, wendet sich Verf. zur Vertiefung und zur ausführlichen Anwendung der obengenannten Littlewoodschen Methode. Er betrachtet zunächst die S-Funktionen des Ranges 1, die in der gesuchten Entwicklung einer ganzen symmetrischen Funktion auftreten können, und bestimmt die Werte ihrer Koeffizienten, Vorzeichen einbegriffen. Dann erweitert er das Verfahren auf die S-Funktionen des Ranges 2, 3, usw. Als Anwendung werden die einfachsten Produkte von Potenzsummen s_a der x_i ($s_a s_b, s_a^2, s_a s_b s_c, s_a^2 s_b, s_a^N$) betrachtet; diese gestatten auch allgemeine Ausdrücke für einige Charakteristiken der symmetrischen Gruppe der Ordnung $n!$ zu bestimmen.

E. Togliatti.

Sarf, Herbert: Group invariant integration and the fundamental theorem of algebra. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 38, 439—440 (1952).

Ein einfacher Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, gestützt auf den Satz, daß eine Gruppe linearer Transformationen mit reellen und beschränkten Koeffizienten eine definite quadratische Form invariant läßt.

M. Eichler.

Mohr, Ernst: Nachtrag zu meiner Arbeit: Beweis des sogenannten Fundamentalsatzes der Algebra im reellen Gebiete. *J. reine angew. Math.* 189, 250—252 (1952).

Der vom Verf. früher (dies. Zbl. 27, 7) gegebene Beweis für den Fundamentalsatz im Reellen enthält eine Lücke, die jetzt ausgefüllt wird. *O. Perron.*

Mahajani, G. S., V. R. Thiruvankatachar and V. D. Thawani: An application of Tschebyscheff polynomials to a problem in symmetric functions. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 35, 211—223 (1952).

Bei der (von den Verff. zu Anfang etwas mißverständlich formulierten) Aufgabe handelt es sich um drei Zahlenfolgen α_i, x'_i, x''_i , die durch die Ungleichungen $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n, 0 = x'_1 \leq x'_2 = \alpha_2 = x'_3 \leq x'_4 = \alpha_4 = x'_5 \leq \dots \leq \alpha_n, 0 < x''_1 = \alpha_1 = x''_2 \leq x''_3 = \alpha_3 = x''_4 \leq \dots \leq \alpha_n$, verbunden sind. Die x'_i und x''_i werden als Nullstellen von Polynomen der Grade n angesehen, und es wird die zusätzliche Forderung gestellt, daß die ersten $n-1$ elementarsymmetrischen Funktionen der x' bzw. x'' , d. h. die entsprechenden Koeffizienten der Polynome übereinstimmen. Gesucht sind die möglichen Werte der α_i . Die Verff. zeigen durch elementare Rechnungen, daß die α_i bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmt, nämlich die Nullstellen der Tschebyscheffschen Polynome sind.

W. Hahn.

Parodi, Maurice: Sur une méthode de détermination du domaine des zéros de certains polynomes récurrents. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 1123—1124 (1952).

Let $P_n(x)$ be a polynomial defined by the recurrence formula $a_{n+1}P_n(x) + (b_n - x)P_{n-1}(x) + c_nP_{n-2}(x) = 0$ and $P_0 = 1, P_{-1} = 0$. If $P_n(\lambda) = 0$, putting $x = \lambda$ in the recurrence equation and eliminating $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{n-1}(\lambda)$, we have the determinant of the matrix $M - \lambda I$, where $M = (\alpha_{ij}), \alpha_{ii} = b_i, \alpha_{i, i+1} = a_i, \alpha_{i+1, i} = c_i, \alpha_{ij} = 0$ elsewhere. We have a matrix H such that $HMH^{-1} = (B_{ij}) = M_1$, where $B_{ii} = b_i, B_{i, i+1} = B_{i+1, i} = \sqrt{a_i c_i}$. Therefore the roots of $P_n(x)$ are all real. Since M_1 is a sum of a diagonal matrix with elements b_i and a matrix M_2 . By a result of Lidskij (this Zbl. 39, 10) the roots of $P_n(x)$ lie between the extremities of $b_k + \lambda_{k'}$ ($k, k' = 1, 2, \dots, n$), where the λ 's are the characteristic roots of M_2 . Note that the result has applications to the theory of orthogonal polynomials (cf., e. g. Shohat, this Zbl. 9, 246).

L.-K. Hua.

Tietze, Heinrich: Über eine Klasse von Polynomen, die diejenigen mit lauter positiven Nullstellen umfaßt. *Math. Nachr.* 8, 7—12 (1952).

Das Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a_k x^{n-k}$ (mit $a_0 = 1$) wird vom Verf. medial-monoton genannt, wenn $a_k > 0$ und $a_k^{1/k} \geq a_{k+1}^{1/(k+1)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) sind. Polynome mit lauter positiven Nullstellen sind medial-monoton. Es gibt medial-monotone Polynome, die auch nichtreelle Nullstellen besitzen. Das Produkt eines medial-monotonen Polynoms mit einem Polynom $x - c$ ($c > 0$) ist auch medial-monoton. Die Frage, ob jedes Produkt von medial-monotonen Polynomen medial-monoton sei, bleibt offen.

G. Sz.-Nagy.

Frank, Evelyn: On certain determinantal equations. *Amer. math. Monthly* 59, 300—309 (1952).

Es werden die Nullstellen gewisser Polynome n -ten Grades von Determinantenform untersucht. Sind

$$P(z) = \begin{vmatrix} z & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_1 & z & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & z & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{n-1} & z \end{vmatrix}, \quad B(z) = \begin{vmatrix} z + b_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & z + b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & z + b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z + b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & z + b_n \end{vmatrix}$$

und $a_j > 0$, $c_j > 0$, $b_j = \bar{b}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), so hat das Polynom $P(z)$ mindestens $n - 1$ rein imaginäre Nullstellen. Das Polynom $B(z)$ hat lauter reelle und verschiedene Nullstellen. — Die Arbeit enthält auch andere Resultate über die Nullstellen von Polynomen, die durch Determinanten dargestellt werden. *G. Sz.-Nagy.*

Raljević, Š.: Répartition et construction des zéros d'un polynome du troisième ordre et de sa dérivée. Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova, mat. Inst. 18, Nr. 2, 167—172 und französ. Zusammenfassg. 172 (1952) [Serbisch].

L'A. déduit de l'interprétation géométrique du procédé de résolution de l'équation en question la répartition et la construction de ses zéros. *Autoreferat.*

Silva, Joseph A.: Representation of arithmetic functions in $GF[p^n, x]$ with values in an arbitrary field. Duke math. J. 19, 31—44 (1952).

Let $GF[p^n, x]$ denote the set of all polynomials in an indeterminate x with coefficients from a finite field $GF(p^n)$. A single-valued function f defined over $GF[p^n, x]$ with values $f(A)$ in a field F is called an arithmetic function. The sum of two functions $h = f + g$ is defined by $h(A) = f(A) + g(A)$. Instead of the ordinary product the author makes use of the „Cauchy product“ defined as follows: for a fixed positive integer r the product of two functions f and g is defined by $h(M) = f \cdot g = \sum f(A)g(B)$ where the sum extends over all polynomials A and B (including 0) of degree $< r$ such that $A + B = M$. If $f(A) = g(A)$ for all A of degree $< r$, then the arithmetic functions f and g are regarded as equal. The set of arithmetic functions with addition, multiplication and equality defined so is a commutative ring T_r with unit element. L. Carlitz has shown (this Zbl. 32, 3) that if F is of characteristic zero and contains the p -th roots of unity, then there exists a set of p^{nr} orthogonal (hence linearly independent) functions such that an arbitrary function in T_r may be represented uniquely as a linear combination of these functions with coefficients from F . Moreover, the ring T_r is a direct sum of p^{nr} fields F . — In the present paper these results are extended to the case of a field F containing no p -th roots of unity or of prime characteristic. In all cases it is shown that there exist just p^{nr} linearly independent functions. In the case of characteristic zero these functions may be distributed into $e(p^{nr} - 1)/(p - 1) + 1$ sets in such a way that two functions are orthogonal if and only if they belong to different sets; here e denotes the degree of the intersection of F and the p -th cyclotomic field over the rational number field. — The results for characteristic $q \neq p$ are essentially similar to those for characteristic zero. *T. Szele.*

Gruppentheorie:

Vagner, V. V.: Verallgemeinerte Gruppen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 2 (48), 146 (1952) [Russisch].

Skolem, Th.: Some remarks on semi-groups. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 24, Nr. 9, 42—47 (1952).

L'A., après avoir remarqué qu'un semi-groupe S (demi-groupe simplifiable à gauche et à droite) possède un élément unité dès qu'il possède un élément unité à gauche ou à droite, affirme qu'un semi-groupe est toujours immersible dans un groupe, résultat reconnu inexact par Malcev (ce Zbl. 15, 388). L'erreur provient du fait que les éléments du groupe G construit à partir de S ne sont pas clairement distingués des mots qui les représentent et que 2 éléments de S peuvent constituer 2 mots représentant le même élément de G . — L'A. remarque ensuite qu'un demi-groupe dans lequel les quotients à droite existent et sont uniques est un groupe s'il possède un élément unité. Il en déduit qu'un demi-groupe dans lequel les quotients à droite existent et sont uniques est produit direct d'un groupe et d'un système tel que $ab = b$ pour tout couple a, b . — Ceci livre la structure des demi-groupes finis simplifiables d'un côté [déjà étudiés par Suschkewitsch, Math. Ann. 99, 30—50 (1928)]. L'A. conclut en indiquant que la structure est plus compliquée dans le cas infini mais qu'il espère revenir sur la question. *R. Croisot.*

Skolem, Th.: Theorems of divisibility in some semi-groups. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 24, Nr. 10, 48—53 (1952).

L'A. démontre le théorème fondamental sur la divisibilité (décomposition unique en facteurs premiers) dans un semi-groupe abélien ayant un élément unité, dans lequel deux éléments quelconques possèdent un plus grand commun diviseur et où il n'existe pas de chaîne de diviseurs véritables successifs infinie. — Il annonce l'étude de la divisibilité dans les semi-groupes abéliens ayant un élément unité et possédant la propriété suivante: il existe un entier positif h tel que, si a et b sont deux éléments quelconques, a^h et b^h ont un plus grand commun diviseur „permanent“ d , c'est-à-dire tel que $(a^h)^r$ et $(b^h)^r$ aient pour plus grand commun diviseur d^r quel que soit l'entier positif r .

R. Croisot.

Thurston, H. A.: Certain congruences on quasigroups. Proc. Amer. math. Soc. 3, 10—12 (1952).

L'A. considère un quasi-groupe Q et l'ensemble des congruences simplifiables définie dans Q . Il considère le groupe G engendré par les translations à droite et les translations à gauche de Q . A chaque congruence simplifiable q définie dans Q , il fait correspondre la congruence q^\dagger définie dans G par

$$\Theta \equiv \Phi(q^\dagger) \Leftrightarrow \Theta^{-1}\Phi \subseteq q.$$

A chaque congruence p définie dans G , il fait correspondre la congruence simplifiable p^\dagger définie dans Q par

$$x \equiv y(p^\dagger) \Leftrightarrow \exists \Theta \equiv \Phi(p) \text{ avec } x\Theta^{-1}\Phi y.$$

L'application \dagger est alors une application biunivoque de l'ensemble des congruences simplifiables définies dans Q dans l'ensemble des congruences définies dans G . L'application \dagger est l'application réciproque. L'A. en déduit en particulier une nouvelle démonstration du fait que deux congruences simplifiables définies dans Q sont permutables.

R. Croisot.

Haimo, Franklin: Groups with a certain condition on conjugates. Canadian J. Math. 4, 369—372 (1952).

Wenn jedes Element x einer Gruppe der Bedingung $x^\alpha = 1$ genügt und α die kleinste positive Zahl dieser Art ist, so wird die Gruppe hier: u. t. (= uniform torsion) mit Exponent α genannt. Für Gruppen G , in denen G/Z^1 u. t. mit Exponent α ist ($Z^1 \subset Z^2 \subset \dots$ ist die aufsteigende Zentralreihe), wird gezeigt: 1. $(G, N)/(G, (G, N))$ ist u. t. mit einem Teiler von α als Exponenten, wenn N ein beliebiger Normalteiler von G ist. 2. (G, Z^i) ist u. t. mit dem Exponenten $\alpha(i-1)$, der ein Teiler von $\alpha(i)$ und von α^{i-1} ist. 3. $x \rightarrow x^{\alpha \cdot \alpha(i)}$ bildet Z^{i+1} endomorph auf eine Untergruppe von Z^1 ab. Ist also G eine Gruppe des betrachteten Typus, nilpotent und c die Länge ihrer Zentralreihe, so wird sie durch $x \rightarrow x^{\alpha \cdot \alpha(c-1)}$ endomorph auf ihr Zentrum abgebildet. Fordert man statt der Nilpotenz nur $G = \bigcup_i Z^i$, so haben

die Elemente der Kommutatorgruppe endliche Ordnung. Die Resultate gelten insbesondere für Gruppen, in denen kein Element mehr als M konjugierte hat; denn in diesem Falle ist G/Z^1 u. t. mit einem Exponenten, der ein Teiler von $M!$ ist.

F. W. Levi.

Scott, W. R.: Means in groups. Amer. J. Math. 74, 667—675 (1952).

Extending the axiomatic treatment of arithmetic means by Schimmack [Math. Ann. 68, 125—132 (1909)] to (additively written, though not necessarily abelian) groups, the author calls a sequence of functions $f_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) with arguments and values in the group G a mean on G , if

(1) $f_n(y + x_1, \dots, y + x_n) = y + f_n(x_1, \dots, x_n)$, (2) $f_n(-x_1, \dots, -x_n) = -f_n(x_1, \dots, x_n)$, (3) f_n is a symmetric function of x_1, \dots, x_n , (4) $f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f_{n+1}(f_n, \dots, f_n, x_{n+1})$. Necessary and sufficient conditions on the structure of G are given for the existence of a mean. The question whether they imply the commutativity of G is left open.

If a mean exists, then it is unique; a recursive formula is given for it. Extending a result of Beetle [Math. Ann. **76**, 444—446 (1915)] the author shows that the four postulates (1)—(4) are completely independent provided G is an abelian group in which the equation $nx = a$ has a unique solution x for every element a of G and every positive integer n .

B. H. Neumann.

Hughes, N. J. S.: The unique decomposition of regular ω -linear mappings as direct products. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 359—362 (1952).

The definition of regular n -linear mappings of the set-product of n groups H_i into a group K (cf. N. J. S. Hughes, this Zbl. **44**, 16) is extended in the natural manner to a countable number of groups. A direct decomposition of a mapping may then be defined as before, and the uniqueness theorem for direct decompositions into directly indecomposable mappings holds again. Further generalization to α -linear mappings, where α is any ordinal of class 1 or 2. — If two mappings f and g are such that for every element x of the set-product of the H_i there exists an integer $\lambda(x)$ such that $f(x) = g(x)^{\lambda(x)}$ in K , and if the H_i are abelian of finite exponent, then there exists an integer λ such that $f(x) = g(x)^\lambda$ for all x .

Hanna Neumann.

Neumann, B. H.: A note on algebraically closed groups. J. London math. Soc. **27**, 247—249 (1952).

Sei G eine gegebene Gruppe mit dem Einselement 1, und

$$(1) \quad u_i(g_1, \dots, g_r, x_1, \dots, x_s) = 1, \quad (2) \quad v_j(g_1, \dots, g_r, x_1, \dots, x_s) \neq 1$$

ein System von Gleichungen und Ungleichungen, wobei die u_i und v_j „Wörter“ in den „Veränderlichen“ x_1, \dots, x_s bzw. in den „Konstanten“ g_1, \dots, g_r (d. h. vorgeschriebenen Elementen von G) bezeichnen. Die Gruppe G heißt nach der Terminologie von W. R. Scott (dies. Zbl. **43**, 23) algebraisch abgeschlossen, wenn jedes endliche System von Gleichungen und Ungleichungen der Form (1), (2), welches eine Lösung (für x_1, \dots, x_s) in einer geeigneten G als Untergruppe enthaltenden Gruppe H gestattet, auch schon in G lösbar ist. Falls dieselbe Bedingung nur für jedes endliche System von Gleichungen (1) erfüllt ist, so wird die Gruppe G von W. R. Scott schwach algebraisch abgeschlossen genannt. Verf. beantwortet jetzt eine von Scott herrührende Frage, indem er zeigt, daß jede schwach algebraisch abgeschlossene Gruppe mit mehr als einem Element algebraisch abgeschlossen ist. Darüber hinaus gelingt es Verf., auch die bemerkenswerte Tatsache zu beweisen, daß jede algebraisch abgeschlossene Gruppe einfach ist. T. Szele.

Schuff, Hans Konrad: Über Wurzeln von Gruppenpolynomen. Math. Ann. **124**, 294—297 (1952).

Es sei \mathfrak{G} eine beliebige Gruppe, $\mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ das freie Produkt von \mathfrak{G} mit der freien Gruppe \mathfrak{F}_n von endlich vielen Erzeugenden x_1, \dots, x_n . Verf. sagt, ein Element $f(x_1, \dots, x_n)$ aus $\mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ habe eine Wurzel, wenn ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}[x_1, \dots, x_n]$ existiert, der zwar $f(x_1, \dots, x_n)$, aber kein vom Einheits-element verschiedenes $a \in \mathfrak{G}$ dem Einheits-element der Bildgruppe zuordnet. Ist $f(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 \cdots \alpha_N$, wobei jedes α_i entweder ein Element aus \mathfrak{G} oder eines der $2n$ Elemente $x_\varrho^{\pm 1}$ ($\varrho = 1, \dots, n$) darstellt, und bedeutet a das Produkt der nach wachsendem Index geordneten, zu \mathfrak{G} gehörigen α_i , so ist $a = a(f)$ durch $f(x_1, \dots, x_n)$ allein eindeutig bestimmt. Entsprechendes gilt für $w_\varrho = w_\varrho(f)$, falls man w_ϱ durch „Anzahl der Male, für die $\alpha_i = x_\varrho$ minus Anzahl der Male, für die $\alpha_i = x_\varrho^{-1}$ “ definiert ($\varrho = 1, \dots, n$). Verf. beweist nun: $f(x_1, \dots, x_n)$ besitzt sicher eine Wurzel, wenn $a(f)$ dem Zentrum von \mathfrak{G} angehört und gleichzeitig $w_\varrho(f)$ für mindestens ein ϱ von 0 verschieden ist.

W. Krull.

Sesekin, N. F.: Zur Theorie der lokal nilpotenten Gruppen ohne Torsion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84**, 225—228 (1952) [Russisch].

Das Hauptergebnis dieser Arbeit besteht in der Verschärfung eines Satzes

von Mal'cev. Dieser hat bewiesen (dies. Zbl. 43, 23), daß eine torsionsfreie Gruppe, die einen nilpotenten Normalteiler besitzt, dessen Abelsche Untergruppen alle endlichen Rang haben, selber endlichen Rang hat. Verf. zeigt nun, daß es genügt, auch nur eine Abelsche maximale Untergruppe endlichen Ranges aufzuweisen, um auf endlichen Rang einer nilpotenten torsionsfreien Gruppe schließen zu können. Die Arbeit kündigt nur die Sätze kurz ohne Beweise an. Der Apparat an Definitionen und Lemmas ist kompliziert.

K. A. Hirsch.

Smirnov, D. M.: Über die Automorphismen der auflösbaren Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 891—894 (1952) [Russisch].

For an understanding of the results of this paper a knowledge of A. I. Mal'cev's classification of Abelian groups (this Zbl. 43, 23) is indispensable. In particular A_3 -groups are Abelian groups in which the periodic part is decomposable into the direct product of a finite number of cyclic and locally cyclic (type p^∞) groups and in which the factor-group of the periodic part has finite rank; A_4 -groups are Abelian with a finite periodic part and again a factor-group of finite rank. A soluble group is of type A_i if it possesses a finite normal chain of subgroups with Abelian factor-groups of type A_i . — Theorem 1. Every periodic group of automorphisms of a soluble A_4 -group is finite. Theorem 2. Every periodic group of automorphisms of a soluble A_3 -group is a finite extension of an Abelian A_3 -group. It follows that such a group of automorphisms can be isomorphically represented by matrices over a field of characteristic zero. Whether the whole group of automorphisms of a soluble A_3 -group possesses such a matrix representation is an open problem. Theorem 3. The factor-group of a soluble A_3 -group with respect to its maximal nilpotent normal subgroup is of type A_1 . Hence every extension of a nilpotent A_3 -group by an Abelian group of type p^∞ is itself nilpotent. The next theorem unifies previous results by Muhammedžan (this Zbl. 32, 249) and Sesekin (this Zbl. 34, 303). Theorem 4. If a group has an upper central series of exact length ω (the first limit ordinal), then at least one of its factors must fail to satisfy the minimal condition for serving subgroups (Servanz-Untergruppen). It should be noted that the class of Abelian groups with minimal condition for serving subgroups is exactly the same as the class with maximal condition for serving subgroups viz. the class of Abelian A_3 -groups.

K. A. Hirsch.

Herstein, I. N. and J. E. Adney: A note on the automorphism group of a finite group. Amer. math. Monthly 59, 309—310 (1952).

Bays, S.: Sur l'imprimitivité des groupes de substitutions par rapport aux i -uples. Commentarii math. Helvet. 25, 298—310 (1951).

Verf. setzt seine früher (dies. Zbl. 30, 339) begonnene Analyse der Begriffe der Primitivität oder Imprimitivität einer transitiven Permutationsgruppe \mathfrak{G} des Grades n fort. Anstatt der klassischen Definition der Imprimitivität, die noch in der vorangehenden Abhandlung benutzt wurde, wird nunmehr die Speisersche (d. i. Existenz einer eigentlichen Untergruppe \mathfrak{H} von \mathfrak{G} , die eine Stabilitätsuntergruppe \mathfrak{S} als echte Untergruppe enthält) zugrunde gelegt. Die in der genannten Arbeit diskutierte „Imprimitivität bez. der Paare“ wird hier ausgedehnt auf den Begriff der „Imprimitivität bez. der i -upeln“ (x_1, \dots, x_i) , unter den x_k Variable (Wechselziffern) von \mathfrak{G} verstanden, wobei die Fälle, daß dies eine Anordnung oder eine Kombination darstellen soll, unterschieden werden. Als charakteristisch für diese Imprimitivität bez. der i -upeln wird dann eine der Speiserschen analoge Eigenschaft nachgewiesen: Existenz einer Zwischengruppe \mathfrak{H} zwischen \mathfrak{G} und der Gruppe \mathfrak{S} , die das System (x_1, \dots, x_i) als Anordnung, oder als Kombination, in sich überführt. Dabei ist \mathfrak{G} als transitiv bzgl. der i -upeln vorauszusetzen, d. h. i -fach transitiv im üblichen Sinne, wenn die (x_1, \dots, x_i) Anordnungen darstellen. Sodann folgt auch hier wieder die Existenz gewisser „notwendiger“ Imprimitivitätssysteme für die in den i -upeln operierenden, durch \mathfrak{G} induzierten Gruppen von Permutationen des Grades $n(n-1) \cdots (n-i+1)$ bzw. $\binom{n}{i}$. Diese werden im einzelnen diskutiert für $i=2$ und $i=3$.

H. Schwerdtfeger.

Bays, S.: Les répartitions imprimitives des n -uples dans le groupe symétrique de degré n . Commentarii math. Helvet. 26, 68—77 (1952).

Auf Grund der n -fachen Transitivität der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n gibt es (vgl. vorstehendes Referat) entsprechend jeder echten Untergruppe \mathfrak{H} von \mathfrak{S}_n

eine Aufteilung der Menge aller n -upeln (x_1, \dots, x_n) in Imprimitivitätssysteme für die von \mathfrak{S}_n induzierte Permutationsgruppe vom Grade $n!$, welche in dem System der n -upeln operiert. Genauere Untersuchung zeigt, daß jeder echten Untergruppe \mathfrak{K} von \mathfrak{S}_n zwei solche Aufteilungen entsprechen, entsprechend den Zerlegungen von \mathfrak{S}_n in linke und rechte Restklassen modulo \mathfrak{K} . Ist \mathfrak{K} Normalteiler, so fallen beide Aufteilungen gleich aus. An dem Beispiel \mathfrak{S}_4 mit \mathfrak{K} als zyklischer Untergruppe der Ordnung 4 werden die Verhältnisse ausführlich auseinandergesetzt. Eine weitere Unterteilung der Imprimitivitätssysteme, die \mathfrak{K} entsprechen, wird bewirkt, wenn \mathfrak{K} eine echte Untergruppe enthält. Das Verhalten dieser Untergruppen bei Anwendung einer beliebigen Permutation aus \mathfrak{S}_n wird untersucht.

H. Schwerdtfeger.

Djubjuk, P. E.: Über die Anzahl der Untergruppen gewisser Kategorien von endlichen p -Gruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 575—580 (1952) [Russisch].

Für gewisse spezielle Klassen von p -Gruppen wird bewiesen, daß die Anzahl der Untergruppen gegebener Ordnung $\equiv 1 + p + 2p^2$ bzw. $1 + p + p^2 \pmod{p^3}$ ist. Als Beispiel sei folgender Satz genannt: Eine Gruppe der Ordnung p^m ($m \geq 4$) und vom Rang 3 besitzt die Eigenschaft C , wenn 1. die Anzahl der maximalen Untergruppen des Ranges 2 ein Vielfaches von p ist und 2. die Anzahlen der Untergruppen der Ordnung p^α ($0 \leq \alpha \leq m-1$) in zwei beliebigen maximalen Untergruppen des Ranges 2 für jedes $\alpha \pmod{p^3}$ einander kongruent sind. Eine Gruppe heißt stationär, wenn jede ihrer Untergruppen vom Range 3 und mit einer Ordnung $\geq p^4$ die Eigenschaft C besitzt. In einer stationären Gruppe der Ordnung p^n ($p > 3$), deren Rang größer als 2 ist, ist die Anzahl der Untergruppen der Ordnung p^β ($1 < \beta < n-1$) kongruent $1 + p + 2p^2 \pmod{p^3}$. Zu den stationären Gruppen gehören die Abelschen Gruppen und gewisse von Tazawa betrachteten Gruppentypen (vgl. dies. Zbl. 12, 154).

R. Kochendörffer.

Richert, Hans-Egon: Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung. I. Math. Z. 56, 21—32 (1952).

The author improves a result of Kendall and Rankin about the average order of the number of Abelian groups. More precisely, let $a(n)$ be the number of essentially different Abelian groups of order n . Then $\sum_{n \leq x} a(n) = c_1 x + c_2 x^{1/2}$

$+ c_3 x^{1/3} + O(x^{3/10} \log^{9/10} x)$ where $c_\mu = \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq \mu}}^{\infty} \zeta\left(\frac{v}{\mu}\right)$. The result is deduced from

the following theorem which has its own interesting: Let μ and ν be real numbers, $\mu > \nu > 0$, then

$$\sum_{m^\mu n^\nu \leq x} 1 = \zeta\left(\frac{\mu}{\nu}\right) x^{1/\nu} + \zeta\left(\frac{\nu}{\mu}\right) x^{1/\mu} + \begin{cases} O(x^{2/3(\mu+\nu)}) & \text{for } \mu < 2\nu, \\ O(x^{2/9\nu} \log x) & \text{for } \mu = 2\nu, \\ O(x^{2/(2\mu+5\nu)}) & \text{for } \mu > 2\nu. \end{cases}$$

Loo-Keng Hua.

Robinson, G. de B.: On a conjecture by J. H. Chung. Canadian J. Math. 4, 373—380 (1952).

Beweis eines vom Verf. formulierten und der beiden daraus folgenden Sätze, die Chung vermutet hatte (s. dies. Zbl. 44, 257, 258): Die Anzahl der gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen einer symmetrischen Gruppe in jedem p -Block vom Gewicht b ist unabhängig vom p -Kern und bestimmt durch die Anzahl der möglichen Sternendiagramme und die Anzahl der Arten, wie man die p Restklassen mod p auf ihre getrennten Bestandteile verteilen kann. Die Anzahl der mod p unzerlegbaren Darstellungen, die zu jedem p -Block gehören, ist unabhängig vom p -Kern. H. Boerner.

Robinson, G. de B.: On the modular representations of the symmetric group. II. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 129—133 (1952).

Bemerkungen zu Littlewoods p -Graph (dies. Zbl. 44, 257) in Verbindung mit den Vermutungen Chungs [s. vorsteh. Referat und dortige Zitate]. H. Boerner.

Robinson, G. de B.: On the modular representations of the symmetric group. III. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 424—426 (1952).

Littlewoods Definition eines p -Graphs (s. vorsteh. Referat) wird mit Youngs „seminormaler“ Darstellung (s. z. B. D. E. Rutherford, Substitutional Analysis, Edinburgh 1948; dies. Zbl. 38, 16) in Verbindung gebracht und verallgemeinert.

H. Boerner.

Osima, Masaru: On the irreducible representations of the symmetric group. Canadian J. Math. 4, 381—384 (1952).

$a(n)$ sei die Anzahl der irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe S_n , $u(n)$ die Anzahl der selbstassozierten darunter (Young-Diagramm zur Hauptdiagonale symmetrisch). l_i ($i = 1, \dots, r$) seien die nichtnegativen ganzen Lösungen von $n - 2l = \frac{1}{2}k(k+1)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), s_i ($i = 1, \dots, q$) diejenigen von $n - 4s = \frac{1}{2}k(k+1)$. Dann ist $a(n) = \sum_{i=1}^r \sum_{t=0}^{l_i} a(t) a(l_i - t)$ und $u(n) = \sum_{i=1}^q a(s_i)$.

H. Boerner.

Frame, J. S.: An irreducible representation extracted from two permutation groups. Ann. of Math., II. Ser. 55, 85—100 (1952).

A und B seien Untergruppen einer endlichen Gruppe G und es sei $G = AB + AgB$ mit irgendeinem $g \in G$, das nicht in AB liegt. Dann haben die beiden Darstellungen, die man durch die Permutationen der Rechtsnebenklassen von A und von B gewinnt, zwei irreduzible Bestandteile gemeinsam: je einmal die Einsdarstellung und einmal eine weitere irreduzible Darstellung. Diese letztere wird eingehend behandelt, ihr Grad und ihr Charakter bestimmt.

H. Boerner.

Kac, G. I.: Die Charaktere der Darstellungen der unimodularen Gruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 9—12 (1952) [Russisch].

Sei \mathfrak{G} die Gruppe aller unimodularen n -Matrizen A_n und \mathfrak{H} die Untergruppe der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$. Sei $D_{p_1 p_2 \dots p_n}$ eine irreduzible Darstellung von \mathfrak{G} , wobei $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ die das Gewicht der Darstellung bestimmenden ganzen Zahlen sind; ferner sei $D_{(p'_1) p'_2 \dots p'_n} = D'$ eine irreduzible Darstellung von \mathfrak{H} , wobei „die äußerste“ Gewichtsanzahl p'_1 diese Darstellung als Teil einer Darstellung von \mathfrak{G} charakterisiert. Die Differenz $p'_1 - p'_2$ wird das „äußerste“ Gewicht von D' genannt. Unter Berufung auf einen Satz von Gelfand und Cetlin (dies. Zbl. 37, 153) wird (ohne Beweis) der folgende Satz angegeben: Die irreduziblen Darstellungen, in welche eine Darstellung D von \mathfrak{G} über \mathfrak{H} zerfällt, welche das größtmögliche äußerste Gewicht besitzen, sind auch irreduzible Bestandteile der Darstellung D über \mathfrak{G} . Mit Hilfe dieses Satzes wird ein Beweis skizziert für die folgende Zerlegung des Kronecker-Produkts:

$$(*) \quad \underbrace{D_{1 \dots 1 0 \dots 0}}_k \times D_{p_1 \dots p_n} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \delta_{i_k} \dots \delta_{i_1} D_{p_1 \dots p_n} \quad (1 \leq k \leq n),$$

wobei die δ_i die durch $\delta_i D_{p_1 \dots p_n} = D_{p_1 \dots p_{i+1} \dots p_n}$ definierten Differenzenoperatoren sind. Beim Beweis wird die Formel für das Maß einer irreduziblen Darstellung herangezogen, für die zwar auf das Buch von N. Tschebotarow, Theorie der Lieschen Gruppen, 1940, verwiesen wird, wo sie mit Hilfe der Gruppenintegration gewonnen wird; Verf. stellt jedoch fest, daß sie direkt aus dem Satz von Gelfand und Cetlin (l. c.) folgt. Die Formel (*) wird dann zur Berechnung der Charaktere verwendet. Zunächst überträgt sie sich, bei entsprechender Deutung der Operatoren δ_i , unmittelbar auf die Charaktere $\chi(p_1, \dots, p_n)$ von $D_{p_1 \dots p_n}$, und die so erhaltene Relation unter den Charakteren wird durch die Substitution $l_i = p_i + n - 1$ in die mehr symmetrische Gleichung $x_k \chi(l_1, \dots, l_n) = \sum \delta_{i_k} \dots \delta_{i_1} \chi(l_1, \dots, l_n)$ übergeführt, im wesentlichen eine Differenzengleichung, wobei $x_k = \chi(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ zu setzen ist. Wird dann $\varphi(z) = z^n - x_1 z^{n-1} + x_2 z^{n-2} - \dots \pm x_n$ gesetzt, so ergibt sich das System von Differenzengleichungen $\varphi(\delta_i) \chi(l_1, \dots, l_n) = 0$ für χ , in deren jeder der Operator $\varphi(\delta_i)$ nur auf eine der Variablen wirkt.

H. Schwerdtfeger.

Lewis, F. A.: The linear congruence group modulo n . Proc. Amer. math. Soc. 3, 367—368 (1952).

Die Ordnungen der Gruppen $GLH(m, n)$ und $SLH(m, n)$ werden angegeben. Ferner wird ein System von zwei Erzeugenden von $SLH(2, n)$ aufgestellt und für $n > 2$ eine zu ihr isomorphe abstrakte Gruppe angegeben. J. J. Burckhardt.

Heinz, C.: Unbedingte und bedingte Invarianten bei Gruppen und bei von Gruppen umschriebenen Scharen von Transformationen. Math. Ann. 125, 32—48 (1952).

n -Gleichungen $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$, wo die f_i hinreichend oft differenzierbare Funktionen sein sollen, stellen eine Transformation $x \rightarrow y$ T dar. Bei variablen Parametern α erhält man ein Transformationssystem \mathfrak{T} , wovon p -gliedrige Gruppen einen speziellen Fall bilden. Vorausgesetzt wird, daß der Bereich der α stets ein $\alpha_i = \delta_i$ enthält, so daß $y = f(x; \delta)$ die identische Transformation darstellt. $I(x)$ heißt eine unbedingte Invariante bei \mathfrak{T} , wenn $I(y) \equiv I(x)$, identisch in allen x und α . Gilt $I(y) = I(x)$ nur für einen durch Gleichungen $B(x) = 0$ definierten Teilbereich, dann spricht Verf. von „bedingten“ Invarianten (die übliche Terminologie gebraucht die Namen „frei“ und „gebunden“). Es folgen die Definitionen für vollständige Systeme von (analytischen) Invarianten und, bei gewissen Voraussetzungen über den Rang der Funktionalmatrix $\left\| \frac{\partial f(x; \alpha)}{\partial \alpha} \right\|$, die theoretische Konstruktion der Invarianten. Eine Reihe von Sätzen bringt dann die eindeutige Zuordnung von Gruppen und vollständigen Systemen unbedingter Invarianten, sowie die besondere Stellung, die Gruppen gegenüber beliebigen Transformationssystemen \mathfrak{T} einnehmen. Diese Sätze werden dann zum Teil auch für bedingte Invarianten bewiesen.

R. W. Weitzenböck.

Kadison, Richard V. and I. M. Singer: Some remarks on representations of connected groups. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 419—423 (1952).

Soient G un groupe topologique, H un espace hilbertien, $g \rightarrow U_g$ une représentation unitaire fortement continue de G dans H , telle que les U_g appartiennent à un anneau d'opérateurs de classe finie M . Alors, pour toute trace fortement continue φ sur M , la fonction $g \rightarrow \varphi[(U_g^* - 1)(U_g - 1)]$ est continue et centrale; si les représentations unitaires du type considéré séparent les points de G , on en déduit que les fonctions continues centrales séparent tout point $g \neq e$ de G de e (observant qu'un anneau de classe finie possède suffisamment de traces). Lorsque G est localement compact connexe, il en résulte d'abord aisément qu'il existe un système fondamental de voisinages de e invariants par les automorphismes intérieurs, donc, d'après des résultats classiques, que $G = K \times R^n$ (K compact, R groupe des nombres réels). Pour un résultat voisin, cf. R. Godement, ce Zbl. 43, 32. Les AA. donnent quelques conséquences, notamment une démonstration rapide de ce théorème de I. E. Segal et J. von Neumann [Ann. of Math., II. Ser. 52, 509—517 (1950)]: si G est un groupe de Lie connexe semi-simple sans constituants simples compacts, toute représentation fortement continue de G dans un anneau d'opérateurs de classe finie est triviale.

J. Dixmier.

Kadison, Richard V.: Infinite unitary groups. Trans. Amer. math. Soc. 72, 386—399 (1952).

L'A. étudie la structure du groupe M_u des opérateurs unitaires d'un facteur M et démontre les résultats suivants: 1. Si M n'est pas de type I_n (n fini), M_u n'a pas de représentation unitaire uniformément continue, de dimension finie, non triviale. 2. Si M est de type II_1 ou III les seuls sous-groupes fermés propres de M_u sont les sous-groupes du centre $\{\lambda I: |\lambda| = 1\}$. 3. Si M est de type I_∞ ou II_∞ , l'ensemble G_f de tous les opérateurs unitaires de M possédant exactement un centre de densité infinie est un sous-groupe propre, normal, fermé de M_u . [Un nombre α du spectre d'un opérateur normal C d'un facteur est dit centre de densité infinie si la projection spectrale de C correspondant à un ouvert arbitraire contenant α a une dimension relative infinie (sous-entendu: relativement à M).] 4. Si M est de type I_∞ ou II_∞ , les seuls groupes normaux fermés propres de M_u sont les sous-groupes normaux fermés de G_f , qui comprennent les sous-groupes finis de $\{\lambda I: |\lambda| = 1\}$ et ceux qu'ils engendrent avec $G_f^{(1)}$ (sous-groupe de G_f constitué de ceux de ses éléments dont le centre de densité infinie est 1).

A. Revuz.

Dieudonné, Jean: On the structure of unitary groups. Trans. Amer. math. Soc. 72, 367—385 (1952).

K est un corps gauche sur lequel est définie une involution J [application biunivoque $\xi \rightarrow \xi^J$ de K sur lui-même avec $(\xi + \eta)^J = \xi^J + \eta^J$, $(\xi \eta)^J = \eta^J \xi^J$, $(\xi^J)^J = \xi$]. E est un espace vectoriel à droite sur K à $n \geq 2$ dimensions. Une forme hermitienne (resp. hermitienne gauche) $f(x, y)$ sur E est une application de $E \times E$ dans K , linéaire en y pour tout x et telle que $f(y, x) = (f(x, y))^J$ [resp. $= -(f(x, y))^J$]. x et y sont orthogonaux si $f(x, y) = 0$. f est supposée non dégénérée, c.-à-d. 0 est le seul vecteur orthogonal à E entier. Si K a 2 pour caractéristique, on suppose de plus que $f(x, x)$ a toujours la forme $\xi + \xi^J$ pour un $\xi \in K$ convenable. Une transformation unitaire u est une application linéaire biunivoque de E sur lui-même telle qu'on ait identiquement $f(u(x), u(y)) = f(x, y)$. Leur ensemble est le groupe unitaire $U_n(K, f)$. L'A. en étudie la structure dans le cas général. (Il avait déjà examiné deux cas particuliers dans J. Dieudonné, Sur les groupes classiques, Actual. sci. industr., Paris 1948, ce Zbl. 37, 13). ν , indice de f , est la dimension maximum des sous-espaces totalement isotropes. On a $\nu \leq 2n$. Une transvection est une transformation linéaire du type $x \rightarrow x + a \varrho(x)$ où $\varrho(x)$ est une forme linéaire non identiquement nulle et telle que $\varrho(a) = 0$. Une transvection ne peut être unitaire que si $\nu \geq 1$, et l'est alors si et seulement si a est isotrope et $\varrho(x) = \lambda f(a, x)$ où λ est un élément symétrique de K ($\lambda^J = \lambda$). T_n est le sous-groupe de U_n engendré par les transvections unitaires, c'en est un sous-groupe distingué. W_n est le centre de T_n , Z_n celui de $U_n(K, f)$. — L'A. établit alors le résultat suivant. „Si K a plus de 25 éléments, si $n \geq 2$ et $\nu \geq 1$, T_n/W_n est simple et $W_n = T_n \cap Z_n$ “ après avoir démontré le lemme important suivant: „Si K n'est pas commutatif, il est engendré par l'ensemble S de ses éléments symétriques, sauf si, K étant réflexif et de caractéristique $\neq 2$, S est identique au centre Z de K “. — La suite de l'Article est consacré à l'étude du groupe U_n/T_n . L'A. prouve d'abord que pour $\nu \geq 1$, toute transformation unitaire est un produit de rotations hyperboliques (transformations unitaires laissant invariant chaque élément d'un sous-espace non isotrope à $n-2$ dimensions), puis que $T_2 = U_2$, si K^* groupe des éléments $\neq 0$ de K est engendré par S . On aura donc $T_n = U_n$, si cette dernière propriété est vraie. — L'A. se limite alors au cas où 1) K est de rang fini m^2 sur Z , 2) K est de première espèce (la restriction de J à Z est l'identité). La dimension de S sur Z est alors $m(m+1)/2$ (cas A) ou $m(m-1)/2$ (cas B). L'A. prouve que $T_n = U_n$ dans le cas A et conjecture que S engendre encore K^* dans le cas B, pour $m > 2$. Il prouve que pour $m = 2$, 1°) T_n est le groupe des commutateurs de U_n , si la caractéristique de K est $\neq 2$ et si l'indice de la forme hermitienne gauche f est ≥ 2 (donc $n \geq 4$), 2°) Au contraire, pour $n = 2$, T_2 n'est certainement pas le groupe des commutateurs de U_2 . — Dans le cas plus particulier où K est le corps des quaternions ordinaires sur un corps ordonné euclidien, l'A. prouve $T_n = U_n$. Il établit enfin deux résultats relatifs à K : „Si K est de 1° espèce et de caractéristique $\neq 2$, pour tout $\xi \in K^*$, ξ et ξ^J sont dans la même classe modulo le groupe des commutateurs C de K . Si K est de 2° espèce (restriction de J à Z différente de l'identité), il existe $\xi \in K^*$, tel que ξ et ξ^J ne soient pas dans la même classe modulo C ; ce qui entraîne que si K est de deuxième espèce U_n et T_n sont toujours distincts. ($\nu \geq 1$.)

A. Reuz.

Serre, Jean-Pierre: Le cinquième problème de Hilbert. État de la question en 1951. Bull. Soc. math. France 80, 1—10 (1952).

Expository paper. Notice the following, as yet unpublished, result of the author: If G is a locally Euclidean group, g a subgroup isomorphic to the 1-dimensional solenoid, then $\dim G/g = 1 + \dim G$. — Reviewer's remark: A reference to a paper by A. Malcev [Mat. Sbornik, n. Ser. 19 (61), 165—174 (1946)] is omitted. Malcev's paper contains the first complete proof of the solution of the Hilbert problem for solvable groups and is prior to the paper of K. Iwasawa (this Zbl. 34, 18) referred to in the paper reviewed.

T. Ganea.

Kuranishi, Masatake: On one-parameter subgroups in finite dimensional locally compact group with no small subgroups. Nagoya math. J. 4, 89—96 (1952).

Let G be a locally compact topological group and let U be a neighborhood of the identity of G . If there exists a neighborhood U_1 of the identity in G , such that for every element x of U_1 there exists an unique one-parameter subgroup $g(\lambda)$ ($|\lambda| \leq 1$) which is contained in U and $g(1) = x$, the author called U to have the property $(S)^*$. By Lie group this property is well known. More generally this is also true for the finite dimensional, locally connected group with no small subgroups. This fact is essentially due to C. Chevalley (this Zbl. 43, 32), where the groups are assumed to be locally euclidean and his method is indicated by

D. Montgomery to be applicable to the above-mentioned general case, and same result was also obtained by H. Yamabe. The author of the present paper shows that same property (S)* holds also for a finite dimensional group without no small subgroups. To this object he proves first locally connectedness of such groups, and the proof of this fact constitutes the main part of this note. *T. Tannaka.*

Verbände. Ringe. Körper:

Matusima, Yataro: On some problems of Birkhoff. Proc. Japan Acad. 28, 19—24 (1952).

G. D. Birkhoff and G. Birkhoff [Trans. Amer. math. Soc. 60, 3—11 (1946)] have developed a brief set of postulates for distributive lattice with the unit element. The author proves that these postulates are independent. This is the solution of Problem 65 in Lattice Theory by G. Birkhoff (Amer. math. Soc. Colloqu. Publ. Vol. 25, Rev. ed, New York 1948, this Zbl. 33, 101). The author also deals with Problem 7 in the mentioned book and formulates new sets of postulates for lattices.

R. Sikorski.

Petresco, Julian: Théorie relative des chaînes. I. Conformisme et correspondance. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 226—228 (1952).

Etant données, dans un treillis, deux chaînes $\alpha (A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_r)$ et $\beta (B_0 = A_0 \leq B_1 \leq \dots \leq B_s = A_r)$ de mêmes extrémités et leurs subdivisions au sens de Zassenhaus (chaînes des $A_{ij} = A_{i-1} \cup (A_i \cap B_j)$ et des B_{ji}), notées α_{β} et β_{α} , les chaînes α et β étant supposées \cap -cosaturées, c'est-à-dire telles que $\alpha = \alpha_{\beta}$ et $\beta = \beta_{\alpha}$ aux répétitions près, l'A. affirme l'équivalence de trois conditions (théorème d'équivalence de Jordan-Zassenhaus) dont nous extrayons les deux plus suggestives: a) α et β sont $Z\cap$ -conformes, c'est-à-dire qu'on a: $A_{i,j-1} = A_{ij} \Leftrightarrow B_{j,i-1} = B_{ji}$ pour tout i et tout j ; b) α et β sont $J\cap$ -correspondantes, c'est-à-dire qu'il existe une correspondance biunivoque de leurs intervalles telle que les intervalles associés soient \cap -correspondants ($A_i \leq A_{i-1}$ et $B_j \leq B_{j-1}$ sont \cap -correspondants si $A_{i-1} = A_i$ et $B_{j-1} = B_j$ ou si $A_{i-1} \cap B_{j-1} = A_{i-1} \cap B_j = A_i \cap B_{j-1} \neq A_i \cap B_j$). L'A. donne ensuite un théorème auto-dual (théorème d'équivalence de Jordan-Dedekind) dans le même ordre d'idées, puis il généralise ces deux théorèmes au cas de chaînes non nécessairement \cap -cosaturées (ni \cup -cosaturées) (théorèmes d'équivalence de Schreier-Ore et de Schreier-Dedekind).

R. Croisot.

Albert, A. A.: On simple alternative rings. Canadian J. Math. 4, 129—135 (1952).

Ein Ring heißt alternativ, wenn statt des assoziativen Gesetzes für Produkte gilt $x(xy) = (xx)y$, $(yx)x = y(xx)$. Bruck und Kleinfeld (dies. Zbl. 44, 22) haben bewiesen, daß jeder alternative Divisionsring mit von 2 verschiedener Charakteristik entweder assoziativ oder eine Cayley-Algebra ist. Jede solche Algebra besitzt eine skalare Erweiterung, welche über dem Zentrum F isomorph ist zur Algebra $C = e_{11}F + e_{00}F + C_{10} + C_{01}$, wo $C_{ij} = e_{ij}F + f_{ij}F + g_{ij}F$ ($i, j = 0, 1$; $i \neq j$). e_{11} und e_{00} sind orthogonale Idempotente und für die x_{ij} aus C_{ij} gilt $x_{ij}^2 = 0$, $e_{ii}x_{ij} = x_{ij}e_{jj} = x_{ij}$, $e_{jj}x_{ij} = x_{ij}e_{ii} = 0$. Verf. beweist: Jeder einfache alternative Ring, der ein von seinem Einselement verschiedenes Idempotent enthält, ist entweder assoziativ oder die Cayley-Algebra C . Da diese Aussage von der Charakteristik k unabhängig ist, werden die von Zorn [Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 8, 123—147 (1930)] für $k \neq 2$ oder 3 gefundenen Eigenschaften alternativer Ringe neu hergeleitet.

E. Trost.

Nollet, Louis: Sur les anneaux premiers. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 287—294 (1952).

Der gewöhnliche Begriff des Ringes wird in der Weise verallgemeinert, daß die additive Struktur eines Ringes A nicht mehr als eine einzige additive Abelsche

Gruppe, sondern als eine Menge $A/+$ von solchen Gruppen α angenommen wird, unter welchen je zwei elementfremd sind. In einem solchen Ringe A sind zwei Elemente genau dann addierbar, wenn sie zu derselben Gruppe gehören. Was nun die Multiplikation in A betrifft, ist diese jeweils ausführbar, assoziativ und zweiseitig distributiv. Die distributiven Gesetze sind so aufzufassen, daß die Existenz der Summe auf der einen Seite die auf der anderen nach sich zieht. Daraus folgt unmittelbar, daß sich das Produkt von zwei Gruppen α und β eindeutig definieren läßt, womit $A/+$ zu einer regulären Halbgruppe wird. Ein Beispiel für einen solchen Ring ist die Menge aller homogenen Polynome in n Variablen über einem gewöhnlichen Ring (dabei sind natürlich zwei Nullformen verschiedenen Grades als verschieden zu betrachten). Die Begriffe von Unterringen, Idealen und Körpern werden in zweckmäßiger Weise eingeführt. Verf. nennt einen Ring A prim, wenn alle seine zweiseitigen Ideale prim sind. Eine Anzahl von wohlbekannten Sätzen über gewöhnliche Ringe wird verallgemeinert, von denen hier nur das folgende Resultat erwähnt sei: Ist das Nullideal \mathfrak{o} (dieses besteht aus den Gruppenelementen der Gruppen von $A/+$) prim und gilt für die Linksideale von A die Minimalbedingung, so ist A entweder gleich \mathfrak{o} oder ein Körper. *L. Fuchs.*

Snapper, E.: Completely primary rings. IV. Chain conditions. Ann. of Math., II. Ser. **55**, 46—64 (1952).

Mit dem vorliegenden vierten Teil wird die Neubegründung der Theorie der primären Ringe abgeschlossen. (Zu den drei ersten Teilen vgl. dies. Zbl. **42**, 29, 30, 263). Im ersten Abschnitt werden primäre Ringe behandelt, die der Minimalbedingung und damit auch der Maximalbedingung genügen. Das Hauptergebnis besagt hier, daß ein primärer Ring \mathfrak{R} und eine kanonische Erweiterung \mathfrak{S} von \mathfrak{R} stets die gleichen Loewyschen Kompositionsreihen besitzen; dabei ist natürlich unter einer Kompositionsreihe des Ringes \mathfrak{R} eine Kompositionsreihe der additiven Gruppe \mathfrak{R} mit dem Operatorenbereich \mathfrak{R} zu verstehen. (Zum Begriff der kanonischen Erweiterung vgl. Teil III bzw. dies. Zbl. **42**, 263). — Da in jedem primären Ring \mathfrak{Q} mit Maximalbedingung das einzige Primideal einen endlichen Exponenten besitzt, gibt es nach Teil III in \mathfrak{Q} immer einen (bis auf Isomorphie eindeutig) bestimmten Unterring \mathfrak{Q}^* , der seinerseits Hauptidealring ist, und der mit \mathfrak{Q} den Restklassenkörper gemein hat, so daß beim Übergang von \mathfrak{Q}^* zu \mathfrak{Q} ausschließlich Nullteiler zu adjungieren sind. Im zweiten Abschnitt zeigt nun Verf., wie diese Tatsache zur näheren Untersuchung des Aufbaus von \mathfrak{Q} ausgenützt werden kann. Da dabei \mathfrak{Q} als additiver Modul mit dem Multiplikatorenring \mathfrak{Q}^* aufgefaßt werden muß, ergibt sich gleich die Gelegenheit, die Elementarteilertheorie eines endlichen \mathfrak{Q}^* -Moduls kurz zu entwickeln. — Der dritte und letzte Abschnitt enthält eine Neudarstellung der Theorie der primären Hauptidealringe (primären zerlegbaren Ringe im Sinne von Fränkel und Krull). *W. Krull.*

Allen, H. S.: Groups of automorphisms on a module. Indagationes math. **14**, 253—254 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **55**, 253—254 (1952).

Let A be a ring with a unit element ε and let E be a left A -module such that $\varepsilon x = x$ for any $x \in E$. We denote by $L(E)$ the ring of the A -endomorphisms of E , by $G(E)$ the group of all A -automorphisms of E , by $G_M(E)$ the subgroup of $G(E)$ consisting of all automorphisms which leave a submodule M of E invariant, and by $g_M(E)$ the group of automorphisms which leave all elements of M invariant. Two submodules M and N of E are said to be complementary if E is the direct sum of M and N . The author shows that in this case $G_M(E)$ is the normaliser of the subgroup $g_M(E)$ in $G(E)$ and, moreover, $g_M(E) g_N(E) = G_M(E) G_N(E)$ (where HK denotes the set of all elements hk with $h \in H$ and $k \in K$, H and K being subgroups of a group). Furthermore, for each element $\gamma \in G_M(E)$ a unique representation $\gamma = \alpha + \beta - I$ with $\alpha \in g_M(E)$ and $\beta \in g_N(E)$ (I is the identity operator) holds. Finally it is shown that the factor group $G_M(E)/g_M(E)$ is isomorphic to the group $G_M(E) \cap g_N(E)$. *T. Szele.*

Andrunakievič, V. A.: Zur Definition des Radikals eines Ringes. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **16**, 217—224 (1952) [Russisch].

Das Radikal eines Ringes \mathfrak{A} im Sinne von Brown und McCoy (vgl. z. B. dies. Zbl. **30**, 197) wird mittels der vom Verf. früher (dies. Zbl. **29**, 248) eingeführten Operation $a \circ b = a + b - ab$ und der zugehörigen Ideale neu definiert und untersucht. Die von Brown und McCoy benutzte Elementmenge $G(a)$ kann ersetzt werden durch die Menge $F(a) = \{a x - x + y a - y + \sum_i (x_i a y_i - x_i y_i)\}$. Zunächst wird gezeigt: Dann und nur dann ist $a \in F(a)$, wenn $\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Ein solches Element a von \mathfrak{A} heißt im verallgemeinerten Sinne radikal. Ein zweiseitiges Ideal heißt i. v. S. radikal, wenn jedes seiner Elemente diese Eigenschaft besitzt. Das Radikal N wird dann die Summe aller i. v. S. radikalen Ideale. Das Radikal des Restklassenringes \mathfrak{A}/N besitzt das Radikal Null. Ist \mathfrak{A} nicht einfach bezüglich der mittels der Operation $a \circ b$ definierten Ideale, so ist das Radikal der Durchschnitt aller derjenigen maximalen Ideale M , für die \mathfrak{A}/M ein Einselement besitzt. Das Radikal eines Ringes mit Minimalbedingung für Linksideale ist nilpotent.

R. Kochendörffer.

Fuchs, L.: A remark on the Jacobson radical. *Acta Sci. math.* **14**, 167—168 (1952).

The Jacobson radical [N. Jacobson, *Amer. J. Math.* **67**, 300—320 (1945)] of a ring with unit element is known to be the intersection of all maximal right ideals (cf. loc. cit.). The author remarks that it is then the Frattini subgroup (cf. B. H. Neumann, this Zbl. **16**, 295) of the additive group of the ring with the ring elements acting as right operators, and gives an independent proof of this fact. He adds that the hypothesis can be weakened to the existence of a one-sided neutral element, but can not be altogether omitted.

B. H. Neumann.

Jacobson, N. and C. E. Rickart: Homomorphisms of Jordan rings of self-adjoint elements. *Trans. Amer. math. Soc.* **72**, 310—322 (1952).

Let \mathfrak{S}_n be the ring of all n -rowed matrices over a field we assume that \mathfrak{S}_n admits an involution $a \rightarrow a^*$, that is, a mapping such that $(a + b)^* = a^* + b^*$, $(ab)^* = b^* a^*$ and $a^{**} = a$. The set \mathfrak{A} of self-adjoint elements $h = h^*$ form a Jordan ring. The main result of the paper is that if $e_{ii}^* = e_{ii}$ and $n \geq 3$, and every element of \mathfrak{A} can be expressed in the form $a + a^*$, then any Jordan homomorphism of \mathfrak{A} can be extended to an associative homomorphism of \mathfrak{S}_n . Extensions of the result to locally matrix ring and primitive ring with minimal one-sided ideals have also been obtained. The authors prove first that an involution of \mathfrak{S}_n keeping $e_{ii}^* = e_{ii}$ ($1 \leq i \leq n$) fixed is of the form $x^* = \Delta x' \Delta^{-1}$, where x' denotes the transposed matrix of x and $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ is an involution in \mathfrak{S} and Δ is a diagonal matrix and then establish the main theorem by a method similar to that given in a previous paper of the authors (this Zbl. **39**, 264).

L.-K. Hua.

Flanders, Harley: A remark on Kronecker's theorem on forms. *Proc. Amer. math. Soc.* **3**, 197 (1952).

Eine elementare Rechnung zeigt: Angenommen, es habe der Integritätsbereich J die folgende Eigenschaft: Aus $(a_1 x + a_0) \cdot (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0) = c_{m+1} x^{m+1} + c_m x^m + \dots + c_0$; $c_i \cdot c^{-1} \in J$ ($i = 0, 1, \dots, m+1$) folgt stets $a_0 \cdot b_m \cdot c^{-1} \in J$; $(a_0, a_1, b_0, \dots, b_m, c \in J)$. Dann ist J ganz abgeschlossen.

W. Krull.

Kasch, Friedrich: Über die eindeutige Primelementzerlegung. *Norsk mat. Tidsskr.* **34**, 10—12 (1952).

In dem Ring R_n der ganzen Potenzreihen in den Unbestimmten z_1, z_2, \dots, z_n mit komplexen Koeffizienten gilt bekanntlich die eindeutige Primelementzerlegung (Z. P. E.). Zum Beweis dieses Satzes vermeidet Verf. die in der Literatur übliche Benutzung der Tatsache, daß sich die Z. P. E. eines Integritätsbereiches I auf den Polynomring $I[z_n]$ überträgt (Verf. beweist sogar diese Tatsache mit). Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz ist der

Beweis der Z. P. E. auf den des folgenden Satzes reduziert: Sind $a, b \in R_{n-1}[z_n]$, $c \in R_n$, $(a, b) = 1$ und $a|bc$, so ist $a|c$. Für R_1 ist der Satz trivial. Man setze also R_{n-1} als Z. P. E.-Ring voraus. Ist dann der Grad r von a (nach z_n) gleich Null, so wird der Satz genau so wie für Polynome in z_n bewiesen. Es gelte der Satz für Grad $(a) < r$. Dann kann man ein Element $v \in R_{n-1}$ und $u \in R_{n-1}[z_n]$ so bestimmen, daß der Grad von $vb - ua = f (\neq 0)$ kleiner ist als r . Für $(a, v) = t (\in R_{n-1})$ setze man $a = a^*t$, $v \leq v^*t$ und $v^*b - ua^* = f^*$. Sind dann $g|a^*$, $g|f^*$, so ist $gh = v^*b$ mit $h \in R_n$ und $(g, v^*) = 1$. Wegen $\text{Grad}(v^*) = 0$ ist also $g|b$; weil $g|a$ ist, so muß $g \sim 1$ sein, daher ist $(a^*, f^*) = 1$. Wegen $a|bc$ gehört $d = bc/a$ zu R_n , und man erhält $a^*d_1 = f^*c$ mit $d_1 = v d - u c$. Aus $(a^*, f^*) = 1$ folgt nach Induktionsannahme $f^*|d_1$; d. h. $c = a^*k$ mit $k \in R_n$. In $a d = bc$ eingesetzt, erhält man $t d = b k$; da $(t, b) = 1$ und $t \in R_{n-1}$ sind, so gilt $t|k$, also ist $a = a^*t|c$. — Bemerkung. Daß $R_{n-1}[z_n]$ ein Z. P. E.-Ring ist, kann man genau so wie oben beweisen. Den oben angegebenen Beweis kann man auch auf einen Euklidischen Integritätsbereich I anwenden. Ist nämlich die Norm $N(a)$ von a aus I gleich 1, so ist der Satz trivial; sonst kann man ein Element $u \in I$ so bestimmen, daß $f = b - ua$ eine kleinere Norm als $N(a)$ besitzt. Aus der Relation $a(d - uc) = cf$ und $(a, f) = 1$ schließt man sofort $a|c$.
Moriya.

Kaplansky, Irving: Modules over Dedekind rings and valuation rings. Trans. Amer. math. Soc. **72**, 327—340 (1952).

Es werden Moduln mit einem Dedekindring R (Ring, dessen sämtliche Ideale invertierbar sind) als Operatorenbereich untersucht und auf sie fast alle für Moduln mit einem Hauptidealring als Operatorenbereich vorliegenden Struktursätze verallgemeinert (Modulterminologie bezüglich R als Operatorenbereich verstanden. Ganze oder gebrochene Ideale werden kurz Ideale genannt. K Quotientenkörper von R): (1) Ein endlich erzeugbarer Modul ist direkte Summe seines Torsionsmoduls (Modul der Elemente mit von 0 verschiedenem Ordnungsideal) und eines endlich erzeugbaren torsionsfreien Moduls. (2) Ein endlich erzeugbarer torsionsfreier Modul ist vom Typ der direkten Summe einer Anzahl endlich erzeugbarer Ideale. (3) Der Modultyp einer direkten Summe $I_1 \oplus \dots \oplus I_n$ von endlich erzeugbaren Idealen I_i ist eindeutig bestimmt durch n und die Idealklasse des Produktes $I_1 \dots I_n$. (4) Eine direkte Summe unendlich vieler invertierbarer Ideale ist vom Typ eines freien Moduls. Die Sätze (1)—(3) gehen schon auf E. Steinitz [Math. Ann. **71**, 328—354 (1911); **72**, 297—345 (1912)] zurück. Sie werden jedoch in der vorliegenden Arbeit unter der schwächeren Voraussetzung, (a) daß in R nur die endlich erzeugbaren Ideale I invertierbar sind und, nur für (3) notwendig, (b) daß in R/I jedes endlich erzeugbare Ideal Hauptideal ist, bewiesen. Auch für (4) sind nur (a) und (b) notwendig. — Die Struktur der Torsionsmoduln über Dedekindringen läßt sich auf die Struktur der Torsionsmoduln über Hauptidealringen zurückführen: Auch über Dedekindringen ist jeder Torsionsmodul direkte Summe primärer Moduln. Gehört ein primärer Modul zum Primideal p , so kann er als R_p -Modul aufgefaßt werden, R_p Ring der Elemente $\alpha/\beta \in K$, β prim zu p . R_p ist Hauptidealring. — Moduln, die, wie z. B. die endlich erzeugbaren, direkte Summen von zyklischen Moduln und endlich erzeugbaren torsionsfreien Moduln sind, nennt Verf. „at the risk of possible ambiguity“ zerlegbar (decomposable). Jeder Teilmodul eines zerlegbaren Moduls ist zerlegbar. Der Torsionsmodul eines zerlegbaren Moduls ist direkter Summand. — Ein Modul mit vom Nullmodul verschiedenem Torsionsmodul T besitzt stets einen von Nullmodul verschiedenen Untermodul von T als direkten Summanden. — Ein Modul M heißt teilbar (divisible), wenn $\alpha M = M$ für alle $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Jeder Modul besitzt einen maximalen teilbaren Untermodul. Er ist direkter Summand und sein Restklassenmodul enthält keinen teilbaren Untermodul. Der Torsionsmodul eines teilbaren Moduls ist direkter Summand. Sein Restklassenmodul ist vom Typ eines Vektorraumes über K . — Ein letzter Abschnitt beschäftigt sich mit Moduln über maximalen und fast-maximalen Bewertungsringen R (maximal: Aus der Lösbarkeit aller Paare von Kongruenzen eines jeden Systems (A) $x = \alpha_r \text{ mod } I_r$, I_r Ideal, $\alpha_r \in K$, r durchlaufe eine beliebige Menge, folgt die Lösbarkeit des ganzen Systems; fast-maximal: Dieselbe Bedingung nur für jedes System (A) mit $\bigcap_r I_r \neq 0$). Verf. zeigt: Ist R maximal und M ein torsionsfreier Modul, für den in jedem System linear unabhängiger Elemente stets nur abzählbar viele enthalten sind, so ist M vom Typ einer direkten Summe von Idealen. Die Abzählbarkeitsvoraussetzung kann nach einem von R. Baer (dies. Zbl. **16**, 203) angegebenen Beispiel nicht entbehrt werden. — Ist R fast-maximal und M ein endlich erzeugbarer Modul, so ist M direkte Summe von zyklischen Moduln.
W. Gaschütz.

Nagata, Masayoshi: On Krull's conjecture concerning valuation rings. Nagoya math. J. **4**, 29—33 (1952).

An Hand eines kunstvoll konstruierten Beispiels wird gezeigt, daß in jedem Körper, der über dem Primkörper mindestens den Transzendenzgrad 1 (Charakteristik 0) bzw. den Transzendenzgrad 2 (Charakteristik p) besitzt, stets vollständig ganz abgeschlossene, primäre Integritätsbereiche existieren, die keine Bewertungsringe sind. Damit ist endgültig klargemacht, daß der Begriff „vollständig ganz abge-

geschlossen“ im Gegensatz zu dem Fundamentalbegriff „ganz abgeschlossen“ nur die Rolle eines Hilfsbegriffs spricht, dessen Hauptbedeutung offenbar darin liegt, daß bei Noetherschen Ringen „ganz abgeschlossen“ genau so viel besagt wie „vollständig ganz abgeschlossen“.

W. Krull.

Moriya, Mikao: Über die Restklassenkörper bewerteter perfekter Körper. Nagoya math. J. 4, 15—27 (1952).

Es sei K ein nicht-archimedisch bewerteter perfekter Körper mit dem Restklassenkörper \mathfrak{K} . Für die Charakteristiken $\chi(K)$, $\chi(\mathfrak{K})$ sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

- (Ia). $\chi(K) = \chi(\mathfrak{K}) = 0$ (charakteristikkgleicher Fall mit Nullcharakteristik),
 (Ib). $\chi(K) = \chi(\mathfrak{K}) = p$ (charakteristikkgleicher Fall mit Primzahlcharakteristik),
 (II). $\chi(K) = 0$, $\chi(\mathfrak{K}) = p$ (charakteristikungleicher Fall).

Die Frage der Existenz und evtl. Eindeutigkeit eines körperisomorphen Repräsentantensystems R von \mathfrak{K} in K in den Fällen (Ia, b) bzw. gruppenisomorphen Repräsentantensystems R^\times von \mathfrak{K}^\times in K^\times im Falle (II) ist im Falle einer diskreten Bewertung durch Arbeiten von Hasse-F. K. Schmidt, Teichmüller und Witt weitgehend geklärt. In der vorliegenden Arbeit wird der allgemeine Fall einer nicht notwendig diskreten Bewertung betrachtet und ebenfalls weitgehend geklärt. — Zunächst werden den drei Fällen entsprechend folgende drei Sätze bewiesen: Fall (Ia). In K existiert ein körperisomorphes Repräsentantensystem R von \mathfrak{K} . Fall (Ib). In K existiert ein maximaler Teilkörper R_0 mit der Eigenschaft, körperisomorphes Repräsentantensystem eines Teilkörpers \mathfrak{K}_0 von \mathfrak{K} zu sein, und es ist $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ rein-inseparabel algebraisch. Hierbei ist zwar R_0 in K wie angegeben maximal, aber nicht notwendig entsprechend auch \mathfrak{K}_0 in \mathfrak{K} , d. h. es kann sein, daß es in \mathfrak{K} echte Erweiterungskörper \mathfrak{K}'_0 von \mathfrak{K}_0 gibt, für die in K ebenfalls ein körperisomorphes Repräsentantensystem R'_0 existiert. Letzteres ist jedoch nicht der Fall, wenn jeder Teilkörper von \mathfrak{K} höchstens ein körperisomorphes Repräsentantensystem in K besitzt. Fall (II). In K^\times existiert eine maximale Untergruppe R_0^\times mit der Eigenschaft, gruppenisomorphes Repräsentantensystem einer Untergruppe \mathfrak{K}_0^\times von \mathfrak{K}^\times zu sein und die Elemente von $\mathfrak{K}^\times/\mathfrak{K}_0^\times$ haben p -Potenzordnung. — Analog wie vorher ist ferner auch \mathfrak{K}_0^\times in \mathfrak{K}^\times maximal, wenn jede Untergruppe von \mathfrak{K}^\times höchstens ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem in K^\times besitzt. — Unter der Voraussetzung, daß \mathfrak{K} vollkommen von Primzahlcharakteristik p ist, werden für die dann verbleibenden beiden Fälle folgende beiden Sätze bewiesen: Fall (Ib). 1. In K existiert ein maximaler vollkommener Teilkörper R_1 mit der Eigenschaft, körperisomorphes Repräsentantensystem eines Teilkörpers \mathfrak{K}_1 von \mathfrak{K} zu sein, und es ist \mathfrak{K}_1 in \mathfrak{K} algebraisch-abgeschlossen. — Ist speziell \mathfrak{K} absolut-algebraisch, so enthält demnach K ein körperisomorphes Repräsentantensystem R von \mathfrak{K} . 2. In K existiert dann und nur dann ein körperisomorphes Repräsentantensystem R von \mathfrak{K} , wenn für jede Restklasse c

aus \mathfrak{K} der Durchschnitt $\bigcap_{v=0}^{\infty} \mathfrak{M}_v(c)$ nicht leer ist. — Dabei bedeutet $\mathfrak{M}_v(c)$ die Menge aller c^{p^v}

mit c_v aus $c^{p^{-v}}$. Fall (II). 1. In K^\times existiert eine maximale Untergruppe R_1^\times mit $R_1^\times = (R_1^\times)^p$ und der Eigenschaft, gruppenisomorphes Repräsentantensystem einer Untergruppe \mathfrak{K}_1^\times von \mathfrak{K}^\times zu sein, und $\mathfrak{K}^\times/\mathfrak{K}_1^\times$ besitzt kein Element $\neq 1$ von endlicher Ordnung. — Ist speziell \mathfrak{K} absolut-algebraisch, so enthält demnach K^\times ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem R^\times von \mathfrak{K}^\times . 2. In K^\times existiert dann und nur dann ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem R^\times von \mathfrak{K}^\times , wenn für jede Restklasse c aus \mathfrak{K}^\times und jedes $v \geq 0$ ein Vertreter c_v aus $c^{p^{-v}}$ derart wählbar ist, daß die Relationenkette $c_v = c_{v+1}^p$ besteht. — Aus diesem letzteren Satz werden für den Fall (II) mit vollkommenem \mathfrak{K} von Primzahlcharakteristik p noch folgende beiden Tatsachen gefolgert: a) Enthält K^\times keine primitive p -te Einheitswurzel, und ist für jede Rest-

klasse c aus \mathfrak{K}^\times der Durchschnitt $\bigcap_{v=0}^{\infty} \mathfrak{M}_v(c)$ nicht leer, so existiert in K^\times ein gruppeniso-

morphes Repräsentantensystem R^\times von \mathfrak{K}^\times . b) Besteht $\bigcap_{v=0}^{\infty} \mathfrak{M}_v(c)$ durchweg aus genau

einem Element, so existiert in K^\times genau ein gruppenisomorphes Repräsentantensystem R^\times von \mathfrak{K}^\times . — Verf. ordnet die für den diskreten Fall bekannten Sätze den vorstehenden allgemeinen Ergebnissen unter und gibt zum Schluß für den Fall (Ib) noch ein Beispiel mit vollkommenem Restklassenkörper \mathfrak{K} , bei dem K kein körperisomorphes Repräsentantensystem von \mathfrak{K} enthält.

H. Hasse.

Cohn, Richard M.: On extensions of difference fields and the resolvents of prime difference ideals. Proc. Amer. math. Soc. 3, 178—182 (1952).

Verf. beweist eine Parallele zu dem Satz, daß jede endlich-algebraische Er-

weiterung eines Körpers der Charakteristik Null eine einfache Erweiterung ist: \mathfrak{F} sei ein aperiodischer Differenzenkörper der Charakteristik Null. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ seien n Elemente einer gemeinsamen Erweiterung von \mathfrak{F} , die über \mathfrak{F} transformationsalgebraisch sind. Dann gibt es in dem Differenzenkörper $\mathfrak{F}\langle\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle$ ein Element β und eine ganze Zahl t derart, daß die t -te Transformierte eines jeden Elementes aus $\mathfrak{F}\langle\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle$ in $\mathfrak{F}\langle\beta\rangle$ liegt. Dabei heißt \mathfrak{F} ein aperiodischer Differenzenkörper, wenn es zu jeder ganzen Zahl n mindestens ein Element $\alpha \in \mathfrak{F}$ gibt, dessen n -te Transformierte nicht mit α übereinstimmt. Beim Beweis wird wesentlich auf die Ergebnisse von Cohn (dies. Zbl. 31, 304) Bezug genommen. Den Abschluß bildet ein Satz über Resolventensysteme für Prim-Differenzenideale.

H.-J. Kowalsky.

Flanders, Harley: Elementary proof of a norm theorem. Proc. Amer. math. Soc. 3, 196 (1952).

Es sei K/k ein zyklischer Körper vom Grade m n und F ein Zwischenkörper mit $(K:F) = m$. Ist $a^m = N_{K/k} A$, $a \in k$, $a \neq 0$, so ist bekanntlich $a = N_{F/k} B$ für ein $B \in F$. Mit Hilfe des Hilbertschen Normensatzes gibt Verf. einen elementären Beweis des obigen Satzes.

Asano.

Overholtzer, Gordon: Sum functions in elementary p -adic analysis. Amer. J. Math. 74, 332—346 (1952).

In der vorliegenden Arbeit wird die p -adische Analysis untersucht. Es sei $g(x)$ eine für die p -adische ganze Zahl x definierte Funktion und sei $S[i_0(p^e), n, g] = \sum_{0 \leq i < n, i \equiv i_0(p^e)} g(i)$, $D[i_0(p^e), n, g] = S[i_0(p^e), n, g] \cdot n$. Ein Ausdruck der Schurschen Derivierten für $S[i_0(p^e), n, g]$ wird gegeben. Dabei wird unter Schurscher Derivierte der Folge $\{a_n\}$ die Folge $\{\Delta^m a_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) verstanden, wo $\Delta^m a_n = (\Delta^{m-1} a_{n+1} - \Delta^{m-1} a_n)/p^{n+1}$ ist. Verf. beweist dann, daß, wenn $g(i_0 + p^e y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ für alle p -adischen ganzen Zahlen y konvergiert,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D[i_0(p^e), p^n, g] = p^{-e} \left[a_0 - \frac{1}{2} a_1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{2\mu} (-1)^{\mu} B_{\mu} \right]$$

gilt, wo B_{μ} die μ -te Bernoullische Zahl bedeutet. Dies wird auf die speziellen Funktionen $\exp x$, $\log x$ angewandt. Dabei wird als Analogon der asymptotischen Stirlingschen Reihe für die klassische Γ -Funktion die p -adische γ -Funktion eingeführt. Für natürliche n soll nämlich $\Gamma_p(n+1) = (n p + 1) \Gamma_p(n)$, $\Gamma_p(1) = 1$ für $p \neq 2$ und $\Gamma_2(n+1) = (4n+1) \Gamma_2(n)$, $\Gamma_2(1) = 1$ sein. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\Gamma_p(n)$ wird diese Funktion auf alle p -adischen ganzen Zahlen x verallgemeinert. Ein Teil dieser Resultate wird auch verallgemeinert auf die Summe des verallgemeinerten Repräsentantensystems r_i statt der obigen i . Damit wird die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Lösung der Differenzengleichung $f(x+1) - f(x) = g(x)$ im p -adischen Körper untersucht.

S. Kuroda.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Skolem, Th.: A remark on algebraic numbers. Norsk mat. Tidsskr. 34, 14—17 (1952).

The author proves: Let $f(x)$ be the polynomial in R (the field of rational numbers) of lowest degree such that $f(\alpha) = 0$, and let $g(x)$ be any polynomial in R . Then a number β in $R(\alpha)$ exists such that $g(\beta) = \alpha$, if and only if the polynomial $f(g(x))$ possesses in R an irreducible divisor of the same degree as $f(x)$. Examples are given such that $\alpha = \beta^2$ (in cubic fields) and $\alpha = \beta^3$ in a quadratic field.

Z. Suetuna.

Inaba, Eizi: On the imbedding problem of normal algebraic number fields. Nagoya math. J. 4, 55—61 (1952).

It is a well known long standing problem in the field of Galois theory, whether there exist

normal extensions K with preassigned Galois group over every algebraic number field k or not. This problem is usually attacked by solving certain imbedding problem. By this we mean the question, under what conditions a normal extension K with the Galois group G can be imbedded in a normal extension L over k with preassigned Galois group G . Let H be the subgroup of G corresponding to K . We call G an extension of $H \simeq \bar{H}$ by G . R. Brauer (1932) connected the imbedding problem with the splitting of some algebra over k . H. Richter (1935) reduced the imbedding problem with abelian G and H to the local problem. E. Witt (1936) solved completely the existence problem of normal extensions over the field k of characteristic p with a preassigned p -group as Galois group. R. Scholz (1937), H. Reichardt (1937) and T. Tannaka (1936, 1937) solved the existence problem for normal extension with a p -group or „zweistufig“ metabelian group as Galois group. In their investigation the imbedding problem with G a p -group and H a cyclic group of order p plays the central rôle. In the present note the author deals with the imbedding problem with H abelian of type (p, \dots, p) . His final aim is to make this investigation to be available for the construction of normal extensions with solvable groups. Let S be a p -Sylow subgroup of G and G acts on H irreducibly, that is to say the transformations $\wedge(s): h \rightarrow g_s h g_s^{-1}$ ($h \in H, s \in G, g_s$ being representants of G/H) constitute an irreducible representation of G . In this case the extension G is called irreducible. The author reduced the irreducible extensions G with invariant S to some normal (by him regular) case. Then the corresponding imbedding problem over the base field containing a primitive p -th root of unity is connected with the splitting of a certain factor set with respect to S and K . T. Tannaka.

Cohen, Eckford: Rings of arithmetic functions. Duke math. J. 19, 115—129 (1952).

Cohen, Eckford: Sur les fonctions arithmétiques relatives aux corps algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 787—788 (1952).

The papers treat the representation of a particular Abelian group of finite order. Let F be a finite extension of the rational field and let A be an integral ideal of F . Let K be a field of characteristic zero containing all roots of unity. A function is called arithmetic, if it is defined on the Abelian group formed by the residue classes, mod A , and its values are taken from K . Two functions f and g are called orthogonal, if $\sum_{\xi} f(\xi) g(\xi) = 0$. Let D be the different of the field F and

ζ be an element of F such that the principal ideal (ζ) can be expressed as $B/A D$, where $(A, B) = 1$. We define $\varepsilon_{\mu}(\beta) = e^{2\pi i \sigma(\beta \mu \zeta)}$, where $\sigma(\alpha)$ denotes the trace of an algebraic integer α . It is known that the functions $\varepsilon_{\mu}(\beta)$, $\mu \in F$, form a complete orthogonal system. More precisely $\sum_{\gamma} \varepsilon_{\mu}(\gamma) \varepsilon_{\mu'}(\gamma) = N(A) \delta_{\mu\mu'}$, where $\delta_{\mu\mu'}$ is Kronecker delta. Moreover, every arithmetic function has a unique Fourier expansion

$f(\beta) = \sum_{\mu} a_{\mu} \varepsilon_{\mu}(\beta)$, where $a_{\mu} = \frac{1}{N(A)} \sum_{\xi} f(\xi) \overline{\varepsilon_{\mu}(\xi)}$. Next the author defines Faltung

and some applications to the problems about congruences are obtained. The results seem to be familiar to the workers on this field, but the reviewer could not give an exact reference. A theorem about the structure of the algebra formed by the arithmetic functions is obtained and it is a consequence of the structure of the group algebra of an abelian group of finite order. L. K. Hua.

• Hasse, Helmut: Über die Klassenzahl Abelscher Zahlkörper. (Mathematische Lehrbücher und Monographien. Band I.) Berlin: Akademie-Verlag 1952. IX, 190 S. DM 27.—.

Die Klassenkörpertheorie, die die Entwicklung der Theorie der relativ-abelschen Zahlkörper zu voller Allgemeinheit und Durchsichtigkeit ermöglicht hat, subsummiert prinzipiell als ihre Spezialfälle fast ohne Ausnahme die Theorie der algebraischen Zahlkörper aller derjenigen speziellen Typen, welche in der vorklassenkörpertheoretischen Epoche das Interesse des Zahlentheoretikers erregte. Doch von der bis in alle Einzelheiten durchdringenden, auch mit der Aktivität der Durchführung der Zahlenbeispiele versehenen Beherrschung solcher speziellen Zahlkörper sind wir heute allerdings, bis auf den quadratischen Fall, weit entfernt. Verf. erblickt hierin einen wesentlichen Mangel der heutigen Entwicklungslage der Zahlentheorie und greift die absolut-abelschen Zahlkörper, insbesondere ihre Klassenzahl, erneut auf. — Es sei K ein beliebiger absolut-abelscher Zahlkörper, welcher der Kongruenzklassengruppe H mit dem Führer f zugeordnet ist, und sei K_0 sein größter reeller Teilkörper. Der Quotient $h^* = h/h_0$ der Klassenzahlen h von K und h_0 von K_0 wird Relativklassenzahl von K/K_0 genannt. Verf. bietet dann

zuerst die Klassenzahlformel in der folgenden abgerundeten, sinngemäßen Form dar:

$$(1) \quad h_0 R_0 = \prod_{\chi_0 \neq 1} \sum_{\pm x \bmod f(\chi_0)} (-\chi_0(x) \log |1 - \zeta_{f(\chi_0)}^x|),$$

$$(2) \quad h^* = \frac{h}{h_0} = Q w \prod_{\chi_1} (2 f(\chi_1))^{-1} \sum_{\pm x \bmod f(\chi_1)}^+ (-\chi_1(x) x).$$

Dabei sind χ die Charaktere der Kongruenzklassengruppe nach H mit dem Führer $f(\chi)$, von denen $\chi_0(-1) = 1$ und $\chi_1(-1) = -1$ sind. Es bedeute ζ_m , ebenso wie im folgenden, die m -te Einheitswurzel mit kleinstem positiven Argument; $\sum_{\pm x \bmod m}^+$ die Summation über irgendein

primales Halbsystem $x \bmod m$ und $\sum_{x \bmod m}^+$ die über das kleinste positive prime Restsystem

$x \bmod m$. $Q = [\varepsilon : \zeta \varepsilon_0]$, wo $\varepsilon, \varepsilon_0$ die Einheiten von K bzw. K_0 und ζ die Einheitswurzeln aus K sind. R_0 bedeutet den Regulator von K_0 ; w die Anzahl der Einheitswurzeln in K . — Des Verf. Untersuchung besteht wesentlich darin, daß er die Umformung dieser Formeln soweit ausführt, daß man einmal den in dieser Formel verborgenen, arithmetischen Sinn möglichst klar gewahren kann und dann die numerische Ausrechnung der Relativklassenzahlen h^* möglichst schnell vollziehen kann. — Für reelle abelsche Körper $K = K_0$ liefert die Formel (1) die Klassenzahl $h = h_0$ von K . Es sei $g_K = \prod_{p|d} n_p$, wenn für jeden Primteiler p der Diskriminante d von K $p \nmid \mathfrak{p}^{n_p}$ gilt, sonst sei $g_K = 0$. Dann gilt der Satz: $g_K h R$ ist gleich dem Regulator $R(I_S)$

des Systems der „Kreiseinheiten“ η_s^* von K^* . Dabei ist $\eta_s = \prod_{\substack{a \bmod f \\ a \text{ in } H}} \frac{\zeta_{2f}^{sa} - \zeta_{2f}^{-sa}}{\zeta_{2f}^{sa} - \zeta_{2f}^{-sa}}$, wo $(s, 2f) = 1$

und S der durch die Substitution $\zeta_{2f} \rightarrow \zeta_{2f}^s$ im Teilkörper K von $P_{2f} = P(\zeta_{2f})$ induzierte Automorphismus ist. Unter den Folgerungen aus diesem Satz interessiert insbesondere die Verallgemeinerung und der durchsichtige Beweis des Satzes von Weber, der besagt, daß die Klassenzahl der größten reellen Teilkörper der Kreiskörper P_{2^v} ungerade ist. — Für reelle K gibt Verf. noch eine andere Umformung von (1) und erhält insbesondere den Satz: Die Klassenzahl eines beliebigen reellen zyklischen Körpers ist gleich dem Index der aus gewissen Kreiseinheiten erzeugten Gruppe. Bei dieser Umformung bedient Verf. sich einer auch an sich interessanten verallgemeinerten Gruppenmatrix und ihrer Linearfaktorzerlegung. Wenn man den arithmetischen Sinn der obigen, in Klassenzahl und Einheitenindex steckenden wunderschönen Sätze des Verf. vollständig erschöpfen könnte, so würde das geheimnisvolle Problem über die Beziehung zwischen Divisorenklassen- und Einheitsengruppe erhell werden. — Für die imaginären abelschen Zahlkörper K beginnt Verf. mit dem klassenkörpertheoretischen Nachweis der Ganzzahligkeit der Relativklassenzahl $h^* = h/h_0$ und wendet sich der Untersuchung relativquadratischer Körper K/K_0 zu. Dabei ergibt sich, daß die Zahl h^* die Ordnung der Gruppe H^* derjenigen Klassen von K ist, deren Relativnormen in die Hauptklasse von K_0 fallen, und daß h^* durch den Index 2^v des Hauptgeschlechts in der Gruppe H^* teilbar ist. — Dann gibt Verf. zur Untersuchung des Einheitenindex Q in der Formel (2) einen verhältnismäßig größeren Raum. Es ergibt sich leicht, daß dann und nur dann $Q = 2$, sonst $Q = 1$, ist, wenn $2^{\omega(w+1)} | K' = K \cdot P_{2^{\omega+1}}$

$K'_0 = K_0(\sqrt{\varepsilon})$ mit einer Einheit ε aus K_0 ist. Dies Kriterium läßt sich endgültig durch die Eigenschaft der Führer der Charaktere der Gruppe nach H ausdrücken. Der Beweisgang ist zahlen-theoretisch höchst interessant, weil darin die inneren Verhältnisse der Verzweigung der Diskriminantenprimteiler und der Verlagerung der Divisoren hineintreten, was für die Relativbetrachtung der Einheiten wesentlich ist. Aus dem obigen Charakterenkriterium ergibt sich z. B., daß für imaginäre abelsche Zahlkörper vom Primzahlpotenzführer oder für imaginäre zyklische Körper $Q = 1$ ist. — Verf. gibt dann auch einen direkten Ganzheitsbeweis von h^* . Dazu wird die Frobeniussche Abteiler der Charaktere χ_1 gebraucht. Es durchlaufe nämlich ψ ein Vertretersystem der Abteilungen der χ_1 und bezeichne N_ψ die Normbildung im Kreiskörper, dem ψ angehört. Dann ergibt sich

$$h^* = Q w \prod_{\psi} N_\psi (\Theta(\psi)),$$

$$\Theta(\psi) = \frac{1}{2} \sum_{\pm x \bmod f(\psi)}^+ \psi(x) + \frac{1}{f(\psi)} \sum_{\pm x \bmod f(\psi)}^+ (-\psi(x) x).$$

Diese Formel wird auch zur wirklichen Berechnung von h^* benutzt. Zum Ganzheitsbeweis von h^* kommt es nur auf die formalen Nenner 2 und $f(\psi)$ an. Indem Verf., von der Fallunterscheidung der Charaktere ψ durch seinen Führer und seine Ordnung geleitet, die Beiträge zu h^* aus einzelner ψ näher untersucht, gelangt er zu seinem Ziel. Der beim Beweisgang auftretende, dem Gaußschen Lemma aus der Theorie der quadratischen Reste ähnliche Hilfssatz ist an sich sehr interessant. Er besagt nämlich: Für eine natürliche Zahl $m \neq 1, 2$ und eine nicht in m aufgehende Primzahl $p \neq 2$ sei N die Anzahl der Lösungen von $x/m < y/p$ mit x, y

aus den kleinsten positiven primen Halbsystemen mod. m, p . Ist m zusammengesetzt, so ist N gerade. Ist $m = q^p$ Primzahlpotenz, so ist $(-1)^N = \left(\frac{q}{p}\right)$. Der Rest der Arbeit ist der Untersuchung der Kreiskörper P_{2^e}, P_{3^e} und ihrer größten reellen Teilkörper, der Teilbarkeits-eigenschaft der Relativklassenzahlen der Teilkörper, sowie der Klassenzahlen imaginärer abelscher Zahlkörper usw. gewidmet. — Das Buch enthält als Anhang eine Tafel der Relativklassenzahlbeiträge $N_\psi(\Theta(\psi))$ für alle Charaktere ψ mit $\psi(-1) = -1$, deren Führer ≤ 100 sind, und eine Tafel der Relativklassenzahlen h^* von K/K_0 mit Hasseschen Diagrammen der Teilkörper von K für alle absolut-abelsche Zahlkörper mit Führern ≤ 100 . Diese Tafeln werden sicherlich ein unentbehrliches Hilfsmittel für nach Auffindung neuer Gesetzmäßigkeiten auf experimentellem Wege strebende Zahlentheoretiker liefern. — Auf diese Weise ist der größte Teil der von Kummer und Weber nur in den Spezialfällen der Kreiskörper P_p erreichten Leistungen verallgemeinert zur Theorie der beliebigen absolut-abelschen Zahlkörper. Dieselbe liegt nun, wie die Theorie der quadratischen Zahlkörper, mit ihren tieferen Einzelheiten vor uns. Dies Buch macht für künftige Forscher ein harmonisches Trio mit dem Hilbertschen Zahlbericht und des Verfs. Klassenkörperbericht aus.

S. Kuroda.

Nakayama, Tadasu: Note on an ordering theorem for subfields. Nagoya math. J. 4, 125—129 (1952).

Let $H(K/k) = \{\xi \in K; N_{K/k}(\xi) = 1\}$ be the element group associated to every finite extension K/k . Tannaka has obtained the following ordering theorem, dually to the ordinary ordering theorem in the local class field theory (this Zbl. 44, 267). Let K/k_1 and K/k_2 be relative abelian p -adic number fields then $H(k_1/K) \subset H(k_2/K)$ implies $k_1 \supset k_2$. The author of the present note deals with some generalizations and analogy of above ordering theorem. He first treats the case of abstract, in general even non-normal extensions. For the field K which contains two subfields k_1, k_2 so that K is finite and separable over $k_1 \cap k_2$, he proves that $k_1 \not\subset k_2$ implies $H_1 = H(k_1/K) \not\subset H_2 = H(k_2/K)$. More precisely, provided that K has infinitely many elements, the index $(H_1 H_2 : H_1)$ is then infinite and, moreover the orders of elements of $H_1 H_2 / H_1$ are not bounded. Similar theorem for multiplicative groups of idèles or idèle-classes in place of multiplicative groups of field elements is also obtained, K being an algebraic number field. Further these results are interpreted in terms of the full abelian extensions A_1, A_2 of k_1, k_2 . He proves for instance, for the case of p -adic number fields, that $k_1 \not\subset k_2$ implies $A_1 \not\subset K A_2$, and there exists a field X between $K A_1 A_2$ and K_2 such that the (com-pact) Galois group of $K A_1 A_2 / X$ is homeomorphically isomorphic to the additive group of p -adic integers.

T. Tannaka.

Lang, Serge: On quasi algebraic closure. Ann. of Math., II. Ser. 55, 373—390 (1952).

A field F is called to be C_i if every form in F of degree d in n variables with $n > d^i$ has a non trivial zero in F . A C_0 field ($n = d$) is algebraically closed and a C_1 field is quasi algebraically closed (Artin). The author proves: Let F be C_i and suppose F admits at least one normic form of order i , which is a form in F with $n = d^i$ having only the trivial zero in F . Then any finite extension of F is also C_i . If now F be a function field in k variables over a C_i constant field with a normic form of order i , then F is C_{i+k} . If F be a field complete under a discrete valuation with algebraically closed residue class field, then F is C_1 , from which is deduced that some fields are really C_1 , for example: The maximal unramified extension of a field complete under a discrete valuation with perfect residue class field is C_1 (Artin's conjecture). — Applying these results to class field theory, the author proves: Let F be any field and let Ω be an extension of F which is C_1 . Then every cocycle is split by a finite subfield of Ω . If now F be complete under a discrete valuation with finite residue class field, then $H^2(F)$ (the second cohomology group) is isomorphic with the rationals (mod 1). Then any cocycle of exponent n is split by any field of degree n over F (Chevalley). In case of function fields it is proved: If F be a function field of one variable over a constant field, then every cocycle has a splitting field which is a finite extension of the constant field. It seems not easy, to extend local arithmetic results to a number field in the large.

Z. Suciuna.

Whaples, George: A theorem on cyclic algebras. Ann. of Math., II. Ser. 55, 367—372 (1952).

Introducing (continuous) characters over a field k and sets of simple algebras constructed with these characters, the author proves the following theorem, which

is well known in the local class field theory, when k is restricted to be a p -adic field: $(C_1 L/L, \sigma_1^1, A_1) \sim (C_2 L/L, \sigma_2^1, A_2)$ implies $(C_1/k, \sigma_1, N_{L/k} A_1) \sim (C_2/k, \sigma_2, N_{L/k} A_2)$, whenever C_i/k are cyclic, L/k separable algebraic, σ_i and σ_i^1 generating automorphisms for C_i/k and $C_i L/L$ respectively, and $A_i \in L$. Z. Suetuna.

Beatty, S. and N. D. Lane: A symmetric proof of the Riemann-Roch theorem, and a new form of the unit theorem. Canadian J. Math. 4, 136—148 (1952).

A proof of the Riemann-Roch theorem for the classical case and several remarks concerning the theorem are given. Let u be the algebraic function of degree n with z as the independent variable. As the Riemann-Roch theorem the author adopt the form $N((\tau)) + \frac{1}{2} \sum \Sigma \tau \nu = N((\bar{\tau})) + \frac{1}{2} \sum \Sigma \bar{\tau} \nu$. By an order basis $((\tau))$ or a divisor A , we understand a system of individual orders τ referring respectively to given u -branches at given z -values. τ is a multiple of $1/\nu$, where ν is the order of the u -branch, and only a finite number of τ are different from zero. $N((\tau))$ is $\dim(A^{-1})$ in the usual notation. Order bases $((\tau))$ and $((\bar{\tau}))$ are said to be complementary, to the level of a rational function $S(z, u)$ with the order basis $((\tau))$, provided $\tau + \bar{\tau} = \sigma - 1 + 1/\nu$ for all u -branches at all finite z -values, while $\tau + \bar{\tau} = \sigma + 1 + 1/\nu$ for all u -branches at the infinite z -value. In the notation of divisor this means $A = A^{-1}(S(z, u)W^{-1}$ (W differential divisor), instead of usual $A = A^{-1}(S(z, u))W$. Double Summation $\sum \Sigma$ extends first over u -branches with fixed z , and then over z -values. The author denotes left hand side of the required equality by $RR((\tau))$ and calls it the Riemann-Roch expression for the order basis $((\tau))$. He shows first the existence of order basis $((t))$ with $N((t)) = N((\bar{t})) = 0$ and $RR((t)) - RR((\bar{t})) = RR((\tau)) - RR((\bar{\tau}))$. Let (τ) be the part of $((\tau))$ that refers to the individual z -value $z = a$, and let the polynomials in u of degree i $w_i(z, u) = u^i/(z - a)^{\alpha_i} + \dots$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) be a local function basis for all the rational functions of (z, u) with orders equal to or greater than τ , for $z = a$. He then proves $N((\tau)) \geq n + \sum \Sigma \alpha$. From this and an equality in a previous note of him we have $RR((t)) = RR((\bar{t}))$, and hence $RR((\tau)) = RR((\bar{\tau}))$. T. Tannaka.

Hasse, Helmut: Rein-arithmetischer Beweis des Siegelschen Endlichkeitssatzes für binäre diophantische Gleichungen im Spezialfall des Geschlechts 1. Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1951, Nr. 2, 19 S. (1952).

C. L. Siegel bewies den Satz (1929): Jede irreduzible binäre diophantische Gleichung $f(x, y) = 0$ eines Geschlechtes $g \geq 1$ mit Koeffizienten aus einem endlich-algebraischen Zahlkörper Ω besitzt höchstens endlich viele Lösungen $(x, y) \rightarrow (a, b)$ in ganzen Zahlen a, b aus Ω . Der Siegelsche Beweis macht weitgehenden Gebrauch von der Theorie der abelschen Funktionen und ihrer Darstellungen durch Theta-funktionen. Verf. erledigt nun diesen Satz rein-arithmetisch im Spezialfalle $g = 1$ als Vorbild für einen ebensolchen Beweis im allgemeinen Falle. — Zum Beweis ordnet Verf. den Siegelschen Satz einer divisorentheoretischen Behauptung unter. Um den Beweis somit auszuführen, spielen zwei Dinge eine wichtige Rolle, nämlich der Thue-Siegelsche Satz über die Approximation einer algebraischen Zahl durch eine Folge algebraischer Zahlen aus Ω und die Weilsche Distributionenlehre, die zum Beweis seines Endlichkeitssatzes für den Ring des Moduls der g -gliedrigen über Ω rationalen Punktgruppen der durch $f(x, y) = 0$ definierten Kurve geschaffen wurde und deren Spezialfall $g = 1$ Verf. schon in einer für den vorliegenden Zweck bequemen Form dargestellt hat (dies. Zbl. 28, 341). Z. Suetuna.

Weil, André: Criteria for linear equivalence. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 258—260 (1952).

Es handelt sich um eine Übertragung und Verallgemeinerung einiger wichtiger Äquivalenzkriterien von Severi auf beliebige normale Mannigfaltigkeiten in einem projektiven Raum, wobei zum Teil Resultate des Verf. aus seiner großen Arbeit „Variétés abéliennes et courbes algébriques“ (dies. Zbl. 37, 162) ausgenutzt werden. Beweise werden hier allerdings nicht gegeben und ihre Veröffentlichung auf einen späteren Zeitpunkt verschoben. — Zugrunde gelegt wird eine algebraische Mannigfaltigkeit V^n ohne mehrfache Teilmannigfaltigkeiten der Dimension $n-1$, welche in einem projektiven Raum P^N mit minimaler Dimension N eingebettet sei; k_0 sei der kleinste Körper, über dem V rational ist. Es werden fünf hinreichende Bedingungen für lineare Äquivalenz (in Zeichen: \sim) von Divisoren X auf V angegeben. Diese Bedingungen werden formuliert als Äquivalenzbedingungen für gewisse Vergleichsdivisoren, die als Durchschnitte $X \cdot Y$ der X mit einer gewissen hinreichend allgemeinen Teilmannigfaltigkeit Y von V angesetzt werden; ihre Bedeutung liegt daher im wesentlichen in der Reduk-

tion von Äquivalenzproblemen auf niederdimensionale und im allgemeinen einfacher zu übersehende Probleme derselben Art. — Um die ersten beiden Kriterien formulieren zu können, bezeichne man mit k einen k_0 umfassenden Körper, in welchem der zu untersuchende Divisor X rational ist. Im ersten Kriterium wird $Y = \bar{V} \cdot H$ gleich dem Durchschnitt von V mit einer über k allgemeinen Hyperebene H^{N-1} von P^N gesetzt, das Kriterium besagt dann, daß aus $X \cdot Y \sim 0$ auf Y die Äquivalenz $X \sim 0$ auf V folgt. Im zweiten Kriterium wird Y als eine über k allgemeine Kurve auf V gewählt, d. h. als Durchschnitt von V mit einem linearen, über k allgemeinen linearen Teilraum L^{N-n+1} von P^N . Es lautet dann so: Ist $X \cdot Y \sim 0$ auf Y , so gehört X bis auf lineare Äquivalenz einem allein durch V bestimmten endlich-erzeugbaren Modul \mathfrak{D} von über k_0 rationalen Divisoren an; X ist also einer ganzrationalen Linearkombination von erzeugenden Divisoren D_i aus \mathfrak{D} linear äquivalent. Über die Konstruktion der D_i (und von \mathfrak{D}) wird nichts ausgesagt; hier bleiben die Beweise abzuwarten. — Die weiteren drei Kriterien unterscheiden sich von den ersten beiden einmal dadurch, daß in ihnen Y unabhängig von dem zu untersuchenden Divisor X gewählt wird, nämlich als eine über k_0 allgemeine Kurve C auf V . Außerdem spielt bei ihnen der Begriff der algebraischen Äquivalenz von Divisoren auf V eine Rolle, welcher vom Verf. folgendermaßen gefaßt wird: Es sei Z ein Divisor eines direkten Produkts $V \times W$ von V mit einer abstrakten Mannigfaltigkeit W ; für einen einfachen Punkt M von W wird dann der Divisor $Z(M)$ auf V definiert durch $Z \cdot (V \times M) = Z(M) \times M$. (Diese Bildung ist natürlich nur für solche M möglich und sinnvoll, für die das erste Produkt erklärt ist). Die Divisoren der Form $Z(M) - Z(N)$ heißen dann algebraisch zu 0 äquivalent; sie bilden nach den Worten des Verf. eine Gruppe, und außerdem kann man sich bei ihrer Bildung auf Kurven Γ statt auf allgemeine Mannigfaltigkeiten W beschränken. Lineare Äquivalenz hat algebraische Äquivalenz zur Folge, aber nicht umgekehrt. — Zur Formulierung der weiteren Äquivalenzkriterien bezeichne man mit f eine Funktion auf V mit Werten aus einer Abelschen Mannigfaltigkeit A (im Sinne der oben zitierten Arbeit des Verf.); $f(X \cdot C)$ ist dann ein aus Punkten von A zusammengesetzter Zyklus, und Verf. bezeichnet mit $Sf(X \cdot C)$ die in A ausgeführte Summe der betr. Punkte. Drittes Kriterium: Ist X algebraisch zu 0 äquivalent auf V , und ist $Sf(X \cdot C) = 0$ für jede Funktion f auf V mit Werten aus einer Abelschen Mannigfaltigkeit, so besitzt X bis auf lineare Äquivalenz eine endliche Ordnung, d. h. es ist $mX \sim 0$ auf V mit geeignetem natürlichen $m \neq 0$. Hierbei muß natürlich das Produkt $X \cdot C$ erklärt sein, jedoch ist zu erwähnen, daß dann die Bildung $Sf(X \cdot C)$ unabhängig ist von der Wahl von C . — Viertes Kriterium: Sei Z wie oben ein Divisor von $V \times W$. Wenn dann für jede Funktion f von V mit Werten in einer Abelschen Mannigfaltigkeit A die durch $g(M) = Sf(Z(M))$ definierte Abbildung von W in A konstant ist, so sind die Divisoren der Form $Z(M)$ alle zueinander äquivalent. — Fünftes Kriterium: Wenn X auf V algebraisch zu 0 äquivalent ist, und wenn $X \cdot C$ erklärt und ~ 0 auf C ist, so ist $X \sim 0$ auf V .

P. Roquette.

Zahlentheorie:

Elkin, J. M.: A general rule for divisibility based on the decimal expansion of the reciprocal of the divisor. Amer. math. Monthly 59, 316–318 (1952).

Herleitung einer Regel für die Teilbarkeit von N durch n aus $N = N' \pmod{n}$; $N' < N$ wird dabei erhalten mit Hilfe der Dezimalbruchentwicklung von $1/n$. Sonderfälle und Beispiele. Druckfehler: Zeile 9 muß es $p + 1$ heißen statt $p - 1$.

H.-J. Kanold.

Thébault, Victor: Questions d'arithmétique. Mathesis 61, 32–37 (1952).

Venkataraman, C. S.: On the equation $\Phi(x) = k_1! k_2! \dots k_r!$ Math. Student 19, 128–129 (1952).

Kale, M. N.: On the solution of the Diophantine equation $x^m = N$. Math. Student 19, 136–137 (1952).

Moessner, Alfred: Magic squares. Math. Student 19, 124–126 (1952).

Moessner, Alfred: Alcuni problemi diofantei elementari. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 185–187 (1952).

Moessner, Alfred: On the multiple identity $x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n + x_5^n = y_1^n + y_2^n + y_3^n + y_4^n + y_5^n$ for $n = 1, 3, 5, 7$. Scripta math. 18, 90–91 (1952).

Gloden, A.: Notes on Diophantine equations. Scripta math. 18, 87–89 (1952).

Verschiedene Bemerkungen und Parameterlösungen zu den Diophantischen Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $A(x^2 + y^2 + z^2) = B(xy + xz + yz)$,

$$(r^4 + s^4)x^4 - y^4 = z^2 \text{ und } (r^4 - s^4)x^4 + y^4 = z^2.$$

H.-E. Richert.

Alef: Über eine diophantische Gleichung. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 12, 3—8 (1952) [Spanisch].

A. Moessner hatte 1939 die Aufgabe gestellt, solche ganzen x, y, z zu finden, daß x^3, z^2, y^3 eine arithmetische Reihe bilden. Verf. löst sie durch die parametrischen Darstellungen

$$(1) \quad x = 2^{2\alpha} 3^{2\gamma+1} p^2 - s, \quad y = 2^{2\alpha} 3^{2\gamma+1} p^2 + s, \quad z = 2^{\alpha+\beta} 3^{\gamma+1} p q.$$

In ihnen sind α, β, γ und p willkürliche natürliche Zahlen, q und s ergeben sich aus $q = (u + v)/2^{\beta+1}$, $s = (u - v)/2$, wo u und v zwei ganze Zahlen mit dem Malwert $2^{4\alpha} 3^{4\gamma+1} p^4$ sind, beide gerade oder beide ungerade, ohne gemeinsamen ungeraden Teiler. Für $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $p = 1$ erhält man $u v = 3$, so daß man $u = 3$, $v = 1$ setzen kann; dann wird $q = 2$, $s = 1$, und (1) liefert die von Moessner angegebene Lösung $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$ seiner Aufgabe.

L. Koschmieder.

Palamà, Giuseppe: Su alcune questioni di analisi diofantea. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 11, 1—27 (1952).

Die Arbeit befaßt sich mit Systemen von mehrgradigen Gleichungen von der Art:

$$(A) \quad a_1^k + \dots + a_p^k = b_1^k + \dots + b_p^k \quad (k = 1, 2, \dots, n, n+3) \quad \text{und}$$

$$(B) \quad a_1^k + \dots + a_p^k = b_1^k + \dots + b_p^k, \quad a_1 a_2 \dots a_p = b_1 b_2 \dots b_p \quad (k = 1, \dots, n).$$

Es werden einige allgemeine Sätze aufgestellt, z. B. aus (A) folgt: $(a_1 + t)^k + \dots + (a_p + t)^k = (b_1 + t)^k + \dots + (b_p + t)^k$ ($k = 1, \dots, n, n+3$) für gewisses t . Auch einige Sätze über nicht-lösbare mehrgradige Gleichungssysteme werden gebracht. Beweise werden nicht gegeben, da sie leicht zu führen sind. Der Hauptinhalt besteht in der sehr großen Anzahl von numerischen Beispielen von mehrgradigen Gleichungen und Gleichungssystemen.

N. Hofreiter.

Ljunggren, Wilhelm: On the diophantine equation $x^2 + 4 = A y^4$. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* 24, Nr. 18, 82—84 (1952).

Ist A kein Quadrat, so hat die diophantische Gleichung $x^2 + 4 = A y^4$, ($x, 2$) = 1, höchstens eine Lösung in positiven x, y . Falls eine Lösung vorhanden ist, so kann sie nach endlich vielen Schritten ermittelt werden. Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Grundeinheit im Körper $k(\sqrt{D})$, wo $A = D \cdot a^2$, $(D, a) = 1$, D quadratfrei.

N. Hofreiter.

Skolem, Th.: A simple proof of the condition of solvability of the diophantine equation $a x^2 + b y^2 + c z^2 = 0$. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* 24, Nr. 23, 102—107 (1952).

The author proves the following theorem: If abc is squarefree, a necessary and sufficient condition for the non-trivial solvability of (1) $a x^2 + b y^2 + c z^2 = 0$ is that a, b, c are not all of the same sign and that $a x^2 + b y^2 + c z^2$ can be decomposed into a product of two linear factors mod abc . The last circumstance can also be expressed by saying that $-bc, -ca, -ab$ are quadratic residues modulus a, b, c . Use is made of the fact that the linear congruence $Ax + By + Cz \equiv 0 \pmod{m}$ is satisfied by integers x, y, z , not all zero, such that $|x| \leq P$, $|y| \leq Q$, $|z| \leq R$, where P, Q and R are positive numbers and $PQR = m$. (A. Brauer and R. L. Reynolds, this Zbl. 42, 268.) Using the Schubfachschluß in a slightly more complicated form, the author proves the existence of a solution of (1), satisfying the inequalities $|x| < 2 \sqrt{|bc|}$, $|y| < \sqrt{2} \sqrt{|ac|}$, $|z| < \sqrt{2} \sqrt{|ab|}$. These bounds are not much greater than those earlier obtained by L. Holzer (this Zbl. 37, 26). However, Skolem's method is much simpler than Holzer's.

W. Ljunggren.

Skolem, Th.: Anwendung von triadischer Analysis und „Nebenkörpern“ zum Beweis einiger Sätze über gewisse kubische unbestimmte Gleichungen. *Norsk mat. Tidsskr.* 34, 45—51 (1952) [Norwegisch].

B. Delauney and T. Nagell have proved various theorems concerning the

diophantine equations (1) $x^3 + Dy^3 = 1$ and (2) $Ax^3 + By^3 = C$ ($C = 1, 3$). Th. Skolem, in a series of papers (for instance this Zbl. 12, 13) has developed a method, the so-called p -adic method, which is the natural method of treating comprehensive classes of diophantine equations. In the present paper he obtains some of the theorems relating to (1) and (2), using only 3-adic developments. By means of his theory of „Nebenkörpern“ [Vid. Akad. Skrifter, No. 6 (1944)] the author gives a certain extension of a theorem of Nagell, concerning (2).

W. Ljunggren.

Mordell, L. J.: On cubic equations $z^2 = f(x, y)$ with an infinity of integer solutions. Proc. Amer. math. Soc. 3, 210—217 (1952).

Let $g(x, y, z)$ be a cubic polynomial in x, y, z with integer coefficients. The author conjectures that if the equation $g(x, y, z) = 0$ has one integer solution, there exists an infinity of integer solutions when $g(x, y, z) - a$ is irreducible for all constants a . A proof or disproof seems very difficult. The author has earlier proved this conjecture for some equations (this Zbl. 28, 345; 36, 162). In this paper he gives further contributions to the same subject.

W. Ljunggren.

Swinnerton-Dyer, H. P. F.: A solution of $A^5 + B^5 + C^5 = D^5 + E^5 + F^5$. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 516—518 (1952).

A solution of this equation in two parameters was given by Sastry. In the present paper the author obtains two further solutions, each in three parameters. Use is made of a general method due to Norrie, combined in each case with a special device. The author conjectures that there is a solution in four parameters.

W. Ljunggren.

Benner, Charles P.: The solution of a diophantine equation. Proc. Amer. math. Soc. 3, 41—43 (1952).

The author considers the diophantine equation (1) $\prod_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n-1} a_{ij} x_j = f(y)$, where $f(y) = f(y_1, y_2, \dots, y_a)$ is a homogeneous polynomial, with integral coefficients, of degree m , $m \not\equiv 0 \pmod{2^n}$. If the rank of the matrix of the forms $\sum_{j=1}^{2^n-1} a_{ij} x_j$ ($i = 1, 2, 3, \dots, 2^n$) is $2^n - 1$, then it is proved that every integral solution x_i, y_k of (1) for which the left-hand member does not vanish is equivalent (in a sense defined) to an explicit given solution, depending in a complicated manner on a_{ij} and upon $2^{n-1} + a$ parameters. In the case $n = 2$, solutions of (1) were given by A. A. Aucoin [Bol. mat., Buenos Aires 14, 36—39 (1941)].

W. Ljunggren.

Oblath, Richard: Eine Bemerkung über Produkte aufeinander folgender Zahlen. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 135—139 (1952).

The following theorem is proved: The diophantine equation (1) $x(x+1) \cdot (x+2)(x+3) \cdots (x+k-1) = y^n$ is impossible if $1 < k \leq 17$, $n > 1$ and $x > 0$. If one of $x+i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k-1$), is prime to the others, then (1) is impossible according to a theorem due to G. Szekeres (not published). The author indicates the proof for $n \geq k$. The impossibility of (1) in the case $k < 17$ now follows as an immediate consequence of a theorem of S. Pillai and A. Brauer [Bull. Amer. math. Soc. 47, 328—331 (1941)]. Using a result of S. Pillai, the author completes the proof by methods developed in an earlier paper [Revista mat. Hisp. Amer., IV. Ser. 2, 190—210 and 253—270 (1942)].

W. Ljunggren.

Sándor, Gyula: Über die Anzahl der Lösungen einer Kongruenz. Acta math. 87, 13—16 (1952).

Let $f(x)$ be a polynomial of degree n with integral coefficients and non-vanishing discriminant D . Let further $p^\delta \parallel D$ and p a prime. Denoting by N the number of solutions of the congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, the author proves the following theorem: If $\alpha > \delta$, then N is independent on α and $N \leq n p^{\delta/2}$.

For all $\alpha \geq 1$ we have $N \leq n p^\delta$. This sharpens a result due to T. Nagell (J. Math. pur. appl., IV. Sér. 8, 343–356 (1921)). In order to prove that $N \leq n p^{\delta/2}$ the author makes use of the theory of p -adic numbers. Otherwise his method is a refinement of that of Nagell. The estimate $N \leq n p^{\delta/2}$ is the best possible one, likewise the result $\alpha > \delta$ if p is odd.

W. Ljunggren.

Hemer, Ove: On the solvability of the Diophantine equation $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ in imaginary Euclidean quadratic fields. Ark. Mat. 2, 57–82 (1952).

Es seien a, b, c ganze Zahlen eines imaginär quadratischen Körpers $K(\sqrt{m})$, in dem der euklidische Algorithmus gilt ($m = -1, -2, -3, -7, -11$). Es sei ferner $a \cdot b \cdot c$ quadratfrei. Die Gleichung (1) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ hat dann und nur dann eigentliche ganzzahlige Lösungen in $K(\sqrt{m})$ mit $m = -1, -2, -3, -11$, wenn $-bc, -ca$ und $-ab$ quadratische Reste von a, b bzw. c sind. Ist $m = -7$, so ist diese Bedingung wohl notwendig, aber nicht hinreichend. Es muß (ähnlich wie in $K(1)$, wo a, b, c verschiedene Vorzeichen haben müssen), noch eine weitere Bedingung erfüllt sein. Analog wie in $K(1)$ wird auch hier mit der „Index“-Methode gearbeitet. Ist $N(a) \leq N(b) \leq N(c)$ ($N = \text{Norm}$), so ist der Index I von (1) $I = N(ac)$. Wesentlich im Beweis ist: Man kann von der Gleichung (1) mit hinreichend großem Index I zu einer analogen Gleichung $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ mit kleinerem Index übergehen, die gleichzeitig mit (1) lösbar oder gleichzeitig mit (1) nicht lösbar ist.

N. Hofreiter.

Faireloth, Olin B.: On the number of solutions of some general types of equations in a finite field. Canadian J. Math. 4, 343–351 (1952).

Over a finite field $F(p^n)$ the number of solutions of the equation $c_1 x_1^{m_1} + c_2 x_2^{m_2} + \dots + c_s x_s^{m_s} = c$, $c_1 \dots c_s \neq 0$, has been obtained.

L.-K. Hua.

Nagell, Trygve: Bemerkung über die diophantische Gleichung $u^2 - Dv^2 = C$. Arch. der Math. 3, 8–9 (1952).

Indicates a slight simplification of the method of an earlier note (this Zbl. 36, 303).

J. W. S. Cassels.

Nagell, Trygve: Sur le plus petit non-rest quadratique impair. Ark. Mat. 1, 573–578 (1952).

$p > 2$ sei Primzahl, ψ sei die kleinste positive ungerade Zahl, für die $(\psi/p) = -1$. Auf einem neuen elementaren Wege werden die folgenden Ergebnisse erhalten:
 $\psi \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^{1/2}$ für $p \equiv 1 \pmod{8}$; $\psi \leq (p-6)^{1/2}$ für $p \equiv -1 \pmod{8}$, $p > 23$;

$$\psi - 2 \leq (p-4)^{1/2} \text{ für } p \equiv 5 \pmod{8}.$$

In einer Schlußbemerkung wird darauf hingewiesen, daß das letzte Ergebnis verschärft werden kann zu $\psi < p^{1/2}$ für alle $p \equiv 5 \pmod{8}$, $p \neq 5, 13, 109$. Durch eine ähnliche Methode erhält man auch $\psi - 4 < p^{1/2}$ für $p \equiv 3 \pmod{8}$, $p \neq 131$. In einer Tabelle werden für alle ungeraden $p \leq 257$ die Zahlen ψ und π angegeben, wobei π die kleinste Primzahl > 2 mit $(\pi/p) = +1$ bedeutet.

H.-J. Kanold.

Nagell, Trygve: Sur les restes et les non-restes cubiques. Ark. Mat. 1, 579–586 (1952).

Jede Primzahl $p \equiv 1 \pmod{6}$ läßt sich bekanntlich darstellen in der Form $p = \frac{1}{4}(A^2 + 27B^2)$; A, B ganz, $A \equiv B \pmod{2}$. In einer früheren Arbeit des Verf. [Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo, I, No. 13 (1923)] wurde bewiesen, daß jeder Primteiler von A B kubischer Rest \pmod{p} ist. Sei nun $p > 2$, Primzahl und $\pi(p; n)$ bzw. $\psi(p; n)$ die kleinste Primzahl, die n -ter Rest bzw. Nichtrest \pmod{p} ist. Es gilt:

$$\pi(p; 3) \leq (4p - 27)^{1/3} \text{ für } p \equiv 1 \pmod{6}, p \neq 7;$$

$$\pi(p; 3) \leq \left(\frac{4p-1}{27}\right)^{1/3} \text{ für } p \equiv 1 \pmod{6}, p \neq \frac{1}{4}(A^2 + 27);$$

$$\psi(p; n) + 1 \leq \left(\frac{p+5}{2}\right)^{1/2} \text{ für } p \geq 13.$$

Für $n = 2, 3$ ist $\lim_{p \rightarrow \infty} \pi(p; n) = \infty$; $\lim_{p \rightarrow \infty} \psi(p; n) = \infty$. Daraus folgt sofort auch $\lim_{p \rightarrow \infty} g(p) = \infty$, wenn $g(p)$ die kleinste positive primitive Wurzel (mod p) bedeutet.

H.-J. Kanold.

Brandt, H.: Das quadratische Reziprozitätsgesetz im Gaußschen Zahlkörper. *Commentarii math. Helvet.* **26**, 42—54 (1952).

K sei ein Dirichletscher Zahlkörper, nämlich ein relativquadratischer über dem Gaußschen Zahlkörper k . Die Relativediskriminante von K/k sei Δ . Dann ist $\Delta = II \delta$ Produkt aus den eigentlichen und uneigentlichen Primdiskriminanten δ . Die ersteren sind $4i$, $4(1+i)$, $4(1-i)$ oder Primzahlen aus k , die $\equiv \pm 1 \pmod{4}$ sind. Verf. definiert die letzteren als $2i\omega$, $4i\omega$, $4(1+i)\omega$, $4(1-i)\omega$ oder $\pi\omega$, wobei π eine beliebige Primzahl $\equiv \pm 1 + 2i \pmod{4}$ und ω ein Symbol mit der Eigenschaft $\omega^2 = 1$ ist. In Δ stecken die uneigentlichen Primdiskriminanten immer paarweise, jedoch ohne daß die beiden gerade sind. — Ist nun δ eine ungerade eigentliche Primdiskriminante und π eine ungerade Primzahl mit geradem Imaginärteil, so gilt nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz von Gauß-Dirichlet

(1) $\left[\frac{\delta}{\pi}\right] = \left[\frac{\pi}{\delta}\right]$. Verf. zeigt, daß das Gesetz (1) auch für jede (eig. oder uneig.)

Primdiskriminante δ und für jede nicht in δ aufgehende Primzahl π oder auch für $\pi = i$, $1+i$ oder $1-i$ gilt. Dazu benutzt Verf. die Normenrestcharaktere bezüglich K/k mod. dem $(1+i)$ -Führer von K/k [vgl. S. Kuroda, *J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, Sect. I*, **4**, 383—406 (1943)] und definiert die Rechenoperationen geeignet für das in Zähler und Nenner von (1) eventuell auftretende Symbol ω . Das Gesetz (1) wird auch in üblicher Weise verallgemeinert für die Diskriminante $\Delta = II \delta$ von K/k und eine beliebige ganze Zahl M aus k , so daß gilt $\left[\frac{\Delta}{M}\right] = \left[\frac{M}{\Delta}\right]$.

Hiermit nimmt das quadratische Reziprozitätsgesetz im Gaußschen Zahlkörper mit seinen Ergänzungsgesetzen ausnahmslos eine einheitliche Gestalt an. Verf. wendet es auf die Darstellbarkeit der zu Δ primen Zahl M durch die binäre Form $\alpha \xi^2 + \beta \xi \eta + \gamma \eta^2$ mit der Diskriminante Δ an. S. Kuroda.

Moller, Raymond: Sums of powers of numbers having a given exponent modulo a prime. *Amer. math. Monthly* **59**, 226—230 (1952).

Two theorems: 1. If g_d denotes a number belonging to $d \pmod{p}$, where $d|p-1$, then for any positive integer n

$$\sum_{g_d} g_d^n = \frac{\varphi(d)}{\varphi(d|(d,n))} \mu\left(\frac{d}{(d,n)}\right) \pmod{p}.$$

2. If $x|p-1$, then $\sum_{d|x} \sum_{g_d} g_d^n = x$ or $0 \pmod{p}$, according $x|n$ or not. — The proof

of 1 is based on two lemmas: a) The set of numbers obtained by multiplying by d' all of the numbers of a complete residue set prime to d , where d' divides d , consists mod d of $\varphi(d)/\varphi(d|d')$ subsets, each of which consists of all of the numbers of a complete residue set prime to d/d' multiplied by d' . b) Theorem 1 for $n = 1$ (Gausz-Stern). Theorem 2 then follows by calculation of $\sum_{d|x}$. — In a remark

Zuckerman gives first a simple proof of Theorem 2 and then concludes to 1 by means of the Möbius inversion formula. W. Verdenius.

Whiteman, Albert Leon: Cyclotomy and Jacobsthal sums. *Amer. J. Math.* **74**, 89—99 (1952).

Verf. knüpft an seine frühere Arbeit (dies. Zbl. **36**, 24) an und betrachtet neben der Jacobsthal-Summe $\Phi_e(n) = \sum_{h=1}^{p-1} \left(\frac{h}{p}\right) \left(\frac{h^e + n}{p}\right)$, $p-1 = ef$, $p > 2$ Primzahl, $\left(\frac{x}{p}\right)$ Legendresymbol, noch $\psi_e(n) = \sum_{h=1}^{p-1} \left(\frac{h^e + n}{p}\right)$. Es werden zunächst mit g als pri-

mitiver Wurzel mod p u. a. die Relationen

$$\Phi_e(g^{e^t+k}) = (-1)^{t(e+1)} \Phi_e(g^k), \quad \Phi_e(n x^e) = \left(\frac{x}{p}\right)^{e+1} \Phi_e(n), \quad p \nmid x,$$

nebst $\sum_{k=0}^{e-1} \Phi_e(g^k) = -e$ für $e \equiv 1 \pmod{2}$ und hierzu analog

$$\psi_e(g^{e^t+k}) = (-1)^t \psi_e(g^k), \quad \psi_e(n x^e) = \left(\frac{x}{p}\right)^e \psi_e(n), \quad \sum_{k=0}^{e-1} (-1)^k \psi_e(g^k) = -e \quad [e \equiv 0, 1 \pmod{2}]$$

bewiesen. Als Hauptresultate erhält Verf.

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{e-1} \Phi_e(g^k) \Phi_e(g^{k+s}) = \begin{cases} e^2 p - e(p-1), & s=0, \\ -e(p-1), & 1 \leq s \leq e-1, \end{cases} \quad e \equiv 1 \pmod{2},$$

$$\begin{cases} e^2 p, & s=0, \\ 0, & 1 \leq s \leq p-1, \end{cases} \quad e \equiv f \pmod{2},$$

bzw.

$$\sum_{k=0}^{e-1} \psi_e(g^k) \psi_e(g^{k+s}) = \begin{cases} e^2 p - 2e(p-1), & s=0, \\ -2e(p-1), & s \equiv 0 \pmod{2}, s \neq 0, \\ 0, & s \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \quad e \equiv 0 \pmod{2},$$

$$\begin{cases} e^2 p - e(p-1), & s=0, \\ -e(p-1), & s \equiv 0 \pmod{2}, s \neq 0, \\ e(p-1), & s \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \quad e \equiv 1 \pmod{2}.$$

Als Anwendungen werden ferner die Fälle $e=2, 3, 4, 5$ diskutiert. Z. B. reduziert sich (1) auf die Diskussion der Lösungen von $p = a^2 + b^2$ [$p \equiv 1 \pmod{4}$], $a = \frac{1}{2} \Phi_2(1)$, $b = \frac{1}{2} \Phi_2(g)$; $e=3$ führt auf $4p = x^2 + 3y^2$ ($p \equiv 3 \pmod{4}$); $e=4$ ermöglicht die Diskussion von $p = x^2 + 2y^2$, $e=5$ die von $16p = x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 10u^2$ sowie von $16p = x^2 + 50y^2 + 50z^2 + 125u^2$ (vgl. auch oben zitierte Arbeit des Verf.).

H.-H. Ostmann.

Pérez-Cacho, L.: Die Funktion $E(x)$ (ganzzahliger Bestandteil von x) in der Zahlentheorie. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 36–40 (1952) [Spanisch].

Bedeutet wie üblich $[a]$ die größte in a enthaltene ganze Zahl (Verf. schreibt $[a] = E(a)$), so weist Verf. darauf hin, daß sich sowohl $d(n)$ = Teileranzahl von n als auch die Eulersche Funktion $\varphi(n)$ allein durch das eckige Klammersymbol

ausdrücken lassen; bekanntlich gilt nämlich (1) $\sum_{x=1}^n d(x) = \sum_{x=1}^n \left[\frac{n}{x} \right]$, wie man sofort

bestätigt, indem man $H(n) = \sum_{x=1}^n \left[\frac{n}{x} \right]$ setzt und $H(n) - H(n-1) = d(n)$ beachtet,

d. h. gleiche Rekursionsformeln für die beiderseits in (1) stehenden Funktionen gewinnt.

(1) liefert $d(n) = \sum_{x=1}^n d(x) - \sum_{x=1}^{n-1} d(x) = \sum_{x=1}^n \left[\frac{n}{x} \right] - \sum_{x=1}^{n-1} \left[\frac{n-1}{x} \right]$. Hiernach

ist offenbar $n > 1$ dann und nur dann Primzahl, wenn $\sum_{x=1}^n \left[\frac{x}{n} \right] - \sum_{x=1}^{n-1} \left[\frac{n-1}{x} \right] = 2$

ist. — Ferner erkennt man durch vollständige Induktion (2) $\sum_{x=1}^n \varphi(x) \left[\frac{n}{x} \right] = \binom{n+1}{2}$

(oder gleichbedeutend (2') $\sum_{x=2}^n \varphi(x) \left[\frac{n}{x} \right] = \binom{n}{2}$), nämlich: $\binom{n+1}{2} = \sum_{x=1}^{n-1} \varphi(x) \left[\frac{n-1}{x} \right] =$

$\sum_{\substack{x=1 \\ x \nmid n}}^{n-1} + \sum_{\substack{x=1 \\ x|n}}^{n-1} = \sum_{\substack{x=1 \\ x \nmid n}}^{n-1} \varphi(x) \left[\frac{n}{x} \right] + \sum_{\substack{x=1 \\ x|n}}^{n-1} \varphi(x) \left(\left[\frac{n}{x} \right] - 1 \right) = \sum_{x=1}^{n-1} \varphi(x) \left[\frac{n}{x} \right] - \sum_{\substack{x=1 \\ x|n}}^{n-1} \varphi(x) =$

$\sum_{x=1}^n \varphi(x) \left[\frac{n}{x} \right] - \sum_{\substack{x=1 \\ x|n}}^n \varphi(x) = \left(\sum_{x=1}^n \varphi(x) \left[\frac{n}{x} \right] \right) - n$, woraus wegen $\binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2}$

sofort (2) folgt. Schreibt man (2) der Reihe nach für $n=1, 2, \dots, k$ hin, so erhält man ein lineares Gleichungssystem für $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(k)$ mit der Deter-

minante $\left[\frac{k}{k} \right] \cdot \left[\frac{k-1}{k-1} \right] \cdots \left[\frac{1}{1} \right] = 1$, so daß die Cramersche Regel $q(k)$ in der Determinantengestalt

$$q(k) = \begin{vmatrix} \binom{k+1}{2} & \left[\frac{k}{k-1} \right] \cdots \left[\frac{k}{2} \right] & \left[\frac{k}{1} \right] \\ \binom{k}{2} & \left[\frac{k-1}{k-1} \right] \cdots \left[\frac{k-1}{2} \right] & \left[\frac{k-1}{1} \right] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{2}{2} & 0 \cdots 0 & \left[\frac{1}{1} \right] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{k}{2} & \left[\frac{k}{k-1} \right] \cdots \left[\frac{k}{2} \right] \\ \binom{k-1}{2} & \left[\frac{k-1}{k-1} \right] \cdots \left[\frac{k-1}{2} \right] \\ \vdots & \vdots \\ \binom{2}{2} & 0 \cdots \left[\frac{2}{2} \right] \end{vmatrix}$$

liefert, letztere Form, indem man z. B. (2') statt (2) verwendet, d. h. n nur die Werte $2, 3, \dots, k$ durchlaufen läßt.

H. H. Ostmann.

Ricci, Giovanni: Funzioni aritmetiche. Proprietà asintotiche. Aritmetica analitica. Archimede 4, 98—104 (1952).

Carlitz, L.: Independence of arithmetic functions. Duke math. J. 19, 65—70 (1952).

Bellman and Shapiro have proved the algebraic independence of the arithmetic functions m , $\Phi(m)$, $d(m)$, $\sigma(m)$, $2^{v(m)}$, $\mu(m)$, where $\Phi(m)$, $\mu(m)$, $d(m)$, $\sigma(m)$ and $v(m)$ denote the Euler function, the Moebius function, the number of divisors, the sum of divisors and the number of distinct primes dividing m respectively. L. I. Wade gave a shorter proof of the algebraic independence of the first five functions. The author treated allied questions concerning the Dirichlet rather than the „ordinary“ product, that is we write $fg(m) = \sum_{ab=m} f(a)g(b)$. By this product

the function u with $u(1) = 1$, $u(m) = 0$ ($m > 1$) plays the role of unit function, and $\mu \cdot I_0 = u$, $d = I_0 \cdot I_0 = I_0^2$, $\sigma = I_0 \cdot I_1$, $\Phi = I_1 \cdot \mu = I_1 \cdot I_0^{-1}$, where $I_k(m) = m^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), so that the five functions mentioned above are generated by I_0 , I_1 . The author shows the algebraic independence of I_0, I_1, \dots, I_r . Concerning the function $N(m) = 2^{v(m)}$, he remarks first $N = Q \cdot I_0$, where $Q(m) = |\mu(m)|$, and shows the algebraic independence of I_0, \dots, I_r and Q . Several generalizations of the same type are also treated.

T. Tannaka.

Kanold, Hans-Joachim: Abschätzungen bei Kreisteilungspolynomen und daraus hergeleitete Bedingungen für die kleinsten Primzahlen gewisser arithmetischer Folgen. Math. Z. 55, 284—287 (1952).

Es sei $F_m(x)$ das m -te Kreisteilungspolynom, und q die kleinste Primzahl der Restklasse 1 (mod m), wo m eine natürliche Zahl > 6 ist. Nach einem früheren Ergebnis des Verf. [dies. Zbl. 35, 311; Abschn. I, Gl. (35) der Arbeit] gilt $q \leq F_m(\pm 2)$. In der vorliegenden Mitteilung werden einige Ungleichungen für die Funktion $F_m(x)$ hergeleitet und die folgenden Abschätzungen für die Primzahl q angegeben. Es gilt: falls $m = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} > 6$, so ist $q \leq 2^{\varphi(m)} - m$, wenn m ungerade; $q \leq 2^{\varphi(m)} - m/2$, wenn $m \equiv 2 \pmod{4}$; $q \leq 2^{\varphi(m)} - m/2^{\alpha_1}$, wenn k gerade und $p_1 = 2$; und andernfalls

$$q \leq 2^{\varphi(m)} \frac{1 - (1/16)^{m'}}{1 - (1/4)^{m'}} \leq \frac{5}{4} 2^{\varphi(m)}, \quad m' = \frac{m}{4 p_2 \cdots p_k}.$$

Die letzte Ungleichung ist in gewissem Sinne bestmöglich, da bei dem Beispiel $m = 8$ das Gleichheitszeichen auftritt.

T. Tannaka.

Aubert, K. E.: Funktionen, die Primzahlen darstellen. Norsk mat. Tidsskr. 34, 42—44 (1952) [Norwegisch].

Bericht über die bisherigen Arbeiten über Funktionen $f(n)$, die für $n = 1, 2, \dots$ ausschließlich Primzahlen darstellen (vgl. W. H. Mills, dies. Zbl. 33, 163; L. Kui-

pers, dies. Zbl. 37, 30; I. Niven, dies. Zbl. 44, 37). Für den ersten Teil des Satzes von Niven „Zu jeder reellen Zahl $c > 8/3$ gibt es unendlich viele reelle Zahlen A , so daß $[A^n]$ für jedes natürliche n eine Primzahl darstellt“ wird der Beweis in etwas ausführlicher Form wiedergegeben.

H.-E. Richert.

Vooren-van Veen, J. F. van de: Über Primzahlen und Primeideale. Simon Stevin 29, 13—20 (1952) [Holländisch].

Palamà, Giuseppe: Numeri primi e composti contenuti nella forma $1848x^2 + y^2$ dell'intervallo 11 000 000 — 11 100 000. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 168—171 (1952).

Cheo, Luther: A remark on the $\alpha + \beta$ theorem. Proc. Amer. math. Soc. 3, 175—177 (1952).

In Verschärfung einer Aussage von B. Lepson (dies. Zbl. 40, 162) wird gezeigt: Zu je drei Zahlen $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ mit $1 \geq \gamma \geq \alpha + \beta$ gibt es Mengen A , B von natürlichen Zahlen derart, daß die Schnirelmannsche Dichte $d(A) = \alpha$, $d(B) = \beta$ und $d(A + B) = \gamma$ ist.

H. Rohrbach.

Frejman, G. A.: Über die Dichtigkeit von Folgen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 385—388 (1952) [Russisch].

Sei $A(a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots)$ eine Folge natürlicher Zahlen, $\pi(N) = \sum_{a_i \leq N} 1$. $\delta(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \pi(N)}{\log N}$ wird die Dichtigkeit der Folge A genannt. Seien A, B Folgen der genannten Art. Trivialerweise ist $\max(\delta(A), \delta(B)) \leq \delta(A + B) \leq 1$. Sei k eine natürliche Zahl, $\eta_k = \delta(kA)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = \eta$. Es wird gezeigt: 1. Wenn für alle i gilt $a_i = b_i + O(b_i^\sigma)$, $\sigma < 1$, $\delta(B) = 0$, so ist $\eta \leq \sigma$. 2. Sei

$$N^{\sigma_N} = \sum_{a_i \leq N, a_i - a_{i-1} = O(a_i^{\sigma_1})} (a_i - a_{i-1}), \quad \sigma_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N.$$

Dann gilt $\eta_k \geq \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{1 - \sigma_1} (1 - \sigma_1^k)$. 3. Es ist $\eta_k \geq \sigma_2 - \sigma_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \epsilon} \right)^{k-1}$, wenn für alle N ein Intervall $I_N = (a, a + N^{\sigma_1 + \epsilon}) \subset (1, N)$ existiert, so daß jedes Intervall $I = (b, b + N^{\sigma_1}) \subset I_N$ ein a_i enthält.

K. Prachar.

Cugiani, Marco: Sulla rappresentazione degli interi come somme di una potenza e di un numero libero da potenze. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 33, 135—143 (1952).

Verf. zeigt: Ist $E(N)$ die Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl N in der Gestalt $x^g + L_g$, wo L g -frei und x zu N relativ prim ist, so ist

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} E(N) \log \log N / N^{1/g} < \infty, \quad 0 < \lim_{N \rightarrow \infty} E(N) / N^{1/g} \leq 1.$$

Das gleiche Resultat erhielt Verf. in einer fast gleichzeitig erschienenen Arbeit unter der Bedingung „ x quadratfrei“ (dies. Zbl. 44, 270). Verf. gibt noch eine Verallgemeinerung wo x^g durch ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten mit einem Grad $\leq g$ ersetzt ist.

E. Hlawka.

Watson, G. L.: Sums of eight values of a cubic polynomial. J. London math. Soc. 27, 217—224 (1952).

Hua has shown that every large positive integer is a sum of eight values of the cubic polynomial $Dx + \frac{1}{6}(x^3 - x)$, $x > 0$. The author considers the possibility of omitting the word „large“ in this result. More precisely he proved that every integer is a sum of eight values of $Dx + \frac{1}{6}(x^3 - x)$, $x > 0$, where $D = 0$ or 1.

L.-K. Hua.

Grün, Otto: Über ungerade vollkommene Zahlen. Math. Z. 55, 353—354 (1952).

Es sei p_1 der kleinste der n verschiedenen in einer ungeraden vollkommenen Zahl aufgehenden Primteiler. Die Aussage $p_1 \leq n$ wird verschärft zu $p_1 < \frac{2}{3}n + 2$.

H.-J. Kanold.

Chowla, Sarvadaman: The Riemann zeta and allied functions. Bull. Amer. math. Soc. 58, 287—305 (1952).

This is an expository paper devoted mainly to stating a large number of recent results and unsolved problems concerning the Riemann zeta function, the Dirichlet L -functions, the Dedekind zeta functions, and the Hasse L -functions.

P. T. Bateman.

Bailey, W. N.: A further note on two of Ramanujan's formulae. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 158—160 (1952).

Die Formeln

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^n)^5}{1-x^{5n}} = 1 - 5 \left(\frac{x}{1-x} - \frac{2x^2}{1-x^2} - \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{6x^6}{1-x^6} - \dots \right),$$

$$x \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^{5n})^5}{1-x^n} = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x^2}{(1-x^2)^2} - \frac{x^3}{(1-x^3)^2} + \frac{x^4}{(1-x^4)^2} + \frac{x^6}{(1-x^6)^2} - \dots$$

werden bewiesen, indem $\wp(u) - \wp(2u)$ einerseits durch elliptische σ -Funktionen ausgedrückt und andererseits in die Fourier-Reihe entwickelt wird. K. Prachar.

Sandham, H. F.: Two identities due to Ramanujan. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 179—182 (1952).

Sei

$$q_0 = \prod_1^{\infty} (1 - q^{2n}), \quad q_1 = \prod_1^{\infty} (1 + q^{2n}), \quad q_2 = \prod_0^{\infty} (1 + q^{2n+1}), \quad q_3 = \prod_0^{\infty} (1 - q^{2n+1}),$$

$$f(n) = n q^{n^2/3}, \quad g(n) = n q^{n^2/27}.$$

Es wird gezeigt:

$$q^{1/3} q_0^3 q_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \{f(6n+1) - f(6n+2) + f(6n+4) - f(6n+5)\},$$

$$q^{1/24} q_0^3 q_3^5 = \sum_{n=0}^{\infty} \{g(12n+1) - g(12n+5) + g(12n+7) - g(12n+11)\}.$$

Damit werden zwei Reihen geschlossen summiert, in denen die Funktion $p(n)$ — die Anzahl der Partitionen — vorkommt. K. Prachar.

Slater, L. J.: Further identities of the Rogers-Ramanujan type. Proc. London math. Soc., II. Ser. 54, 147—167 (1952).

Mit einer von ihm angegebenen Methode (dies. Zbl. 44, 61) kann Verf. hundertdreißig Identitäten (darunter zahlreiche neue) beweisen, die in einer Liste angeführt sind. Für den Typus der Identitäten siehe loc. cit. K. Prachar.

Dahlquist, Germund: On the analytic continuation of Eulerian products. Ark. Mat. 1, 533—554 (1952).

Es sei $h(z)$ eine analytische Funktion, regulär für $z = 0$, $h(0) = 1$ und es liege kein Häufungspunkt von Nullstellen oder Singularitäten in $|z| \leq 1$. Dann ist $f(s) = \prod_p h(p^{-s})$ (p durchläuft alle Primzahlen, $s = \sigma + it$) in einer gewissen Halbebene $\sigma > A$ konvergent. — Verf. zeigt nun: Die imaginäre Achse ist eine natürliche Grenze für $f(s)$, außer wenn $h(z)$ von der Gestalt $\prod_{\nu=1}^k (1 - z^{\nu})^{-\beta_{\nu}}$,

also $f(s) = \prod_{\nu=1}^k \zeta(\nu s)^{\beta_{\nu}}$ ist. Spezialfälle wurden z. B. von Landau und Walfisz [Rend. Circ. Mat. Palermo 44, 82—86 (1919); $h = e^z$] und Estermann [Proc. London Math. Soc. II. Ser. 27, 435—448 (1928); $h = \text{Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten}$] behandelt. Der Beweis beruht außer auf den Methoden der oben genannten Autoren auf folgendem, an sich interessantem, Lemma: Es sei S eine unendliche Menge von verschiedenen natürlichen Zahlen n , deren kanonische Zerlegung $n = \prod p_j^{x_j}$ ($x_j \geq 0$) sei. Eine Zahl $n^* = \prod p_j^{x_j^*}$ heißt nun Scheitelzahl (vertex number), wenn es eine Folge von reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ (die von n^*

abhängen können) gibt, so daß für alle n aus S mit $n < 2n^*$, $\sum \lambda_j x_j^* > \sum \lambda_j x_j$ gilt. Dann wird gezeigt: S enthält stets unendlich viele Scheitelzahlen. Verf. dehnt seinen allgemeinen Satz noch auf Funktionen der Gestalt $f(s) = \prod h(\chi(p) p^{-s})$, wo $\chi(p)$ Restcharaktere sind, aus.

^p
E. Hlawka.

Maxfield, John E.: A short proof of Pillai's theorem on normal numbers. Pacific J. Math. 2, 23—24 (1952).

Es sei die reelle Zahl θ ($0 \leq \theta < 1$) als d -adische Zahl entwickelt ($d \geq 2$ natürliche Zahl) und $h(b, d)$ die Häufigkeit, mit der eine feste Ziffer b ($0 \leq b < d$) in der Entwicklung von θ vorkommt, dann heißt θ einfach normal, wenn für jede mögliche Ziffer b $h(b, d) = 1/d$ ist und θ normal in bezug auf die Basis d , wenn alle Zahlen $\theta, d\theta, d^2\theta, \dots$ (genauer die Bruchteile dieser Zahlen) einfach normal für alle Basen d, d^2, d^3, \dots sind. S. S. Pillai (dies. Zbl. 25, 308) stellte den Satz auf: θ ist genau dann normal zur Basis d , wenn θ einfach normal ist für alle Basen d, d^2, \dots . Verf. gibt nun einen einfachen Beweis für diesen Satz, indem er sich auf den Satz stützt, daß θ genau dann normal ist, wenn die Häufigkeit $h(B_k, d)$ mit der eine Folge $B_k = b_1, \dots, b_k$ von k Ziffern in der Entwicklung von θ auftritt, für alle k und alle B_k gleich d^{-k} ist. Dieser oft verwendete Satz wurde zuerst von L. Niven und H. S. Zuckermann (dies. Zbl. 42, 269) einwandfrei bewiesen. Damit ist jetzt die Äquivalenz der drei Definitionen für normale Zahlen in exakter Weise sichergestellt. E. Hlawka.

Brandt, Heinrich: Binäre quadratische Formen im Gaußschen Zahlkörper. Math. Nachr. 7, 151—158 (1952).

H. J. St. Smith [Proc. Roy. Soc. London 13, 278—298 (1864) oder The collected mathematical papers, Bd. 1, p. 418—442, Oxford 1894] hat die Charaktere einer binären quadratischen Form im Gaußschen Zahlkörper sowie die zwischen ihnen auf Grund des Reziprozitätsgesetzes bestehende Relation aufgestellt. Das Resultat wird in Form einer 31 Sonderfälle umfassenden Tabelle wiedergegeben. Verf. ersetzt diese Tabelle durch eine Regel, die auf der Zerlegung der Diskriminante in ein Produkt von „Primdiskriminanten“ beruht (vgl. hierzu H. Brandt, dies. Zbl. 46, 268) und wegen der auch jetzt noch notwendigen Fallunterscheidungen hier nicht wiedergegeben werden kann.

M. Eichler.

Brandt, H.: Zur Zahlentheorie der ternären quadratischen Formen. Math. Ann. 124, 334—342 (1952).

$f(x_1, x_2, x_3)$ bedeute eine primitive quadratische Form mit ganzen rationalen Koeffizienten und mit positiver Signatur. Sind x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 zwei Tripel teilerfremder ganzer rationaler Zahlen und $s_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$, $s_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$, $s_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$ ebenfalls ein solches, so gibt es ein viertes Tripel teilerfremder ganzer rationaler Zahlen t_1, t_2, t_3 , so daß $x_1 = s_2 t_3 - s_3 t_2$, $x_2 = s_3 t_1 - s_1 t_3$, $x_3 = s_1 t_2 - s_2 t_1$ ist. Nun gilt bekanntlich mit der primitiven zu f adjungierten Form F :

$$\left(\sum y_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, x_3) \right)^2 - 4f(x_1, x_2, x_3) f(y_1, y_2, y_3) = I_1 F(s_1, s_2, s_3),$$

$$\left(\sum t_i \frac{\partial}{\partial s_i} F(s_1, s_2, s_3) \right)^2 - 4F(s_1, s_2, s_3) F(t_1, t_2, t_3) = I_2 f(x_1, x_2, x_3),$$

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 0.$$

Die Invarianten I_1, I_2 sind negativ zu nehmen, wenn f definit ist, sonst positiv. Ein Geschlecht von Formen f läßt sich durch die Signatur und die Charaktere, d. h. das Restverhalten der durch f und F dargestellten Zahlen modulo den ungeraden in I_1, I_2 aufgehenden Primzahlen und gewissen in I_1, I_2 aufgehenden Potenzen von 2 beschreiben. Welche Charaktere modulo Potenzen von 2 existieren (sowie die auf Grund des Reziprozitätsgesetzes zwischen allen Charakteren bestehende Relation) gab H. J. St. Smith in Form einer Tabelle an (The Collected Papers vol. 1, Oxford 1894, S. 455—509). Verf. ersetzt diese Tabelle durch folgende etwas einfachere Regel: Es bedeuten $m = f(x_1, x_2, x_3)$ und $M = F(s_1, s_2, s_3)$ zwei durch f und F im obigen Sinne (d. h. „simultan“) dargestellte zu $2I_1 I_2$ teilerfremde Zahlen. 1. Wenn $I_1 = 0 \bmod 32$, so liegt der Kongruenzwert von $m \bmod 8$ fest. 2. Wenn $I_1 = 16 \bmod 32$, so liegt der Kongruenzwert von $m \bmod 4$ fest. 3. Wenn $I_1 = 8 \bmod 16$ und $I_2 = 0 \bmod 16$, so gehört m stets der durch 1 und -1 bzw. durch 1 und 3 vertretenden Kongruenzgruppe mod 8 an oder stets deren Neben- gruppe, und zwar je nachdem $\frac{1}{8} M I_1 = \pm 1 \bmod 4$ ist. 4. Wenn $I_1 = 4 \bmod 8$ und $I_2 = 0 \bmod 16$, so nimmt m alle Kongruenzwerte mod 8 an oder liegt mod 4 fest, je nachdem

$\frac{1}{4} M I_1 \equiv \pm 1 \pmod{4}$ ist. 5. Sind I_1, I_2 beide nur durch 4 oder 8 teilbar, so können zwar m, M je für sich jeden Kongruenzwert mod 8 annehmen, indessen tritt jetzt der von Smith a. a. O. angegebene „Simultancharakter“ auf, der sich in diesem Zusammenhang in der Form $\sigma = \begin{pmatrix} \pm i_1 \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm i_2 \\ M \end{pmatrix}$ berechnen läßt; hier bedeuten i_1, i_2 die größten ungeraden Teiler von I_1, I_2 , und die Vorzeichen sind so zu nehmen, daß $\pm i_1 \equiv \pm i_2 \equiv 1 \pmod{4}$ ist. 6. Wenn I_1 ungerade ist, nimmt m unabhängig von M alle Kongruenzwerte mod 8 an. 7. usw. Die übrigen Fälle erledigen sich durch Ausnutzung der zwischen f und F bestehenden Symmetrie. Eine vom Verf. vorgeschlagene Beschreibung dieser Regel mittels des Begriffes der „Primdiskriminanten“ macht Fallunterscheidungen nicht entbehrlich. — Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Geschlechts gründet sich auf die aus dem Reziprozitätsgesetz folgenden Formeln

$$\begin{pmatrix} (-1)^{(M-1)/2} I_1 \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ M \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{(m-1)/2} I_2 \\ M \end{pmatrix} = 1,$$

wobei in der ersteren $I_2 \equiv 0 \pmod{4}$, in der letzteren $I_1 \equiv 0 \pmod{4}$ vorausgesetzt wurde. Sie lassen sich durch nochmalige Benutzung des Reziprozitätsgesetzes in eine Produktrelation für die Charaktere umformen. M. Eichler.

Siegel, Carl Ludwig: Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie.

II. Math. Ann. 124, 364—387 (1952).

Die in Teil I (s. dies. Zbl. 43, 274) entwickelten Methoden erweisen sich von erstaunlicher Tragweite. Sie werden hier auf quadratische Formen in beliebigen algebraischen Zahlkörpern und involutorischen Algebren angewendet. Die Grenzen der Theorie sind damit anscheinend erreicht. — Zunächst werden die Verhältnisse im Gaußschen Zahlkörper K ausführlich untersucht. Es sei $\mathfrak{S}[x] = x' \mathfrak{S} x$ eine nicht ausgeartete quadratische Form in m Variablen mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Ist $\mathfrak{S}[x] = \eta' \eta$ für eine komplexe lineare Transformation $x \rightarrow \eta$, so wird die hermitesche Form $\mathfrak{P}[x] = x' \mathfrak{P} x = \eta' \bar{\eta}$ eine Majorante von \mathfrak{S} genannt. Die Majoranten sind durch $\mathfrak{P} \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{P} = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} > 0$ gekennzeichnet; P bezeichne den Lösungsraum dieses Systems. Im folgenden sei $\mathfrak{S}[x] + 2a'x$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten in K , $m > 3$ und im Falle $m = 4$ nicht zugleich $\mathfrak{S}[x]$ eine Nullform und $|2\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer Zahl aus K . Die Gruppe der unimodularen U mit $\mathfrak{S}[U] = \mathfrak{S}$, $Ua \equiv a \pmod{1}$ induziert in P eine Gruppe von Abbildungen $\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}[U]$; F sei ein Fundamentalbereich dieser Gruppe. Da im vorliegenden Fall automorphe Formen zu hyperbolischen Bewegungsgruppen vom Picardischen Typus zu konstruieren waren, so entstand das Problem, drei reelle Variable x, y, w , die zweckmäßig zu einer Quaternionenvariablen $\zeta = x + iy + jw$ ($i^2 = j^2 = (ij)^2 = -1$) zusammengefaßt werden, in geeigneter Weise im Exponenten der Thetareihen unterzubringen. Verf. setzt

$$f_a(\zeta, \mathfrak{P}) = \sum_{\eta} e^{\pi i \Re[\eta]} \quad \text{mit} \quad \Re = \begin{pmatrix} z \mathfrak{S} & iw \mathfrak{P} \\ iw \mathfrak{P} & z \mathfrak{S} \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}$$

und $z = x + iy$. Summiert wird über alle $\eta \equiv a \pmod{1}$. Sodann werden mit einem gewissen invarianten Volumenelement über F die Integralmittelwerte $\varphi_a(\zeta)$ der Funktionen $f_a(\zeta, \mathfrak{P})$ bestimmt. Die weiteren Betrachtungen verlaufen in Analogie zum Teil I und ergeben — im Fall $m = 4$ unter Verwendung einer Differentialgleichung — Partialbruchentwicklungen für die Funktionen $\varphi_a(\zeta)$. Auf Grund einer Fourierentwicklung ist nun festzustellen, daß die im Rationalen für das Maß der Darstellungen von t durch $\mathfrak{S}[x + a]$ gefundene Formel

$$(1) \quad M(\mathfrak{S}, a, t) = \mu_a(\mathfrak{S}) \prod_p \delta_p(\mathfrak{S}, a, t)$$

bei geeigneter Definition der Größen auch in K gültig ist, sofern das Produkt über alle Primideale p des Gaußschen Zahlkörpers erstreckt wird. — Bei der Verallgemeinerung dieser Untersuchung auf algebraische Zahlkörper K beliebigen Grades tritt eine Vermischung der im rationalen und Gaußschen Zahlkörper gemachten Ansätze ein. Man benötigt zur Bildung der Thetareihen r gewöhnliche komplexe Variable z_1, \dots, z_r und s Quaternionenvariable ζ_1, \dots, ζ_s , wenn es unter den Konjugierten von K reelle und s Paare konjugiert komplexe Körper gibt. Die Partialbruchreihen sind nun vom Typus

$$\sum_{\alpha} \gamma(\alpha) \prod_{\mu=1}^r (z_{\mu} - \alpha_{\mu})^{-n_{\mu}/2} (z_{\mu} - \alpha_{\mu})^{(m-n_{\mu})/2} \prod_{v=1}^s ((\zeta_v - \alpha_{r+v}) (\bar{\zeta}_v - \bar{\alpha}_{r+v}))^{-m/2},$$

wobei $\alpha_{\mu}, \alpha_{r+v}, \bar{\alpha}_{r+v}$ die Konjugierten der Zahl $\alpha \in K$ und $n_{\mu}, m - n_{\mu}$ die Signaturen der quadratischen Form in den reellen Konjugierten von K bezeichnen. Ist die Form nicht total definit, so ergibt sich als Endresultat wieder eine Formel von der Art (1). — Die Verallgemeinerung der Theorie auf Algebren erfordert einen umfangreichen Apparat, auf den aus räumlichen Gründen

nicht eingegangen werden kann. Betrachtet werden quadratische Formen $x' \mathfrak{S} x = \sum_{\mu, v=1}^m x_{\mu}^* s_{\mu v} x_v$

in halbeinfachen Algebren A , in denen ein involutorischer Antiautomorphismus (kurz: Involution) $a \rightarrow a^*$ erklärt ist. Es ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^*$ anzunehmen, wobei allgemein $\mathfrak{Y}^* = (v_{\mu}^*)$ für $\mathfrak{Y} = (v_{\mu})$ gesetzt wird. Zunächst wird eine Reduktion auf solche involutorischen Algebren vorgenommen, die entweder einfach oder als direkte Summe von zwei reziproken einfachen Algebren darstellbar sind. Nur der erste Fall wird weiter untersucht; der zweite führt auf Bilinearformen und ist einfacher zu erledigen. Das Darstellungsproblem quadratischer Formen in einfachen involutorischen Algebren A von endlichem Rang über dem Körper der rationalen Zahlen wird in voller Allgemeinheit angegriffen: In A seien gegeben Matrizen $\mathfrak{S}^{(m)}$, $\mathfrak{I}^{(n)}$, $\mathfrak{Y}^{(m,n)}$ und ein Modul M von Matrizen des Typus $\mathfrak{W}^{(m,n)}$. Es sei $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^*$, $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^*$. Dann ist ein Maß für die Darstellungen von \mathfrak{I} durch \mathfrak{S} : $\mathfrak{Y}^* \mathfrak{S} \mathfrak{Y} = \mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Y} \subset M$ geeignet zu definieren und durch die p -adischen Darstellungsdichten auszudrücken. Zu dem Zweck wird die Reduktionstheorie der quadratischen Formen ausführlich entwickelt (s. auch C. L. Siegel, dies. Zbl. 43, 262). Verf. befaßt sich noch mit dem Transformationsproblem der entsprechenden Thetaeilen und schließt mit Hinweisen, wie das Problem der Partialbruchentwicklung erledigt werden kann. Es sei noch bemerkt, daß die hermiteschen Formen als Spezialfall hier mit erfaßt werden.

H. Maaß.

Varnavides, P.: On the product of three linear forms. Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 234—244 (1952).

Es seien L_1, L_2, L_3 lineare Formen in u_1, u_2, u_3 mit reellen Koeffizienten und der Determinante 1. Sind c_1, c_2, c_3 beliebige reelle Zahlen, so gibt es bekanntlich ganze Zahlen u_1, u_2, u_3 , so daß $|(L_1 - c_1)(L_2 - c_2)(L_3 - c_3)| \leq 1/8$. Hier wird der Fall betrachtet, daß ein Linearfaktor, etwa $L_1 - c_1$, für ganze u_1, u_2, u_3 verschwindet. Dieselbe Annahme hat Mordell im Fall $n = 2$ untersucht (dies. Zbl. 42, 44). Äquivalent zur Annahme, daß $L_1 - c_1$ verschwindet, ist, daß $c_1 = 0$ und die triviale Lösung ausgeschlossen werde. Es entsteht also jetzt das Problem, eine Konstante C so zu bestimmen, daß $|L_1(L_2 - c_2)(L_3 - c_3)| < C$, $|L_1| < \varepsilon$ nicht trivial lösbar ist. Falls c_2 und c_3 nicht beide 0 sind, so kann man (1) $C = 1/9, 1$ wählen, wie hier in einem längeren Beweis gezeigt wird. Da sich für $n = 2$ die genaue Konstante $1/\sqrt{5}$ ergibt, die auch bei homogener Approximation auftritt, so ist der Fall $n = 3$ anders geartet und jedenfalls viel schwieriger. Die in der Arbeit erzielten Ergebnisse sagen noch etwas mehr aus. Es gilt (1) auch für $c_2 = c_3 = 0$, wenn nur nicht L_1, L_2, L_3 Vielfache von $P = u_1 + \theta u_2 + \theta^2 u_3$, $Q = u_1 + \varphi u_2 + \varphi^2 u_3$, $R = u_1 + \psi u_2 + \psi^2 u_3$ sind, wo θ, φ, ψ bzw. die Wurzeln von $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$ bzw. $t^3 - 3t - 1 = 0$ sind. In diesen Fällen hat L_1, L_2, L_3 das Minimum $1/7$ bzw. $1/9$. — Ferner wird auch gezeigt, daß $|(L_1 - c_1)(L_2 - c_2)(L_3 - c_3)| < 1/8 + \varepsilon$, $|L_1 - c_1| < \varepsilon$, von zwei Ausnahmefällen abgesehen, unendlich viele Lösungen besitzt.

N. Hofreiter.

Barnes, E. S.: On indefinite ternary quadratic forms. Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 218—233 (1952).

Es sei $Q(x, y, z)$ eine indefinite ternäre quadratische Form mit der Determinante $d \neq 0$ und $M(Q)$ die untere Grenze des Produktes

$$|Q(x_1, y_1, z_1) \cdot Q(x_2, y_2, z_2) \cdot Q(x_3, y_3, z_3)|$$

für alle ganzen Zahlen x, y, z , für die

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Dann gilt (1) $M(Q) \leq \frac{2}{3} |d|$. Das Gleichheitszeichen gilt genau für die Formen, die mit einem Vielfachen von

$$Q_1(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 - 2z^2$$

äquivalent sind. Für alle anderen Formen gilt (2) $M(Q) \leq \frac{12}{25} |d|$. Das Gleichheitszeichen gilt genau für die Formen, die mit einem Vielfachen von $Q_2(x, y, z) = x^2 + xy - y^2 - \frac{5}{2} z^2$ oder $Q_3(x, y, z) = x^2 - \frac{5}{2} (y^2 + yz + z^2)$ äquivalent sind. Für alle Formen, die mit keinem Vielfachen von Q_1, Q_2, Q_3 äquivalent sind, gilt sogar (3) $M(Q) < \frac{1}{2,2} |d|$. Es ist (4) $M(Q) = 0$, wenn $m(Q)$, das ist die untere Grenze von $Q(x, y, z)$ für alle ganzen $x, y, z \neq 0, 0, 0$, verschwindet. Die Formel (1) ist nicht überraschend, da bekanntlich $m^3(Q) \leq \frac{2}{3} |d|$. Der Nachweis von (1), (2), (4) ist nicht schwer, längere Falluntersuchungen erfordert aber der Beweis von (3). Hier wird das Hauptergebnis aus des Verf. Arbeit: The minimum of the product of two values of a quadratic form I (dies. Zbl. 43, 276) mehrfach benutzt.

N. Hofreiter.

Barnes, E. S. and H. P. F. Swinnerton-Dyer: The inhomogeneous minima of binary quadratic forms. I. Acta math. 87, 259—323 (1952).

Let $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ be an indefinite binary form with real coefficients and discriminant $D = b^2 - 4ac > 0$. For real numbers x_0, y_0 we define

(*) $M(f; x_0, y_0) = \text{lower bound } |f(x, y)|, (x, y) \equiv (x_0, y_0) \pmod{1}$

and $M(f) = \text{upper bound } M(f; x_0, y_0)$ the (first) minimum of the form. — If, now \mathfrak{C} is the set of points (x_0, y_0) with $M(f; x_0, y_0) = M(f)$, we define

$M_2(f) = \text{upper bound } M(f; x_0, y_0), (x_0, y_0) \notin \mathfrak{C}$,

the second minimum. Clearly $M_2 \leq M$ and if $M_2 < M$ the first minimum is said to be isolated. Similarly successive minima M_3, M_4, \dots are defined until a non-isolated minimum is reached. A well-known theorem of Minkowski states that $M(f) \leq \frac{1}{2} D^{1/2}$; and much work has been done on improving this estimate for special forms $f(x, y)$ by Davenport, Heinholt and others, particularly in connection with the question of the existence of the Euclidean Algorithm in real-quadratic fields. In this paper the authors develop an extremely powerful and elegant process, using a knowledge of the automorphs, for finding the successive minima of any specified form $f(x, y)$ with integer coefficients a, b, c and non-square discriminant D . This vastly increases our understanding of the subject. In addition to general theorems they give the values of $M(f)$ for practically all of the forms

$$f = x^2 - my^2 \quad (m \equiv 2, 3 \pmod{4}); \quad f = x^2 + xy - \frac{1}{4}(m-1)y^2 \quad (m \equiv 1 \pmod{4})$$

with $m \leq 100$ and the value of $M_2(f)$ for many of them. In particular, they disprove Rédei's assertion that the field of $97^{1/2}$ has a Euclidean Algorithm [Math. Ann. 118, 588—608 (1943)]. — In most of the cases investigated it is found that when $M(f; x_0, y_0) = M(f)$ or $M_2(f)$ the minimum (*) is attained. It is also found that in most cases there are only a finite number of points (incongruent modulo 1) at which $M(f)$ and $M_2(f)$ are taken, that these have rational co-ordinates and that they are permuted amongst themselves modulo 1 by the automorphs of the form. A striking exception to these generalisations are the forms $f = x^2 + (2n+1)xy - y^2$, where $n \geq 1$ is an integer. For these in addition to a finite number of rational points with $M(f; x_0, y_0) = M(f)$ for which the minimum (*) is attained there are infinitely many irrational points with $M(f; x_0, y_0) = M(f)$ for which the minimum (*) is unattained; nevertheless $M(f)$ is non-isolated and $M_2(f)$ is taken at only a finite number of (rational) points. For an announcement of some of this when $n = 1$, see K. Inkeri (this Zbl. 40, 309). The central idea of the new methods in the simplest case is as follows. Let $f(x, y)$ be a form, T an automorph of f and K a constant. Clearly $M(f; x_0, y_0)$ depends only on (x_0, y_0) modulo 1 and $M(f; x_0, y_0) = M(f; T(x_0, y_0))$. It is first shown that all the unit square $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ is covered by a finite number of hyperbolic regions $|f(u+x, v+y)| < K$ with integer u, v except for a finite number of regions R_1, \dots, R_n . Any point (x_0, y_0) with $M(f; x_0, y_0) \geq K$ is modulo 1 in one of R_1, \dots, R_n . It is also modulo 1 in one of the regions TR_1, \dots, TR_n so we can replace R_1, \dots, R_n by their intersections with $TR_1 \cup TR_2 \cup \dots \cup TR_n$ modulo 1. This process may then be repeated indefinitely. In the particular case when T is an automorph of infinite order and each R_j intersects at most one TR_j and at most one $T^{-1}R_j$ modulo 1 then it is shown (theorem D) that each R_j contains at most one point (x_0, y_0) with $M(f; x_0, y_0) \geq K$; which can be determined. To a small extent this use of the automorphs had been anticipated by Bamah (this Zbl. 44, 42), following a suggestion of the rev. but the authors prove much stronger results and use them systematically. They also give and use systematically a theorem enabling the boundaries of the regions R_1, \dots, R_n in most cases to be taken as straight lines; which very much simplifies the analysis. A considerable amount of detailed numerical work is required, most of which is suppressed in the paper.

J. W. S. Cassels.

Cassels, J. W. S.: Addendum to the paper „The inhomogeneous minimum of binary quadratic, ternary cubic, and quaternary quartic forms“. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 519—520 (1952).

Correction of a numerical mistake and slight improvement of one of the constants (see this Zbl. 46, 46).

K. Mahler.

Rogers, C. A.: The reduction of star sets. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 245, 59—93 (1952).

Let S be any point set, A a lattice in R_n . With a slight change of the usual notation [K. Mahler, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 187, 151—187 (1946)] the author calls A S -admissible if A contains no point $\neq 0$ of S ; he then puts $d(A) = \inf d(A)$ where A runs over the admissible lattices. Further A is a critical lattice of S if (1) $d(A) = \Delta(S)$, and (2) A is the limit of a sequence of admissible lattices. For both open sets and star bodies, these definitions agree with the usual ones. Let now Σ be any class of point sets in R_n . Then S is called reducible in Σ if there is a $T \in \Sigma$ which is a proper subset of S and for which $\Delta(T) = \Delta(S)$; and S is irreducible in Σ if no such T exists. — The classes considered are, the class Σ_1 of star sets (closed sets

S such that $\lambda S \subset S$ if $-1 \leq \lambda \leq 1$), the class Σ_2 of proper star sets (star sets of which 0 is an inner point and which are the closures of their interiors), the class Σ_3 of star bodies, and finally the classes Σ_1^* , Σ_2^* , Σ_3^* , formed by those elements of these three classes that are bounded by a finite number of algebraic surfaces. To express the results in a simple form, $X \in S$ is called a primitively irreducible point of S if there is a lattice A containing X such that $d(A) < A(S)$ and that every point of $A \cap S$ is an integral multiple of X . An irreducible point of S is defined as the limit of any convergent sequence of (different or equal) primitively irreducible points. An outer boundary point of S is a point $X \in S$ such that $\lambda X \notin S$ when $\lambda > 1$. The following results, among others, are now proved. (1) Let S be a proper star set with $A(S) < \infty$. Then S is irreducible in Σ_1 and also in Σ_2 if, and only if, every outer boundary point of S is irreducible. (2) A star body S with $A(S) < \infty$ is irreducible in Σ_3 if, and only if, it is irreducible in both Σ_1 and Σ_2 . (3) Let S be a star set with $A(S) < \infty$ containing 0 as an inner point. If S is irreducible in Σ_1 , every outer boundary point of S belongs to some critical lattice of S . (4) A bounded star set S with $A(S) > 0$ irreducible in Σ_1 is a proper star set. (5) Any bounded element of Σ_3^* satisfying $A(S) > 0$ which is reducible in Σ_1 can be reduced to an element of Σ_2^* which is irreducible in Σ_1 . — In an appendix an example of a star domain is given that contains no irreducible star domain of the same A . — Both the results and the methods of this paper are of great interest [for previous work on irreducibility, see, in particular, K. Mahler, *Nederl. Akad. Wet., Proc.* 49, 331–343, 444–454, 524–532, 622–631 (1946); C. A. Rogers (this Zbl. 37, 33)]. — The rev. notes that the assertion (b) of Theorem 2 of the paper, while true for star sets, may be false for more general sets. However, this does not affect the results. *K. Mahler.*

Malyšev, A. V.: Zum Minkowski-Hlawkaschen Satz über den Strahlkörper. *Uspechi mat. Nauk* 7, Nr. 2 (48), 168–171 (1952) [Russisch].

Es wird ein einfacher geometrischer Beweis des folgenden Satzes gegeben, der von Minkowski ausgesprochen und von Hlawka zuerst bewiesen wurde: Sei ein Gitter mit Determinante 1 gegeben. K sei Sternkörper in bezug auf den Ursprung 0. Wenn das Volumen $V = V(K) < \zeta(n) = 1 + 1/2^n + \dots$ ist, gibt es eine unimodulare Transformation \mathcal{Q} , die 0 festläßt, so daß $\mathcal{Q}K$ keinen Gitterpunkt enthält. Sei $V_g(K)$ das $[(n-1)\text{-dimensionale}]$ Volumen des Schnittes von K mit der Ebene $x_1 = g$. Zunächst wird der Körper in der x_1 -Richtung soweit gedehnt (in den x_2, \dots, x_n -Richtungen entsprechend zusammengezogen), daß für den neuen Körper K' gilt: $V(K') = V(K) = V$ und

$$\left| \sum_{g=l}^k \left(\frac{V_g(K')}{l^{n-1}} - \frac{V}{l^n} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad l = 1, 2, \dots, M$$

$$M = p_1 \dots p_m, \quad m \text{ so groß, daß } V \prod_{i=1}^m (1 - p_i^{-n}) + \varepsilon < 1, \quad \varepsilon > 0 \text{ beliebig.}$$

In jeder Gitterebene wird der Schnitt allen Gittertranslationen unterworfen und die so entstehenden $(n-1)$ -dimensionalen Figuren werden von 0 aus auf $x_1 = 1$ projiziert. Dabei werden die innerhalb einer gewissen Pyramide liegenden Gitterpunkte auf $x_1 = 1, 0 \leq x_i < 1, i = 2, \dots, n$ projiziert. Die Summe der $[(n-1)\text{-dim.}]$ Inhalte der Projektionen der zu diesen Gitterpunkten gehörigen Figuren wird als < 1 erwiesen. Daher gibt es einen Punkt $(1, b_2, \dots, b_n)$ der auf

keiner Projektion liegt und die Transformation $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ führt K in einen Körper über, der

höchstens noch auf $x_1 = 0$ Gitterpunkte enthält. Durch Anwendung des Verfahrens auf die übrigen Koordinatenachsen erhält man einen Körper, der außer 0 keinen Gitterpunkt mehr enthält. *K. Prachar.*

Bambah, R. P. and K. F. Roth: A note on lattice coverings. *J. Indian math. Soc.*, n. Ser. 16, 7–12 (1952).

Es sei $\vartheta(K)$ die Dichte der gitterförmigen Überdeckung des n -dimensionalen Raumes ($n \geq 2$) durch konvexe Körper K mit Mittelpunkt O . Ist weiter K symmetrisch in bezug auf alle Koordinatenebenen durch O , so zeigen die Verff.

$\vartheta(K) \leq \frac{\pi}{3^{1/3}} \frac{n^n}{n!}$. Für $n = 2$ wird das Resultat aus den Untersuchungen von

E. Sas und C. H. Dowker (zur Literatur vgl. die Arbeit des Ref., dies. Zbl. 35, 28) gefolgert. Der weitere Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach n unter Benutzung des Satzes von Brun-Minkowski. Entscheidend ist der folgende Hilfsatz: Ist $y = f(x) \geq 0$ von oben konvex in $[0, a]$ ($a > 0$) dann ist

$$\max_{0 \leq x \leq a} x y^{n-1} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \int_0^a y^{n-1} dx. \quad E. Hlawka.$$

ApSimon, H.: A method of finding the critical lattices of spheres containing the origin. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 91—93 (1952).

This note gives a rather superficial description of a method which the author uses in his thesis (Oxford) to find the critical determinant of a sphere with radius 1 and with its centre at a distance k (with $0 < k < 1$) from the origin. The critical determinant is $\frac{1}{2}(1 - k^2) \{(\sqrt{3})k + \sqrt{(2 + k^2)}\}$. C. A. Rogers.

Korobov, N. M. und A. G. Postnikov: Einige allgemeine Sätze über die Gleichverteilung der Bruchteile. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 217—220 (1952) [Russisch].

Let $h = 1, 2, 3, \dots$ and $\Delta_h F(x) = F(x + h) - F(x)$. By vander Corput (this Zbl. 1, 201) the uniform distribution (mod 1) of all $\Delta_h F(x)$ implies that of $F(x)$. The authors show that it also implies that of $F(\lambda x + \mu)$ for any fixed integers $\lambda \neq 0, \mu$; it is even permissible to take for λ certain functions of x , e. g. very slowly increasing integral valued step functions of x . K. Mahler.

Korobov, N. N.: Über normale periodische Systeme. Izvestija Akad. Nauk SSSR, n. Ser. mat. 16, 211—216 (1952) [Russisch].

Let n, q , and the „digits“ $\delta_1, \dots, \delta_\tau$ be integers satisfying $n \geq 1, q \geq 2, 0 \leq \delta_\nu \leq q - 1$. An n -digit number is any sequence $\delta_{\nu_1} \dots \delta_{\nu_n}$. Let E_n be a set of τ n -digit numbers. E_n is said to be derived from a normal periodic system if there exists a sequence of $\tau + n - 1$ digits

$$\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \delta_n \delta_{n+1} \dots \delta_\tau \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1}.$$

such that the τ n -digit numbers

$$\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n; \delta_2 \delta_3 \dots \delta_{n+1}; \dots; \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-1}$$

form the elements of E_n . It is known that the set of all different n -digit numbers has this property; for the literature see the author's earlier paper (this Zbl. 42, 49). In the present note, the author gives a necessary and sufficient condition for an arbitrary E_n to be derived from a normal periodic system. K. Mahler.

Analysis.

Mengenlehre:

Ohkuma, Tadashi: A note on the ordinal power and the lexicographic product of partially ordered sets. Kōdai math. Sem. Reports 1952, 19—22 (1952).

Verf. bemüht sich um eine Definition der ordinalen Potenz ${}^X Y$ zweier teilweise geordneter Mengen, so zwar, daß das Resultat wieder teilweise geordnet ist. Verf. beruft sich dabei auf die folgenden Arbeiten: [1] G. Birkhoff, dies. Zbl. 16, 387; [2] Lattice theory, New York 1948, dies. Zbl. 33, 101; [3] M. M. Day, Trans. Amer. math. Soc. 58, 1—43 (1945). Zu nennen wären ferner die vom Verf. nicht zitierten Arbeiten: [4] G. Birkhoff, Duke math. J. 9, 283—302 (1942); [5] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Berlin 1914. In [1] hat Birkhoff, in Verallgemeinerung der sogenannten initialen Ordnung von Hausdorff [5] p. 189, die folgende „ursprüngliche“ Definition der ordinalen Potenz angegeben: dies soll die Menge aller eindeutigen Abbildungen von X in Y sein, angeordnet nach folgender Vorschrift: $f \subseteq g$ soll bedeuten, daß es zu jedem „kritischen“ Element x_0 mit $f(x_0) \subsetneq g(x_0)$ ein „ausgleichendes“ Element x_1 gibt mit folgenden drei Eigenschaften: I. $x_1 \subseteq x_0$, II. $f(x_1) \subsetneq g(x_1)$, III. $x_2 \subseteq x_1 \rightarrow f(x_2) \subseteq g(x_2)$. Diese Definition scheint Verf., obwohl er [1] zitiert, unbekannt zu sein; denn sie liefert, wie Ref. in seiner Dissertation gezeigt hat, in der Tat eine teilweise geordnete Menge, wodurch m. E. alle weiteren Bemühungen gegenstandslos werden. — In [2], [3] und [4] — nicht dagegen, wie Verf. behauptet, in [1] — wurde eine „abgeänderte“ Definition der ordinalen Potenz angegeben. Die Modifikation bestand im wesentlichen darin, daß die Forderung III an die „ausgleichenden“ Elemente x_1 fortgelassen wurde. Verf. geht nun von folgenden wohlbekannten Feststellungen aus: 1. die „abgeänderte“ Definition ([2], [3] und [4]) liefert im allgemeinen keine teilweise Ordnung; 2. sofern X die Minimalbedingung erfüllt, ist dies jedoch der Fall (dann stimmt nämlich die „abgeänderte“ mit der „ursprünglichen“ Definition von [1] und [5] überein). Verf. definiert nun, nach Wahl eines Elements $y_0 \in Y$, als ordinale Potenz ${}^X Y \langle y_0 \rangle$ die Menge

aller eindeutigen Abbildungen f von X in Y , welche die Eigenschaft besitzen, daß das Urbild $f^{-1}(Y - \{y_0\})$ die Minimalbedingung erfüllt. Als Anordnungsvorschrift nimmt Verf. die „abgeänderte“ ([2], [3] und [4]). Tatsächlich erhält man in der so eingeschränkten Menge auf diese Weise eine teilweise Ordnung, weil nämlich hier die „abgeänderte“ Definition mit der „ursprünglichen“ übereinstimmt. Die „ursprüngliche“ Definition leistet aber viel mehr; denn sie liefert ja eine teilweise Ordnung der vollen Menge aller eindeutigen Abbildungen von X in Y . Verf. bemerkt, daß, im Falle Y homogen ist, die Ordnungsstruktur von ${}^X Y < y_0 >$ von der Wahl von y_0 nicht abhängt, und er schließt daraus, daß seine Definition im homogenen Falle nützlich erscheine. Dieser Ansicht kann sich Ref., aus den angegebenen Gründen, nicht anschließen.

Jürgen Schmidt.

Vagner, V. V.: Zur Theorie der partiellen Transformationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 653—656 (1952) [Russisch].

$\mathfrak{M}(A \times A)$ étant l'ensemble des relations biunivoques de A dans A (c'est-à-dire l'ensemble des relations binaires R telles que $RR^{-1} \cup R^{-1}R \subset A$) la relation d'inclusion de deux éléments de \mathfrak{M} et la propriété pour un élément de \mathfrak{M} d'être symétrique (R est symétrique si $R = R^{-1}$) peuvent se caractériser en faisant intervenir seulement la composition des relations. — Dans la seconde partie de cette note l'A. démontre que si B est un sous-ensemble de A ayant même puissance que son complémentaire, toute relation biunivoque de B dans B peut être prolongée en une permutation de A [plus précisément: si $\mathfrak{S}(A \times A)$ est le groupe symétrique de A , $\mathfrak{M}(B \times B) = \Delta_B \mathfrak{S}(A \times A) \Delta_B$].

J. Riguet.

Fraïssé, Roland: Sur certains systèmes de relations qui généralisent les systèmes de base finie. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1116—1119 (1952).

Verf. definiert den Begriff der Multirelation nunmehr als Spezialfall seiner früher definierten Polyrelation (dies. Zbl. 40, 164), mit der er bis dahin synonym war: i durchlaufe eine endliche Menge von Indizes, n_i eine Folge positiver ganzer Zahlen und E sei eine beliebige Menge, genannt Basis. Jedem i sei eine Relation A_i zur Basis E von n_i Argumenten (d. h. eine zweiwertige Funktion von n_i Variablen aus E) zugeordnet. Diese Zuordnung repräsentiert dann eine sog. Multirelation M . Betrachtet man die A_i nur auf einer Teilmenge F von E , so heiße die entsprechende Multirelation M' zur Basis F eine Restriktion von M und M eine Verlängerung von M' . — Sind M und M' zwei Multirelationen über den Basen E und E' und ist φ eine eindeutige Abbildung von E auf E' , so heißt φ ein Isomorphismus von M auf M' , wenn die Werte von M aus denen von M' hervorgehen bei Ersetzung von x durch $\varphi(x)$. Ist $F \subset E \cap E'$ und bleibt F elementweise ungeändert bei φ , so heißen M und M' isomorph bezüglich F . Ist $E = E'$ und φ ein Isomorphismus von M auf sich selbst, der M nicht ändert, so heiße φ ein Automorphismus von M . — Ist E unendlich, F endliche Teilmenge von E und sind die Restriktionen von M auf Teilmengen, die außer den Elementen von F noch n weitere Elemente von E enthalten, paarweise isomorph bezüglich F für jede ganze Zahl n , so heiße M monotyp bezüglich F . M heiße monotyp, wenn ein F existiert, bezüglich dessen M monotyp ist. — Ist wieder E unendlich und F endliche Teilmenge von E , so heißt M subfinit bezüglich F , wenn jede Permutation von E , die alle Elemente von F in Ruhe läßt, ein Automorphismus von M ist. M heißt subfinit, wenn es ein F gibt, bezüglich dessen es subfinit ist. — Es wird eine Reihe von Sätzen hinsichtlich der genannten Begriffe angegeben, z. T. unter Bezugnahme auf in früheren Mitteilungen definierte Begriffe.

W. Neumer.

Vaughan, Herbert E.: Wellordered subsets and maximal members of ordered sets. Pacific J. Math. 2, 407—412 (1952).

As a generalization of Hessenberg's and Milgram's results [cf. J. reine angew. Math. 135, 81—133 (1909) and this Zbl. 22, 121 respectively] the following theorem (Th. 1) quoted textually is proved without using ordinal numbers: „Let M be ordered by $<$, $a \in M$, and u a function which assigns an upper bound to every bounded subset of M in such a way that: if $N, P \subset M$ and have a common greatest member then $u(N) = u(P)$; while if $A \subset N$, $P \subset M$, and neither has a greatest member but both have the same nonempty set of upper bounds, then $u(N) = u(P)$; and, finally, $u(A) = a$. Let \mathfrak{N} be the class of all sets $N \subset M$ each of which is well ordered by $<$ and has the property that, for every $n \in N$, we have $n = u(N_n)$. Let \mathfrak{P} be the class of all sets $P \subset M$ each of which has the property that, for every bounded set $N \subset P$ which contains no upper bound of P , we have $u(N) \in P$, while if $N \subset P$ and contains an upper bound m of P , we have $u(N) \leq m$. Then the greatest member of \mathfrak{N} and the least member of \mathfrak{P} exist and are the same set,

$M(u)$. The least member of $M(u)$ is a , and if $M(u)$ is bounded it has a greatest member m , and $u(M(u)) \leq m$. A necessary and sufficient condition that an $m \in M(u)$ be the greatest member of $M(u)$ is that $u(\{m\}) \leq m$.“ Several wellknown theorems of the problematic Zermelo-Zorn can be easily deduced from that statement. — Definitions: $<$ denotes any binary transitive relation. Bounded \Leftrightarrow have an upper bound; well ordered \Leftrightarrow every non vacuous subset has a unique least element. $N_n =$ set of all $x \in N$ such that n non $\leq x$. G. Kurepa.

Kurepa, Georges: Deux conséquences équivalentes, relatives aux nombres ordinaux, de la bonne ordination du continu linéaire. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 175—177 (1952).

Verf. zeigt, daß aus der Annahme: „Die Menge der reellen Zahlen läßt sich effektiv wohlordnen“ die beiden einander gleichwertigen Aussagen folgen: 1. Zu jeder Limeszahl $\lambda < \omega_1$ läßt sich effektiv eine Fundamentalfolge $v_n(\lambda) \rightarrow \lambda$ angeben. — 2. Die Menge aller Ordnungszahlen $< \alpha$ kann bei beliebigem $\alpha < \omega_1$ effektiv abgezählt werden. W. Neumer.

Neumer, Walter: Zum Beweis eines Satzes über die Polynomdarstellung der Ordnungszahlen. Math. Z. 55, 399—400 (1952).

Eine Endlichkeitsbehauptung über gewisse Exponentenfolgen bei der Polynomdarstellung von Ordinalzahlen (vgl. dies. Zbl. 39, 281), zu deren Beweis ursprünglich graphentheoretische Hilfsmittel herangezogen wurden, wird hier sehr einfach rein mengentheoretisch durch Zurückführung auf eine absteigende Folge von Ordinalzahlen bewiesen. Th. Kaluza jr.

Rothberger, Fritz: On the property C and a problem of Hausdorff. Canadian J. Math. 4, 111—116 (1952).

Verf. bringt die von ihm schon früher behandelte Frage nach der Existenz von un abzählbaren C -Mengen in Verbindung mit dem Hausdorffschen Problem der Existenz von Ω -Limites in der teilweise geordneten Menge der dyadischen Folgen aus den Ziffern 0 und 1. (Vgl. dies. Zbl. 32, 337.) — Eine lineare Menge E hat die Eigenschaft C'' , wenn jede Doppelfolge von Intervallen I_{mn} , welche die Bedingung $E \subset \sum_n I_{mn}$ für jedes m erfüllt, eine Diagonalfolge $I_{1n_1}, I_{2n_2}, \dots$

I_{mn_m}, \dots enthält, so daß $E \subset \sum_m I_{mn_m}$ gilt. Es läßt sich zeigen, daß jede C'' -Menge eine C -Menge ist. (Eine lineare Menge E hat die Eigenschaft C , wenn es zu jeder Folge a_n von positiven reellen Zahlen eine Folge von Intervallen I_n der Länge a_n gibt mit $\sum_n I_n \supset E$. Ref.). — Folgende

Sätze werden bewiesen. 1. Aus der Nichtexistenz von Ω -Limites folgt, daß jede lineare Menge der Mächtigkeit \aleph_1 die Eigenschaft C'' und damit C hat. — 2. Die Nichtexistenz von Ω -Limites gestattet folgende Aussage: Zu jeder Menge $\{E^\alpha\}_{\alpha < \Omega}$ von \aleph_1 unendlichen Mengen natürlicher Zahlen gibt es eine Menge D , so daß $E^\alpha \cap D$ und $E^\alpha \cap CD$ für jedes α unendliche Mengen sind (unter CD das Komplement von D verstanden). — 3. Die Nichtexistenz von Ω -Limites zieht die Aussage nach sich: Die Summe von \aleph_1 linearen Mengen erster Kategorie ist wieder von erster Kategorie. — Aus dem dritten Satz folgen dann die beiden ersten Sätze. W. Neumer.

Bagemihl, Frederick: A theorem on intersections of prescribed cardinality. Ann. of Math., II. Ser. 55, 34—37 (1952).

Wenn man jeder geraden Linie l einer euklidischen Ebene eine Kardinalzahl α_l mit $2 \leq \alpha_l \leq \aleph_0$ zuordnet, so gibt es eine Punktmenge in dieser Ebene, die mit jeder Geraden l genau α_l verschiedene Punkte gemein hat. Ein analoger Satz gilt, wenn man an Stelle der Geraden die Geraden und nichtsingulären Kegelschnitte der Ebene betrachtet. — Diese und andere derartige Sätze ergeben sich als Spezialfälle eines allgemeinen Theorems, dessen Beweis auf Grund des Wohlordnungssatzes verhältnismäßig leicht geführt wird, dessen Formulierung jedoch fast eine halbe Druckseite benötigt. W. Neumer.

Ribeiro de Albuquerque, J.: Théorie des ensembles projectifs. Portugaliae Math. 11, 11—33 (1952).

Le travail constitue un résumé de la thèse présentée à la Fac. des Sciences de Lisbonne. La terminologie, la problématique et la méthodique se rattachent à celles de: Lusin, Ensembles

analytiques, Paris 1930, p. 16 — 238. On y trouve exposée la solution d'un problème de Lusin (loc. cit., p. 123). — I étant un ensemble donné, soit I_0 une famille d'ensembles $\subseteq I$ telle que la condition \mathfrak{M}_1 que voici soit vérifiée: si $X \in I_0$, alors CX est la réunion d'un nombre $\leq \aleph_0$ d'ensembles disjoints $\subseteq I$ (donc l'ensemble vide $\emptyset \in I_0$; en particulier CX peut être un élément de I_0). B_1 étant le plus petit σ -corps $\supseteq I_0$, soit A_1 la famille des ensembles analytiques de Suslin engendrés par B_1 ; par l'induction on définit, de la même façon, les familles B_n, A_n pour toute $0 < n < \omega$ (et même pour chaque ordinal > 0 en désignant en particulier pour chaque ordinal limite λ , par A_λ la réunion des $A_\alpha, \alpha < \lambda$). Par analogie à ce qui se passe dans le cas $n = 1$ (cf. Lusin, loc. cit.) l'A. introduit dans B_n une classification de Baire, l'accessibilité, séparabilité, la notion de base, d'éléments etc. et démontre quelques théorèmes correspondants. Pour transmettre dans le nouveau cadre la notion de sous-classes de Lavrentiev-Lusin, l'A. définit des ensembles clairsemés d'éléments de classes K_α de B_n (p. 19; cf. Lusin, loc. cit. 111) et résout un problème de Lusin (v. Lusin, loc. cit. 123 en bas). Par la méthode des cribles, l'A. prouve un th. (Th. 6) à partir duquel il conclut que la classe B_{n+1} coïncide avec l'intersection de la classe A_{n+1} et de la classe CA_{n+1} des complémentaires des $X \in A_{n+1}$ (le cas $n = 0$ se réduit au th. bien connu de Suslin). Enfin, l'A. indique, sans démonstration, que dans sa thèse on trouve d'autres résultats non publiés, en particulier „au dernier chapitre on peut trouver les solutions proposées à plusieurs problèmes énoncés par Lusin dans son livre“.

G. Kurepa.

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

● Quinet, J.: Cours élémentaire de mathématiques supérieures. Tome III: Calcul intégral et premières applications. Préface de R. Barthélemy. (Bibliothèque de l'enseignement technique.) Paris: Dunod 1952. VIII, 214 p. broché 880 F.

Der dritte Band dieses für Ingenieure geschriebenen Leitfadens der Höheren Mathematik bringt eine Darstellung der Integralrechnung und ihrer Anwendungen. Auswahl und Anordnung des Stoffes entsprechen der bei elementaren Darstellungen dieser Art üblichen. Im ersten Teil des Bandes werden der Integralbegriff erläutert und die Integrationsmethoden der elementar integrierbaren Funktionen vorgeführt, beides in dem Ausmaß, wie es für Studierende der Technik erforderlich ist. Im zweiten Teil, der die Hälfte des Bandes ausmacht, werden in Verbindung mit zahlreichen, bis ins einzelne durchgerechneten Beispielen die Anwendungsmöglichkeiten der Integralrechnung dargelegt (Mittelwerte von Funktionen, Inhalte ebener Flächenstücke, Kurvenlängen, Oberflächen und Volumina von Rotationskörpern, Schwerpunktsbestimmungen). Dazu kommen noch zahlreiche Beispiele, die technischen Problemstellungen entnommen sind. So kommt es, daß das Hauptgewicht der Darstellung auf ihrem zweiten Teil liegt. — Bei der Abfassung des Buches hat sich Verf. das Ziel gesetzt, den Ingenieur-Studierenden eine allgemein verständliche Anleitung zum Gebrauch mathematischer Methoden bei technischen Problemen zu geben. Verf. ist in seinem Entgegenkommen gegenüber den Technikern so weit gegangen, daß dabei die Darstellung des Integralbegriffes zu primitiv ausgefallen ist.

W. Quade.

● Picone, Mauro e Tullio Viola: Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione. (Manuali Einaudi. Serie di matematica.) Torino: Edizioni Scientifiche Einaudi 1952. 404 p. L. 5000.

Ce manuel fournit un exposé clair et complet de la théorie de l'intégrale de Stieltjes dans l'espace cartésien à r dimensions S_r . Après une introduction, où les A.A. montrent par deux exemples que l'intégrale de Stieltjes, souvent ignorée des cours de Mécanique, y joue en réalité un rôle indispensable, ils traitent successivement les points suivants: I. Ensembles de points et ensembles ordonnés d'opérations dans S_r . Notions classiques sur les ensembles. Limite suivant le filtre des sections d'un ordonné filtrant. Filtre \mathfrak{F} des décompositions de S_r en parallélépipèdes d'arêtes parallèles aux axes. II. Variations des fonctions d'intervalle. III. Intégrale de Riemann-Stieltjes: elle est définie comme une limite suivant le filtre des sections à droite de l'ensemble, ordonné par inclusion, des fermés sur lesquels la fonction à intégrer est continue. V. Masse lebesguienne des ensembles de points. Ensembles lebesguiniens. VI. Fonctions quasi-continues. VII. Intégration des fonctions quasi-continues et sommables. VIII. Sur les suites de fonctions sommables. IX. Fonctions complexes. Convergence en moyenne. Applications à l'espace de Hilbert. X. Formules de réduction des intégrales. XI. Intégrale de Lebesgue-Stieltjes

relativement à une fonction déterminante de point (c'est-à-dire à une fonction de répartition au sens du calcul des probabilités). Ce dernier point de vue a l'avantage aux yeux du Ref. de permettre la définition de l'intégrale de Stieltjes dans des espaces topologiques ordonnés beaucoup plus généraux que S_r (cf. Ref., ce Zbl. 42, 117). XII. Fonctions additives d'ensembles. XIII. Décomposition canonique des fonctions additives. XIV. Dérivation des fonctions additives.

A. Revuz.

Nunke, R. J. and L. J. Savage: On the set of values of a nonatomic, finitely additive, finite measure. *Proc. Amer. math. Soc.* 3, 217—218 (1952).

Der Wertbereich eines abzählbar additiven, atomfreien, nichtnegativen, endlichen Maßes ist ein abgeschlossenes Intervall (vgl. Halmos, dies. Zbl. 33, 51). Verff. zeigen nun an einem Beispiel, daß dies für ein endlich-additives Maß nicht stets zu gelten braucht.

D. A. Kappos.

Besicovitch, A. S.: On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure. *Indagationes Math.* 14, 339—344 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 55, 339—344 (1952).

Let A be any subset of the Euclidean space E_n . The following statement is proved: If a closed set A has infinite s -dimensional Hausdorff measure, $0 < s \leq n$, then A has subsets B of any finite measure.

L. Cesari.

Taylor, S. J.: On Cartesian product sets. *J. London math. Soc.* 27, 295—304 (1952).

In Weiterführung von Arbeiten von H. G. Eggleston (dies. Zbl. 38, 37) sowie von A. S. Besicovitch und P. A. Moran [*J. London math. Soc.* 20, 110—120 (1945)] wird unter anderem folgendes gezeigt: (I) Ist A eine lineare Menge vom a -Maß Null (vgl. dies. Zbl. a. a. O.), dann existiert eine lineare perfekte Menge B derart, daß $A \times B$ das a -Maß Null besitzt. Dies wird auch auf den Fall verallgemeinert, daß in der Definition des Hausdorffmasses $(d_r)^a$ ersetzt wird durch $\Phi(d_r)$, wobei $\Phi(x) > 0$ stetig sowie wachsend ist für $x > 0$ und $\Phi(0) = 0$ (vgl. dies. Zbl., a. a. O.). — (II) Mit Hilfe von (I) folgert man: Hat A die Dimension a mit $0 < a \leq 1$, so existiert ein perfektes nulldimensionales B , für welches die Dimension von $A \times B$ gleich der von A ist. — (III) Hat die nulldimensionale Menge B die Eigenschaft, daß für jede lineare Menge A vom a -Maß Null auch $A \times B$ a -Nullmenge ist, und besitzt B Kontinuumsmächtigkeit, so kann B keine perfekte Teilmenge besitzen.

Haupt.

Aquaro, Giovanni: Sopra un teorema di H. Lebesgue. *Portugaliae Math.* 11, 75—88 (1952).

L'A. donne une démonstration du théorème classique relatif à la dérivation des fonctions d'ensembles additives et absolument continues dans l'espace euclidien à r dimensions, en utilisant les réseaux de Ch. de la Vallée Poussin et sans faire intervenir la notion d'intégrale.

A. Revuz.

Hayes, Charles A.: Differentiation of some classes of set functions. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 48, 374—382 (1952).

In a previous paper (this Zbl. 46, 56) the author defined a property for blankets, which he called „pseudo-strength“ weaker than the „strong“ Vitali property, but securing nevertheless the existence and finiteness p. p. (i. e. Φ -almost everywhere) of the derivative for any Radon measure. The pseudo-strength property allows some overlapping of the countable family \mathcal{G} and the control is expressed in terms of the Radon measure to differentiate. In the present paper, de Possel's „weak“ Vitali property (this Zbl. 15, 205) is generalized into the following „ $L^{(p)}$ -overlap property“: Corresponding to any $\varepsilon > 0$ and any subblanket G of F , with domain B , there exists a countable subfamily \mathcal{G} of the spread of G for which $\Phi(B - \sigma\mathcal{G}) = 0$ and $\int_{\sigma\mathcal{G}} (P_{\mathcal{G}}(x) - 1)^p \cdot d\Phi(x) < \varepsilon$, where p denotes any fixed number ≥ 1 . In de Possel's case $p = 1$.

Theorem — If F possesses the $L^{(p)}$ -overlap property for a fixed $p > 1$, then the indefinite integral Ψ of any $L^{(q)}$ -function $u \geq 0$, where $p^{-1} + q^{-1} = 1$, has for Φ -almost all x in the domain of F a finite F -derivative in x . Sketch of the proof: F' representing a subblanket of F with bounded domain B' , there exists an open set α including B' such that $\Psi(\alpha) - \Psi(B')$ be small. The constituents of F' not included in α are discarded and a countable family with small $L^{(p)}$ -overlap is extracted from the reduced blanket. The crux of the proof is the application

of Hölder's inequality to the R. H. S. of the equality $\sum_{t \in \mathfrak{G}} \Psi(t) - \Psi(\sigma \mathfrak{G}) = \int_{\sigma \mathfrak{G}} (P_{\mathfrak{G}}(x) - 1) \cdot u(x) \cdot d\Phi(x)$. The rest of the proof follows A. P. Morse's pattern. [Remarks by the reviewer: (R1) Hölder's inequality establishes the pseudo-strength property restricted to the integrals Ψ of $L^{(q)}$ -functions. De Possel's technique used in the proof of his Theorem IV yields the author's theorem and in addition the equality p. p. of the F -derivative with u . (R2) The Theorem remains valid if we define an $L^{(q)}$ -function as a Φ -measurable function whose q th power has a finite integral over any bounded measurable set. This minor extension is necessary in order to interpret de Possel's differentiation theorem for the integrals of measurable bounded functions as a limiting case, namely for $p = 1$, when the Φ -measure of the space \mathfrak{S} is infinite]. Counter-example: $\mathfrak{R}_2 (= \mathfrak{E}^*)$: Euclidean plane. S : open unit square with principal vertices at $(0, 0)$ and $(1, 1)$. \mathfrak{P}_n : set of points of the form $(r/2^n, s/2^n)$, (r, s) : arbitrary integers). p : fixed number > 1 . I : any square with center at $t \in \mathfrak{P}_n$ and sides of length $2^{-(n+2np)}$ and parallel to the axes. \mathfrak{Q}_n : family of the squares I . \mathfrak{Q}'_n : family of the „mutilated squares“ $I' = I - \sum_{m \geq n+1} \sigma \mathfrak{Q}_m$. f_n : func-

tion defined in \mathfrak{R}_2 by $f_n(t) = n^p 2^{4n(p-1)}$, when $t \in S \cdot \sigma \mathfrak{Q}'_n$, $f_n(t) = 0$ when $t \in (\mathfrak{R}_2 - S \cdot \sigma \mathfrak{Q}'_n)$. $g(t) = \sum_{m \geq 1} f_m(t)$. $H_{n,t}$, $I_{n,t}$: closed squares, centred at t , with sides parallel to the axes, the sides

of $H_{n,t}$ being of length 2^{-n} , and those of $I_{n,t}$ being of length $(2l_n + 1) 2^{-n}$, where $l_n = 1 +$ integral part of $n^{-1/2} \cdot 2^{2n}$. $J_{n,t} = H_{n,t} + I_{n,t} \sigma \mathfrak{Q}'_n$. n is called the „rank“ of $J_{n,t}$. $K(t)$ = family of the $H_{n,t}$ ($n = 1, 2, \dots$). $G(t)$ = family of the $J_{n,t}$ ($n = 1, 2, \dots$). Theorem:

(1) $g \in L^{(q)}$ for $1 \leq q' < p/(p-1)$. (2) The G -derivative of Ψ is everywhere $= \infty$. (3) G possesses the $L^{(p)}$ -overlap property. Hint to the proof of (3): $H_{n,t}$ being regarded as the „nucleus“ of $J_{n,t}$, its points are called „inner“ points of $J_{n,t}$, and the other points „outer“ points of $J_{n,t}$. Using an upper bound previously obtained (this Zbl. 40, 385) for the number of disjointed translates α of a symmetrical closed convex set α_0 for which $\alpha \cdot \alpha_0 \neq \emptyset$, an upper estimate $P(i)$ is given for the multiplicity $P_{\mathfrak{G}}(t)$, when t is an outer point of a set of rank i belonging to a countable subfamily \mathfrak{G} of the spread of G such that no two \mathfrak{G} -sets have inner points in common. Integrating $(P_{\mathfrak{G}}(t))^p$ yields then an upper estimate $A_{k,p}$ for the $L^{(p)}$ -overlap of \mathfrak{G} , when all \mathfrak{G} -sets have rank $\geq k$. By application of the (strong) Vitali theorem for K and control of the rank k , G is easily shown to possess the $L^{(p)}$ -overlap property. This illuminating example presents the same features as those in the paper quoted in the first line. The constituents of G are squares $H_{n,t}$ with satellites, the satellites of $H_{n,t}$ being this time the parts of the mutilated squares of \mathfrak{Q}'_n situated on the „expansion“ $I_{n,t}$ of $H_{n,t}$. The presence of the satellites prevents again G from enjoying the strong Vitali property, but the relative weight of the satellites tending to 0 when $n \rightarrow \infty$, the $L^{(1)}$ -overlap property is certainly valid. It is a definite merit of the author to have been able to regulate the satellites in order to achieve for an arbitrary fixed $p > 1$, the $L^{(p)}$ -overlap property, while it ceases to be true for any $p' > p$. A chain of properties has been set up, enabling a better insight into the relations between the „differentiation power“ of a derivation basis and the „regularity“ of its constituents and of their pointwise convergence. As an extreme case, the reviewer wishes to mention that the Differentiation Theorem (in the sense of de Possel) is valid for a general B -blanket, provided the set function to differentiate be the integral of a p. p. essentially continuous function. Chr. Pauc.

Hadwiger, Hugo: Über addierbare Intervallfunktionale. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 33—37 (1952).

Mit Hilfe einer Hamelschen Basis für die reellen Zahlen werden alle translationsinvarianten und additiven Intervallfunktionen (im k -dimensionalen Raum) in expliziter Form angegeben und Folgerungen daraus gezogen, welche einen klassischen Satz von M. Dehn [Math. Ann. 57, 314—322 (1903)] über Zerlegungen von Rechtecken in Rechtecke verallgemeinern: 1. Zwei k -dimensionale Intervalle mit den Kantenlängen a_i bzw. b_i ($i = 1, \dots, k$) sind dann und nur dann zerlegungsgleich, wenn bei geeigneter Numerierung die Verhältnisse $r_i = a_i/b_i$ rational sind und $r_1 \cdots r_k = 1$ ist. 2. Ein Intervall mit den Kantenlängen a_i läßt sich dann und nur dann in Würfel zerlegen, wenn alle $r_i = a_i/a_{i+1}$ (mit $a_{k+1} = a_1$) rational sind und $r_1 \cdots r_k = 1$ gilt. G. Aumann.

Reifenberg, E. R.: Parametric surfaces. II. Tangential properties. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 46—69 (1952).

Let Φ be any continuous mapping from the closed disc H into E_3 , S the Frechet surface represented by Φ , (P, Q) any Φ -element (see this Zbl. 44, 280) with $QH^* = 0$, $C = C(P, \vartheta, r)$ the cylinder whose axis is the direction ϑ through P and whose

right section is a circle of radius r , M' the set of the interior points of the closure of the component containing Q of the set of points of H whose Φ -image is interior to C , $M = M(P, \vartheta, r)$ the simply connected closed set obtained from M' by adding all its interior complementary regions, in the boundary of M . It is not restrictive to suppose that Φ is light in H . Then $M(P, \vartheta, r)$ is a simple Jordan region. A plane π passing through P whose normal is a direction ϑ is said to be an approximative tangential plane to S at (P, Q) if, for sufficiently small r , the curve $\Phi(m)$, image of m , lies on the surface of $C(P, \vartheta, r)$, cannot be deformed into a point thereon, and $\Delta^2 \Phi(M) \sim \pi r^2$ as $r \rightarrow 0$. Let T be the set of the Φ -elements (Q, P) of S with $QH^* = 0$ where there is an approximative tangent plane. Then the following theorem is proved: I. If $L(S) < +\infty$, then $L(S) = \Delta^2(T)$. Thus the 2-dim. Hausdorff measure of the set of points of the surface where an approximate tangent plane exists is equal to the Lebesgue area of the surface S . Equivalent definitions of approximative tangential plane are given and density theorems are proved. Tangential properties for Hausdorff measure have been given by A. S. Besicovitch [Math. Ann. 98, 422 (1927)], by A. P. Morse and J. F. Randolph [Trans. Amer. math. Soc. 55, 236 (1944)] and by H. Federer (this Zbl. 32, 149). Tangential properties for Lebesgue area have been given by L. Cesari (this Zbl. 31, 15).

L. Cesari.

Silverman, Edward: A note on area. Proc. Amer. math. Soc. 3, 86—87 (1952).

The present paper deals with the problem of the axiomatic definition of area of a continuous mapping \bar{x} (surface) from the unit square Q into a metric space D . A previous result of the author (see this. Zbl. 44, 279) assures that for any mapping \bar{x} there is an isometric mapping x from Q into m , the space of the bounded sequences. If $\alpha(x)$ denotes any area defined for mappings x from Q into m , let us suppose that $\alpha(x)$ satisfies the following quite natural conditions: (1) If \bar{x} maps Q into E_3 and is sufficiently smooth (for instance Lipschitzian), then $\alpha(x)$ coincides with the generally accepted area of \bar{x} . (2) α satisfies the Kolmogoroff principle, that is, if x, y are any two mappings from Q into m and $\|x(p) - x(q)\| \leq \|y(p) - y(q)\|$ for all $p, q \in Q$, then $\alpha(x) \leq \alpha(y)$. Most of the known definitions of area satisfy these properties. Let μ be a measure in m such that if $G \subset m, H \subset E_3$ are any two isometric sets, then $\mu(G)$ is equal to the three dimensional Lebesgue measure of H in E_3 . The author proves the remarkable statement that each area α , satisfying (1) and (2) must suffer from one, at least, of the following two maladies: (i) there exists a mapping whose area is finite and whose range has positive μ -measure; (ii) there exists a mapping whose area is infinite and whose range is a (simply covered) simple arc.

L. Cesari.

Federer, Herbert: Measure and area. Bull. Amer. mat. Soc. 58, 306—378 (1952).

Let X be any locally compact, locally connected, separable subset of a triangulable k -dimensional manifold and let $C_n(X)$ be the family of all continuous mappings $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in E_n$, from X into E_n . Let $\mu(f, X, y)$, $y \in E_n$, be a function defined for each $f \in C_n(X)$ and suppose that, for each $y \in E_n$, $\mu(f, X, y)$ is either a non-negative integer, or ∞ , and gives a sensible appraisal of the multiplicity with which the mapping f assumes the value y . Let Y_m , $m = 0, 1, \dots, \infty$, be the set of all $y \in E_n$ where $\mu(f, X, y) = m$, let $H_k(Y_m)$ be the k -dimensional Hausdorff measure of Y_m , and let $H_k(f) = H_k(Y_1) + 2 H_k(Y_2) + 3 H_k(Y_3) + \dots + (\infty) H_k(Y_\infty)$, (by $\infty \cdot a$ it is meant 0 if $a = 0$, ∞ if $a > 0$). Then $H_k(f)$ can be considered as a k -dim. area of the mapping f with respect to the multiplicity function μ . The Lebesgue area $L_2(f)$ of a mapping f from a 2-manifold X into E_n has been recently successfully studied and a great deal of information is now available especially for the case $n = 3$ and X a 2-cell. The main theorems for the Jordan length have been extended to the Lebesgue area, while many other definitions of area obtained by geometric, topological, integral-geometric considerations have been proved to coincide with the Lebesgue area. The Lebesgue area, because of its property of lower semicontinuity, is a powerful tool in the calculus of variations. — A k -dimensional Lebesgue area $L_k(f)$ can be defined for all mappings $f \in C_n(X)$, that is, in the same general conditions

in which $H_k(f)$ has been defined above. Therefore the following important question arises: Is it possible to define the multiplicity function $\mu(f, X, y)$ in such a way that (*) $H_k(f) = L_k(f)$ for all $f \in C_n(X)$? In case X is a 2-cell and $n = 3$, the present paper gives an affirmative answer to this question. — For each subset $V \subset X$ let $\lambda_k(f, V)$ denote the k -dim. Lebesgue area $L_k(f, V)$ of the mapping defined by f on V , if V is finitely triangulable. Otherwise let $\lambda_k(f, V) = \sup L_k(f, W)$ for all finitely triangulable subsets $W \subset V$. For any point $x \in X$ and $r > 0$ let $A_r(x, r)$ be the component containing x of the sets of all $x' \in X$ such that $|f(x) - f(x')| < r$. Then each point $x \in X$ belongs to the subset A of X defined as the limit $A = \lim A_r(x, r)$ as $r \rightarrow 0$. Any two sets A and B as above and not disjoint necessarily coincide and $A_r(x, r)$ is the same set for any $x \in A$ and is denoted by $A_r(A, r)$. The collection M_f of all the distinct sets A is a partition of X in disjoint sets. A metric can be introduced in M_f by defining as distance $d_f(A, B)$ between two elements A, B of M_f the number $d_f(A, B) = \inf \text{diam } f(W)$ for all compact connected subsets $W \subset X$ with $WA \neq \emptyset$, $WB \neq \emptyset$, whenever some sets W exist with such properties, otherwise $d_f(A, B) = \infty$ [the value ∞ for d_f can be avoided by replacing d_f by $d_f(1 + d_f)^{-1}$]. M_f is the middle space of f and, as usual, by considering the monotone mapping m from X onto M_f which maps each point $x \in A$ into A itself, f has a monotone light factorization $f = lm$. Let $\alpha(k)$ be the k -dim. Lebesgue measure of the k -dim. unit sphere in E_k and let $L_k^*(f, A)$, $L_{k*}(f, A)$ be the lim sup and lim inf as $r \rightarrow 0$ of the ratio $\lambda_k[f, A_r(A, r)]/\alpha(k) r^k$ for each element $A \in M_f$. Then L_k^* , L_{k*} are the upper and lower densities of the Lebesgue area L_k at A on M_f . The author proves in various cases, for instance for $k = 2$, $n = 3$, X a 2-cell, that L_k^* and L_{k*} are integer and equal almost everywhere in M_f . This result is essentially the main tool for solving the problem stated above. Besides, the author makes use of a characterization of Rado's multiplicity function for mappings from X into E_k in terms of Čech's cohomology theory, of various connections of the concepts above with Favard's integral-geometric measure, and of some previous results of the author (this Zbl. 32, 149) and of the rev. (this Zbl. 27, 206; 2 reviews). By defining the multiplicity function $\mu(f, X, y)$ as the sum $\mu(f, X, y) = \sum L_{k*}(f, A)$ for all $A \in M_f$ such that $l(A) = y$, one of the possible multiplicity functions μ for which (*) holds is obtained.

L. Cesari.

Giorgi, Ennio de: Sulla sommabilità delle funzioni assolutamente integrabili.

Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 507—510 (1952).

Riferendosi al concetto di massa elementare esposto nel libro di M. Picone e T. Viola (Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione, Torino 1952, questo Zbl. 46, 281, v. ivi in particolare p. 178), l'A. approfondisce l'analisi delle cosiddette masse associate (che, nel lavoro stesso, sono chiamate „normali“). Notevole il risultato: una funzione quasi continua in un insieme E lebesghiano rispetto a una massa $\beta(T)$ di tipo associato, se è assolutamente integrabile in E rispetto a $\beta(T)$, è ivi pure sommabile. — Ci sembra interessante osservare che, dalla definizione delle masse associate e dalla proprietà qui segnalata, si deduce quasi immediatamente che, data una funzione $f(P)$ quasi continua in un insieme E lebesghiano rispetto ad una massa elementare $\alpha(T)$, e detta $\beta(T)$ la massa associata ad $\alpha(T)$, condizione necessaria e sufficiente affinché $f(P)$ sia sommabile in E rispetto ad $\alpha(T)$, è che $f(P)$ sia assolutamente integrabile in E rispetto ad $\alpha(T)$ e rispetto alla massa elementare $[V_\alpha(T) - V_\beta(T)]$.

T. Viola.

Hill, J. D.: A note on indefinite integrals. Proc. Amer. math. Soc. 3, 263—269 (1952).

Let f be a fixed function integrable on the unit interval I . Let $B_*(a)$ [$B^*(a)$] be the greatest lower [least upper] bound of numbers $\int_E f(x) dx$ where $E \subset I$ is any measurable set with $|E| = a$. It is proved that $B_*(a)$ is a convex function on I , and $B^*(a) = \int_I f(x) dx - B_*(1 - a)$ is concave. If $B_*(a) \leq b \leq B^*(a)$, then there is a set $E \subset I$ such that $|E| = a$ and $b = \int_E f(x) dx$. The author discusses also the problem of defining a mean value for numbers $\int_E f(x) dx$ as E ranges over all measurable subsets of I .

R. Sikorski.

Viola, Tullio: Sur la possibilité de compléter la définition d'une fonction donnée sur un domaine ouvert, par tendance à la limite vers la frontière du domaine. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2513—2515 (1952).

Parziale generalizzazione di un lemma relativo al prolungamento sulla frontiera di un insieme aperto A di una funzione dotata di derivate parziali prime continue e sommabili in A . *G. Fichera.*

Viola, Tullio: Étude des propriétés géométriques de certains domaines d'intégration, qu'on rencontre dans quelques problèmes de physique mathématique. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2585—2587 (1952).

Vien data la dimostrazione di un teorema enunciato in una precedente Nota (cfr. le preced. recens.), deducendola da due teoremi sui domini, chiamati dall'A. regolari ed introdotti nella Nota indicata. *G. Fichera.*

Viola, Tullio: Domaines réguliers et domaines normaux. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 10—12 (1952).

La Nota segue altre due dell'A. (cfr. le precedenti recensioni). Mediante esempi, si indicano alcuni rapporti esistenti fra i domini regolari, secondo l'A., e quelli che sono somma di un numero finito di domini normali. Si fa in particolare vedere che un tale dominio non è necessariamente regolare. *G. Fichera.*

Kober, H.: Note on the extension of rectangle functions. Duke math. J. **19**, 409—416 (1952).

Given a basic closed rectangle $R_0 \equiv (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$, let $[R]$ be the collection of all rectangles $R \subset R_0$ with sides parallel to the sides of R_0 and $f(R)$, $R \in [R]$, a rectangle function. P. V. Reichelderfer (this Zbl. **25**, 149), A. W. Reichard (this Zbl. **30**, 298), L. A. Ringenberg (this Zbl. **37**, 38) have given various conditions in order that $f(R)$ can be extended to an additive function $\Phi(B)$ defined for all Borel sets $B \subset R_0$. In the quoted papers a condition of continuity was used, namely $f(R_\varepsilon) \rightarrow f(R)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ where R_ε is the rectangle containing R with sides parallel to and at a distance ε from those of R . In the present paper a condition of weak continuity on a figure P is used, namely that given $\varepsilon > 0$, there is a $\delta > 0$ such that $|f(R)| < \varepsilon$ whenever R has diameter $< \delta$ and $R \subset P$. By figure P is meant a finite sum of closed rectangles. Finally the following condition C is introduced: (i) $f(R)$ is continuous on R_0^0 , i. e. on any $R \subset R_0^0$ where R_0^0 is the set of the interior points of R_0 ; (ii) $f(R)$ is weakly continuous on any $P \subset R_0$ which does not contain the vertices of R . The following statements among others proved by the author add further information on the question whether $f(R)$ can be extended. I. If $f(R)$ admits an extension and satisfies C, then $f(R)$ is additive and of bounded variation; II. If $f(R)$ is additive, then $f(R)$ can be extended if and only if f satisfies condition C and is of bounded variation; III. If $f(R)$ is additive, then $f(R)$ can be extended if and only if its total variation can be extended.

L. Cesari.

Cesari, Lamberto: Sul teorema di derivazione delle funzioni a variazione limitata in un insieme. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser. **8**, 223—229 (1952).

Die reelle, endliche Funktion $f(x)$ der reellen Variablen x sei stetig im Intervall $J = (a \leq x \leq b)$. Es heiße $\sup (\sum |f(x_{i+1}) - f(x_i)|; a \leq x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots \leq x_n = b, x_i \in E; n \text{ beliebig})$ die Variation $V = V(E; f)$ von f über die Teilmenge E von J . Ferner heiße $\int_{-\infty}^{+\infty} N(E; y) dy$ die Variation $W = W(E; f)$ von f über E , wobei $N(E; y)$ die Anzahl der Lösungen $x \in E$ der Gleichung $f(x) = y$ bezeichnet ($0 \leq N(E; y) \leq +\infty$) und wobei $N(E; y)$ meßbare Funktion von y sein, also das Integral existieren soll. Übrigens ist $N(E; y)$ meßbar, wenn E Borelsche Menge ist, und $W(E; f) \leq V(E; f)$, und aus $V < +\infty$ folgt bekanntlich, daß

fast überall in E die approximative Ableitung von f existiert und endlich ist. — Verf. zeigt in vorliegender Arbeit durch ein Beispiel, daß der Satz für $W < +\infty$ statt $V < +\infty$ nicht allgemein gilt; genauer: Es wird ein in $0 \leq x \leq 1$ stetiges $f(x)$ und eine perfekte Teilmenge E positiven Masses von $0 \leq x \leq 1$ konstruiert derart, daß $W(E; f) < +\infty$ und daß f in keinem Punkt von E eine approximative endliche oder unendliche Ableitung besitzt.

Haupt.

Glivenko, E. V.: Über die ebene Variation. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 581—600 (1952) [Russisch].

Eine axiomatische Charakterisierung der Kronrödschen ebenen Variation (Kronrod, dies. Zbl. 40, 316) stetiger, auf dem Quadrat $I: 0 \leq x, y \leq 1$ erklärter Funktionen $f(x, y)$ wird gegeben. Die Kronrödsche ebene Variation $W(f, M)$ einer Funktion f auf einer B -Menge $M \subset I$ ist das einzige Funktional, das die folgenden Axiome erfüllt: (1) $0 \leq W(f, M) \leq \infty$. (2) $W(c \cdot f, M) = |c| \cdot W(f, M)$ ($c = \text{const}$). (3) Wenn $M = M_1 + M_2 + \dots$ ($M_i \cdot M_j = 0$ für $i \neq j$), dann $W(f, M) = W(f, M_1) + W(f, M_2) + \dots$ (4) $W(f + c, M) = W(f, M)$ ($c = \text{const}$). (5) Wenn $G \subset I$ offen und $\{f_n\}$ gleichmäßig konvergent auf G ist, dann $W\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n, G\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} W(f_n, G)$. (6) $W(f, M)$ ist invariant gegenüber Isometrien. (7) Wenn $f(x, y) = g(x, y)$ für $(x, y) \in M$, dann $W(f, M) = W(g, M)$. (8) Wenn $f(x, y) = y$, dann $W(f, I) = 1$.

R. Sikorski.

Aubert, K. E.: Stetigkeit und diskrete Funktionen. Norsk mat. Tidsskr. 34, 33—41 (1952) [Norwegisch].

Verf. bemerkt, daß (bei Verwendung des in der Topologie üblichen Stetigkeitsbegriffs) jede Funktion stetig ist, die einen diskreten Definitionsbereich hat.

K. Krickeberg.

Homma, Tatsuo: A theorem on continuous functions. Kodai math. Sem. Reports 1952, 13—16 (1952).

Die Funktionen f_1, \dots, f_n seien stetig und in keinem Teilintervall ihres Definitionsbereichs $[0, 1]$ konstant, und es sei $0 \leq f_i(x) \leq 1$, $f_i(0) = 0$, $f_i(1) = 1$, ($i = 1, \dots, n$). Dann existieren stetige Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ mit $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$, $\varphi_i(0) = 0$, $\varphi_i(1) = 1$ ($i = 1, \dots, n$), so daß für jedes $x \in [0, 1]$ gilt $f_1(\varphi_1(x)) = f_2(\varphi_2(x)) = \dots = f_n(\varphi_n(x))$. Ein Beispiel zeigt, daß dies nicht der Fall zu sein braucht, wenn ein f_i in einem Intervall konstant bleibt.

K. Krickeberg.

Wunderlich, W.: Eine überall stetige und nirgends differenzierbare Funktion. Elemente Math. 7, 73—79 (1952).

D'una certa funzione soddisfacente alle condizioni indicate nel titolo, viene notevolmente approfondito, da più punti di vista, lo studio già iniziato da H. Scherer [Semesterber., Münster 12, 39—49 (1938)]. Tale funzione, ancor prima, era stata utilmente considerata da P. Finsler: essa può esser definita in modo assai semplice ed elegante, facendo applicazione dei metodi di rappresentazione binario e ternario dei numeri reali.

T. Viola.

Bush, K. A.: Continuous functions without derivatives. Amer. math. Monthly 59, 222—225 (1952).

Verf. konstruiert eine im Intervall $0 \leq x \leq 1$ stetige Funktion f , die nirgends einen endlichen Differentialquotienten besitzt, ohne Anwendung der sonst hierbei üblichen Grenzprozesse: die i -te Stelle der dyadischen Entwicklung von $f(x)$ sei die mod 2 reduzierte Anzahl der Sequenzen aus gleichen Zahlen, die in den ersten i Stellen der b -adischen Entwicklung von x vorkommen, wobei b eine feste ganze Zahl mit $b > 2$ bedeute. f hat überdies die folgende Eigenschaft: ist $1/2 < t < 1$ und läßt sich t nicht als eine endliche Summe von Zahlen der Gestalt 2^{-n} darstellen, so besitzt die Gleichung $f(x) = t$ überabzählbar viele Lösungen.

K. Krickeberg.

Ważewski, T.: Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue soit monotone. Ann. Soc. Polon. Math. **24**, 111—119 (1952).

In Verschärfung eines Lemmas von A. Zygmund (vgl. Saks, Théorie de l'intégrale, Warschau 1933, dies. Zbl. **7**, 105; S. 137 des Buches) wird gezeigt: Vor. Es sei $f(x)$ eine im Intervall $J = (a \leq x \leq b)$ eindeutige, reelle, stetige Funktion. Ferner sei Q die Menge aller $x \in J$, für welche die untere rechte Derivierte $D_+f(x) > 0$ ist. Beh. Es steigt f in J nicht [d. h. $f(x') > f(x'')$ für $x' < x''$] genau dann, wenn die Menge $f(Q)$ aller Zahlen $f(x)$ für $x \in Q$ (Lebesguesche) Nullmenge ist. — Als Folgerung wird u. a. erwähnt: Es sei f stetig in J , es sei $f(A)$ Nullmenge, wenn A Nullmenge ist ($A < J$), und es gelte $D_+f(x) \leq 0$ fast überall in J . Dann steigt f in J nicht. — Die Beweislast ruht auf dem Nachweis des folgenden Lemmas: Ist f stetig in J und ist $f(a) < f(b)$, ist ferner W die Menge aller x mit $a \leq x < b$ und $D_+f(x) > 0$, so hat $f(W)$ positives äußeres (Lebesguesches) Maß. *Haupt.*

Mohr, Ernst: Beitrag zur Theorie der konvexen Funktionen. Math. Nachr. **8**, 133—148 (1952).

Ausgehend von dem — auf Funktionen von mehreren Veränderlichen verallgemeinerten — Satze von Bernstein und Doetsch [Math. Ann. **76**, 514—526 (1915)] der behauptet, daß die unstetigen konvexen Funktionen einen Halbstreifen oberhalb einer stetigen konvexen Funktion oder einen ganzen Streifen überall dicht ausfüllen — gibt Verf. mittels der aus der Hamelschen Basis [G. Hamel, Math. Ann. **60**, 549—562 (1905)] gebildeten Hamelschen Abbildung — die den reellen Zahlen die rationalen Koeffizienten ihrer Hamelschen Normalform zuordnet — eine Abbildung der allgemeinen (auch unstetigen) konvexen Funktionen auf die stetigen konvexen Funktionen eines Raumes, dessen Dimensionszahl die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Für diese stetigen konvexen Funktionen wird auch eine transfinite Konstruktion gegeben, allerdings nur unter Voraussetzung einer etwas verwickelteren Bedingung. *J. Aczél.*

Vučković, V.: Quelques extensions des théorèmes de moyenne. Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova, mat. Inst. **18**, Nr. 2, 159—165 und französ. Zusammenfassg. 166 (1952) [Serbisch].

En supposant que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ admettent leurs dérivées droites et gauches $f'_+(x)$, $\varphi'_+(x)$, $f'_-(x)$, $\varphi'_-(x)$ que $\varphi'_+(x)$ et $\varphi'_-(x)$ ont le même signe et sont $\neq 0$, on démontre qu'il existent deux nombres $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$ et un ξ dans l'intervalle considéré (a, b) tels que la formule $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{p f'_+(\xi) + q f'_-(\xi)}{p \varphi'_+(\xi) + q \varphi'_-(\xi)}$, qui généralise la formule bienconnue de Cauchy,

ait lieu. En s'appuyant sur ce résultat on établit la formule $R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} \{p f^{(n)}_+(\xi) + q f^{(n)}_-(\xi)\}$,

$f^{(0)}(x) = f(x)$ pour le reste du développement de Taylor, lorsque la fonction $f(x)$ admet une n -ième dérivée gauche et droite. Pour les fonctions ne possédant que les points de discontinuités de première espèce on établit, sous des conditions usuelles, des théorèmes de moyenne

exprimés par les formules $\int_a^b f(x) dg(x) = \{p f(\xi + 0) + q f(\xi - 0)\} \{g(b) - g(a)\}$ et

$$\int_a^b f(x) dg(x) \Big/ \int_a^b f(x) dh(x) = \frac{p g(\xi + 0) + q g(\xi - 0) - g(a)}{p h(\xi + 0) + q h(\xi - 0) - h(a)}. \quad \text{Autoreferat.}$$

Lauffer, R.: Eine Hermiteische Rekursionsformel. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **55**, 68—69 (1952).

Hermite (Œuvres II, Paris 1908, p. 346) gab für solche ganze $m, n, p, q \geq 0$, daß $n \geq p$, $m \geq q$, die Formel

$$\frac{1}{(n-p)!(m-q)!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^{n-p} \partial y^m} (xy-1)^{m+n} = \frac{(xy-1)^{p+q}}{(m+p)!(n+q)!} \frac{\partial^{m+n+p+q}}{\partial x^{m+p} \partial y^{n+q}} (xy-1)^{m+n}.$$

Sie ist nicht ganz richtig; merkwürdigerweise läßt sie sich auf zwei Arten berichtigen, nämlich erstens, wie Ref. nachwies (dies. Zbl. **39**, 288), indem man dem unveränderten Wortlaut links den Malteil $x^{n-m+p} y^{m-n+q}$ hinzufügt. In vorliegender

Mitteilung zeigt Verf., daß man sie zweitens ohne Zusatz durch Veränderung des Wortlauts richtig stellen kann, nämlich dadurch, daß man im Nenner der Teilableitung rechts die Exponenten $m + p$ und $n + q$ von ∂x und ∂y vertauscht. Verf. geht aber über diese Feststellung hinaus: Er klärt die doppelte Verbesserungsmöglichkeit auf, indem er eine nur mit drei Zeigern behaftete Formel herleitet, aus der beide Berichtigungen durch Umbenennungen dieser Zeiger unter Einführung eines überzähligen vierten gewonnen werden können. *L. Koschmieder.*

Azpeitia, A. G.: Über den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. *Gac. mat., Madrid* 4, 9—10 (1952) [Spanisch].

García Pradillo, Julio: Betrachtungen über die Bestimmung der absoluten Maxima und Minima von Funktionen einer Veränderlichen. *Gac. mat., Madrid* 4, 175—179 (1952) [Spanisch].

Goodstein, R. L.: On the limit of the ratio of $\sin x$ to x . *Math. Gaz.* 36, 189—192 (1952).

Conte, Luigi: A proposito dell'articolo: Dimostrazioni delle formule di addizione delle funzioni circolari. *Periodico Mat., IV. Ser.* 30, 114—116 (1952).

Allgemeine Reihenlehre:

Durst, L. K.: The apparition problem for equianharmonic divisibility sequences. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 38, 330—333 (1952).

Nach M. Ward (dies. Zbl. 35, 37) werden Zahlfolgen $h_0, h_1, \dots, h_n \equiv 0 \pmod{1}$ für $1 \leq n \leq m$ als Lösung der Funktionalgleichung $(1) h_{m+n} h_{m-n} = h_{m+1} h_{m-1} h_n^2 - h_{n+1} h_{n-1} h_m^2$ Teilbarkeitsfolgen genannt dann, wenn aus $n|m$ folgt $h_n|h_m$. Als Nullrang einer natürlichen Zahl wurde der Zeiger $(2) r > 0$ eingeführt, welcher erstmals $(3) \lambda_r \equiv 0 \pmod{l}$ bewirkt. Die Frage nach arithmetischen Merkmalen des Nullranges r , die von M. Ward im rationalen Ring R (1) und im Gaußschen $R(\sqrt{-1})$ behandelt wurde, überträgt Verf. auf Folgen h_v mit $\varepsilon, \mu, v, h_v \in R(e^{2\pi i/3})$. Für Einheiten ε verallgemeinert sich dann (1) zu $(1') \varepsilon^2 h_{\mu+v} h_{\mu-v} = h_{\mu+\varepsilon} h_{\mu-\varepsilon} h_v^2 - h_{v+\varepsilon} h_{v-\varepsilon} h_\mu^2$. Die Uniformisierung durch äquianharmonische Funktionen bringt Polynomkongruenzen entsprechend (3) und weiter die Verallgemeinerung des Nullranges (2) im $R(e^{2\pi i/3})$. Die komplexe Multiplikation läßt den so erklärten Nullrang r auf die Zerlegbarkeit von Polynomen zurückführen und ergibt im Fall primzahliger $l = p \equiv 2 \pmod{3}$ für r arithmetische Merkmale. *W. Maier.*

Srinivasan, M. S.: Shortest semiregular continued fractions. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 35, 224—232 (1952).

Unter einem halbregelmäßigen Kettenbruch einer rationalen Zahl p/q wird verstanden ein Kettenbruch der Form

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{\Theta_1}{a_1 + \frac{\Theta_2}{a_2 + \dots + \frac{\Theta_r}{a_r}}} \text{ oder } (a_0, \Theta_1, a_1, \Theta_2, \dots, a_{r-1}, \Theta_r, a_r),$$

wo die a_i positive ganze Zahlen sind und $\Theta_i = \pm 1$, $a_i \geq 1$, $a_r \geq 2$, $a_i + \Theta_{i+1} \geq 1$ ($0 \leq i \leq r$) und speziell $\Theta_1 \geq 1$, wenn $a_0 = 0$ und $\Theta_{i+1} = +1$, wenn $a_i = 1$. — Wenn nun die a_i so bestimmt werden, daß stets

$$\left| \frac{\Theta_{i+1}}{(a_{i+1} \Theta_{i+2}, \dots, a_r)} \right| \leq \frac{1}{2}$$

ist, so entsteht der Kettenbruch nach nächsten Ganzen für p/q . Perron hat nun gezeigt, daß die Kettenbruchentwicklung nach nächsten Ganzen für jede rationale Zahl eindeutig ist außer für den Fall, wo $a_r = 2$ ist. In diesem letzteren Fall gibt es 2 Kettenbruchentwicklungen. Perron hat weiter gezeigt, daß der Kettenbruch nach nächsten Ganzen ein kürzester Kettenbruch ist in dem Sinn, daß kein anderer halbregelmäßiger Kettenbruch von p/q eine kleinere Zahl von Teilennern hat. Außer diesen Kettenbrüchen nach nächsten Ganzen gibt es aber noch andere bemerkenswerte halbregelmäßige Kettenbrüche, die kürzesten Kettenbrüche. Verf. stellt in dieser Arbeit die Bedingungen dafür auf, daß ein halbregelmäßiger Kettenbruch ein kürzester ist. Er zeigt auch, wie die Anzahl der kürzesten Kettenbrüche für p/q in Gliedern von Fibonacci-Zahlen bestimmt werden kann. Über Perron hinaus, der bewiesen hat, daß der singuläre Kettenbruch für eine rationale Zahl existiert und abgesehen von den zu $(\sqrt{5} - 1)/2$

äquivalenten Zahlen eindeutig ist, beweist Verf., daß der singuläre Kettenbruch (halbregelmäßiger Kettenbruch, bei dem der dazugehörige inverse Kettenbruch auch halbregelmäßig ist) ein kürzester ist. Den Beweis für seine Behauptungen erbringt Verf. hauptsächlich mit Hilfe einer Transformation eines halbregelmäßigen Kettenbruches von p/q in den zugeordneten Kettenbruch nach nächsten Ganzen, wobei die Anzahl der Teilnenner nicht vergrößert wird. *J. Mall.*

Žitomirskij, Ja. I.: Über die Konvergenz einiger Zahlenreihen. *Uspechi mat. Nauk* 7, Nr. 4, 153—156 (1952) [Russisch].

Aus $\sum (-1)^{r+1} \cdot \frac{1}{f(r)} (0 < f(x) \nearrow \infty)$ entstehe $\sum a_r$ durch eine Umordnung, bei der die Reihenfolge der positiven und die der negativen Glieder erhalten bleibt. $p(N)$ bzw. $q(N)$ sei die Zahl der positiven bzw. negativen Summanden in $\sum_{r=0}^N a_r$.

Eine kurze Rechnung zeigt, daß $\sum c_r$ genau dann konvergiert, wenn $\int_{\frac{2q(N)}{2p(N)}}^{\frac{2p(N)}{2q(N)}} \frac{dx}{f(x)}$ für $N \rightarrow \infty$ einem Grenzwert zustrebt. *K. Zeller.*

Orloff, C.: L'interprétation géométrique des séries de M. Milankovitch et l'enseignement de la théorie des séries. *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie* 4, 61—66 und französ. Zusammenfassg. 66—68 (1952) [Serbisch].

Vernotte, Pierre: Sur la sommation des séries asymptotiques de première espèce. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 1943—1945 (1952).

Szász, Otto: On products of summability methods. *Proc. Amer. math. Soc.* 3, 257—263 (1952).

A und B seien zwei permanente Verfahren zur Limitierung von Folgen s_n , B beruhe auf der Transformation von s_n in eine Folge, AB sei das Verfahren, das auf der Anwendung von A auf die B -Transformation von s_n beruht. Gilt dann $A \subseteq AB$? Die Frage ist zu bejahen, wenn A das Abelsche, B das Cesàrosche Verfahren C_α ($\alpha > 0$) ist, ebenso die analoge Frage für den Fall, daß A und B die entsprechenden Verfahren zur Limitierung von Funktionen sind (Spezialfall der Treppenfunktionen: A das Dirichlet-Reihen-Verfahren D_λ , B das Verfahren der zugehörigen Rieszschen Mittel). Bejahende Antwort hat man auch in den folgenden Fällen: A das Borelsche, B das C_α -Verfahren; A das Borelsche, B das Euler-Knoppische Verfahren positiver Ordnung. *W. Meyer-König.*

Cooke, Richard G.: On T -matrices at least as efficient as (C, r) -summability, and Fourier-effective methods of summation. *J. London math. Soc.* 27, 328—337 (1952).

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die reguläre Toeplitz-Matrix $A = (a_{nk})$ jede C_r -limitierbare Folge zu ihrem C_r -Limes limitiert ($r > 0$, fest). Diese Bedingungen sind: (1) $\sum_{k=1}^{\infty} k^r |A^r a_{nk}| \leq M$ für $n > n_0$, (2) $|a_{nk}| \leq K(n)/k^r$ ($n > n_0$, $k = 1, 2, \dots$), wo M fest und $K(n)$ eine positive Funktion von n ist. Im Fall $0 < r \leq 1$ folgt (2) aus (1) und kann daher weggelassen werden, was ein Resultat von Lorentz (dies. Zbl. 30, 148) ergibt. Da das C_r -Verfahren für $r > 0$ Fourier-wirksam ist, ist (1) für $0 < r \leq 1$ eine hinreichende Bedingung für die Fourier-Wirksamkeit des A -Verfahrens, die im Falle $r = 1$ besonders einfach wird: (3) $\sum_{k=1}^{\infty} k |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \leq M$ ($n > n_0$). Schließlich wird gezeigt, wie man über die Bedingung (3) die Fourier-Wirksamkeit der (A, p) -Verfahren ($p > 0$) (vgl. z. B. G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford 1949, dies. Zbl. 32, 58) feststellen kann. *D. Gaier.*

Jackson, F. H.: Application of diluted matrices to bounded sequences. I, II. *Indagationes math.* 14, 173—180, 181—190 = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 55, 173—180, 181—190 (1952).

Die Untersuchung (dies. Zbl. 43, 62) wird fortgesetzt. Die dort eingeführten diluted matrices $a_{\mu, kv}^{(k)} = a_{\mu v}$, $a_{\mu 0}^{(k)} = 0$ sonst, werden nunmehr als constant column diluted matrices bezeichnet. Weitergehend werden jetzt die variable column diluted matrices betrachtet, die nach Wahl einer Folge natürlicher Zahlen $q_1 < q_2 < \dots$ erklärt werden durch $b_{\mu, q_v} = a_{\mu v}$, $b_{\mu 0} = 0$ sonst; ferner wird der Begriff der matrix of variable dilution eingeführt, nach Wahl von $q_{\mu 1} < q_{\mu 2} < \dots$ ($\mu = 1, 2, \dots$) erklärt durch $c_{\mu q_{\mu v}} = a_{\mu v}$, $c_{\mu 0} = 0$ sonst. — „Für beschränkte Folgen ist eine T -Matrix $a_{\mu v}$ mit einer zugehörigen $a_{\mu, kv}^{(k)}$ -Matrix absolut-äquivalent dann und nur dann, wenn $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_v |a_{\mu, kv}^{(k)} - a_{\mu v}| = 0$.“ — „Für beschränkte Folgen ist eine T -Matrix $a_{\mu v}$ mit einer zugehörigen $b_{\mu q_{\mu v}}$ -Matrix absolut äquivalent dann und nur dann, wenn $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_v |b_{\mu q_{\mu v}} - a_{\mu v}| = 0$.“ — Für Matrizen $a_{\mu v}$, die nicht T -

Matrizen sind, wird die Absolut-Äquivalenz mit zugehörigen column diluted matrices für gewisse Teilsysteme der beschränkten Folgen gezeigt. — Im zweiten Teil werden die translativen und absolut-translativen Mittelbildungen in den Vordergrund gestellt und in Anlehnung an R. G. Cooke (Infinite matrices and sequence spaces, London 1950, dies. Zbl. 40, 25) und P. Erdős und G. Piranian (dies. Zbl. 37, 327) behandelt.

Robert Schmidt.

Tolba, S. E.: On transformations by T - and γ -matrices. Indagationes math. 14, 130—141 = Nederl. Akad. Wet. Proc., Ser. A 55, 130—141 (1952).

Die Existenz von T -Matrizen, die eine gegebene divergente beschränkte Folge in eine vorgeschriebene beschränkte Folge überführen, wurde von R. P. Agnew (dies. Zbl. 3, 55) sichergestellt. Verf. gibt allgemeine Verfahren zur Konstruktion solcher T -Matrizen, ferner zur Konstruktion von γ -Matrizen, die eine gegebene divergente Reihe in eine vorgeschriebene Folge transformieren, und zwar werden dabei von vornherein auch nichtbeschränkte Folgen und Reihen in Betracht gezogen. Insbesondere werden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben dafür, daß eine T -Matrix beschränkte divergente Folgen mit zwei oder drei Häufungspunkten in solche mit vorgeschriebenen Grenzwerten überführen.

Robert Schmidt.

Leja, F.: Remarques sur les séries entières doubles. Ann. Soc. Polon. Math. 24, 19—24 (1952).

R sei der Raum der komplexen Veränderlichen x, y . Der Doppelreihe

(1) $\sum_{\mu, v=0}^{\infty} a_{\mu v} x^{\mu} y^v$ ($a_{\mu v}$ komplexe Koeffizienten) werde als „Diagonalreihe“ die

(einfache) Reihe (2) $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y)$ zugeordnet, wobei $P_n(x, y) = \sum_{v=0}^n a_{n-v, v} x^{n-v} y^v$.

Seien x_0, y_0, a, b komplexe Konstante, $d = b x_0 - a y_0 \neq 0$, C die Kurve $x = x_0 + a e^{it}$, $y = y_0 + b e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) in R . D_C sei der größte Bereich in R , in dem jede Reihe (2) konvergiert, deren Glieder $P_n(x, y)$ in jedem einzelnen Punkt von C für $n \rightarrow \infty$ beschränkt sind. Dann wird D_C durch $|b x - a y| < |d|$, $|y_0 x - x_0 y| < |d|$ gegeben. Der größte Bereich Δ_C in R , in dem jede Reihe (1) konvergiert, deren Diagonalreihe (2) die gleiche Bedingung für die P_n wie vorhin erfüllt, wird durch $|b x| + |a y| < |d|$, $|y_0 x| + |x_0 y| < |d|$ gegeben. Ein weiterer Fall: C die Kurve $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ ($0 \leq t < \pi$; $r > 0$, konstant) in R ; dann wird D_C durch $|x + i y| < r$, $|x - i y| < r$, und Δ_C durch $|x| + |y| < r$ gegeben. — Weitere Literatur: Verf., dies. Zbl. 6, 196; 38, 202. W. Meyer-König.

Rajagopal, C. T.: Note on some Tauberian theorems of O. Szász. Pacific J. Math. 2, 377—384 (1952).

Ist $\{\lambda_n\}$ eine Zahlenfolge mit $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$ und konvergiert $\sum a_n \varphi(\lambda_n t) = \Phi_\lambda(t)$ für $t > 0$, so heißt $\sum a_n$ zum Wert s (Φ, λ)-summierbar, wenn $\lim_{t \rightarrow +0} \Phi_\lambda(t) = s$ ist;

$\varphi(u)$ ist dabei noch gewissen Bedingungen unterworfen. Für dieses allgemeine (Φ, λ) -Verfahren, das die Abel-Laplace-, Stieltjes- und Lambert-Verfahren als Spezialfälle enthält, gibt Verf. mehrere Taubersche Sätze an, die sich an Untersuchungen von Szász anschließen [dies. Zbl. 13, 262, zit. als (S₁); dies. Zbl. 44, 67, zit. als (S₂)]. Folgende Relationen spielen eine Rolle:

$$(1) \quad \sum_{v=1}^n (|a_v| - a_v)^p \lambda_v^p (\lambda_v - \lambda_{v-1})^{1-p} = O(\lambda_n) \quad (n \rightarrow \infty, p > 1), \quad (2) \quad \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Im ersten Teil der Arbeit wird festgestellt, daß (1) und (2) zusammengenommen eine Tauber-Bedingung für das (Φ, λ) -Verfahren ergibt (Satz 1), weiter allgemeiner, daß hierin (1) ersetzt werden kann durch

$$(3) \quad U_n \equiv \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} (|a_{\nu}| - a_{\nu}) = O(\lambda_n) \quad (n \rightarrow \infty), \quad \frac{U_m}{\lambda_m} - \frac{U_n}{\lambda_n} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \rightarrow 1$$

(Satz 2). [Vgl. die Spezialfälle für das Abel-Laplace-Verfahren in (S_1) bzw. (S_2) .] Eine zu Satz 2 äquivalente Erweiterung von Satz 1 erhält man, wenn man in Satz 2 statt (3) fordert:

$\sum_{\nu=n+1}^m (|a_{\nu}| - a_{\nu}) \rightarrow 0$ für $\lambda_m/\lambda_n \rightarrow 1$. — Im zweiten Teil wird auf (2) verzichtet und unter der

Bedingung (1) von $(\Phi, \lambda) \cdot \Sigma a_n = s$ auf $\overline{\lim} s_n = s, \lim s_n = s - L$ mit $L = \overline{\lim} (|a_n| - a_n)/2$ geschlossen (Satz 1'). Ferner wird gezeigt, daß $L = 0$ eine Folge von (1) und (2) ist, so daß der Satz 1' den Satz 1 enthält; weiter ist $L = 0$ sicher dann erfüllt, wenn (1) gilt und $\lim a_n \geq 0$ ist. — Die Beweise erfolgen meist in zwei Schritten. Zunächst wird mit Hilfe eines Satzes des Verf. [Proc. Amer. math. Soc. 2, 335–349 (1951)] von $(\Phi, \lambda) \cdot \Sigma a_n = s$ auf das Verhalten von $(R, \lambda, 1) \cdot \Sigma a_n$ geschlossen; für den Schluß vom Verhalten von $(R, \lambda, 1) \cdot \Sigma a_n$ auf Σa_n werden ein Satz aus (S_1) oder dazu ähnliche Sätze herangezogen. [Dabei heißt $(R, \lambda, 1) \cdot \Sigma a_n = s$, daß $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{\lambda_n \leq x} (x - \lambda_n) a_n = s$ ist.]

D. Gaier.

Agnew, Ralph Palmer: Arithmetic means and the Tauberian constant 474541.

Acta math. 87, 347–359 (1952).

Die Reihe Σu_n mit komplexen Gliedern erfülle die Taubersche Bedingung (1) $\overline{\lim} |n u_n| < \infty$, s_n bezeichne ihre Partialsummen und M_n die arithmetischen Mittel der s_n . Wegen $M_n - s_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k u_k$ gilt (2) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |M_n - s_{p_n}| \leq B \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |n u_n|$ für $p_n = n$, $B = 1$. Die Frage, ob und wie weit sich die Konstante B erniedrigen läßt, wenn, bei Vorgabe von Σu_n , p_n eine geeignete optimale Folge durchläuft, wurde vom Verf. schon früher untersucht, auch in dem Fall, wo p_n von den u_n abhängen darf. In der Tat gelingt ihm, B auf die Lösung $B_0 = 0.474541$ der Gleichung $\exp(-\pi B_0/2) = B_0$ herabzudrücken. Zunächst werden verschiedene Eigenschaften von B in (2) untersucht. Insbesondere erzielt Verf. folgendes Ergebnis: Genügen die Glieder der Reihe Σu_n der Bedingung (1) und sind ihre Teilsummen beschränkt, so gibt es eine Konstante $B^* < B_0$ derart, daß jedem Häufungspunkt ζ_M von M_n ein Häufungspunkt ζ_s von s_n entspricht, so daß $|\zeta_M - \zeta_s| \leq B^* \overline{\lim} |n u_n|$. Jedoch ist B_0 die kleinste Konstante mit folgender Eigenschaft: Erfüllen die u_n nur die Bedingung (1), so entspricht jedem Häufungspunkt ζ_M von M_n ein Häufungspunkt ζ_s von s_n derart, daß $|\zeta_M - \zeta_s| \leq B_0 \overline{\lim} |n u_n|$ gilt. Diese letzte Feststellung ist im Hinblick auf das noch ungelöste analoge Problem im Fall der Abelschen Mittel bemerkenswert.

V. Garten.

Agnew, Ralph Palmer: Abel transforms of Tauberian series and analytic approximation to curves and functions. Duke math. J. 19, 131–138 (1952).

Σu_n sei eine Reihe von komplexen Gliedern, die der „starken“ Tauber-Bedingung (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} |n u_n| = h > 0$ genügen. Die Teilsummen $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ sollen sämtlich auf einer orientierten, geschlossenen und rektifizierbaren Kurve C der Länge L in der komplexen Ebene liegen und mit wachsendem n entlang C in positivem Sinn beständig weiterlaufen. Verf. untersucht die Menge der Grenzpunkte, welche die Abel-Transformation $\sigma(r) = (1-r) \sum_{k=0}^{\infty} r^k s_k$ ($0 < r < 1$) dieser Reihe besitzt, d. h. die Menge der Punkte $\zeta = \lim \sigma(r_n)$ mit $0 < r_n < 1, \lim r_n = 1$. Er bemerkt, daß diese Grenzpunkte eine Kurve C_h durchlaufen, welche durch C und die Konstante h von (1) eindeutig bestimmt ist, aber von der Wahl der u_n nicht abhängt. Verf. untersucht einige Eigenschaften dieser Kurven C_h und findet insbesondere, daß C_h stets eine analytische Kurve ist und für $h \rightarrow 0$ eine außerordentliche analytische Approximation an C darstellt. Die Untersuchungen stehen in engem Zusammenhang mit zwei früheren Arbeiten des Verf. [Duke math. J. 12, 27–36 (1945) und dies. Zbl. 32, 152].

V. Garten.

Hart, J. J.: A correction for the trapezoidal rule. Amer. math. Monthly 59, 33—37 (1952).

Unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ in $[x_0, x_1]$ dreimal stetig differenzierbar sei, leitet Verf. im Anschluß an Hummel und Seebeck (dies. Zbl. 43, 64) die Quadraturformel

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{1}{2} [f(x_0) + f(x_1)] (x_1 - x_0) + \frac{1}{12} [f'(x_0) - f'(x_1)] (x_1 - x_0)^2 + R_1$$

her, wobei $R_1 = \frac{(x_1 - x_0)^4}{240} [f'''(\xi_2) - f'''(\xi_1)]$ mit geeignet gewählten $\xi_1, \xi_2 \in (x_0, x_1)$ ist. Diese Formel wird dann für ein Intervall $[x_0, x_n]$ bei beliebiger Unterteilung $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ angeschrieben und schließlich auf die äquidistante Unterteilung $x_i - x_{i-1} = h > 0$ ($i = 1, \dots, n$) spezialisiert. So ergibt sich

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] + \frac{h^2}{12} [f'(x_0) - f'(x_n)] + R_n$$

mit $R_n = \frac{h^4}{240} [f'''(\xi_2) - f'''(\xi_1) + f'''(\xi_4) - f'''(\xi_3) \pm \dots + f'''(\xi_{2n}) - f'''(\xi_{2n-1})]$ bei passend gewählten $\xi_{2i-1}, \xi_{2i} \in (x_{i-1}, x_i)$ für $i = 1, \dots, n$; also schließlich $|R_n| \leq \frac{n h^4}{240} S$, falls S die Schwankung von $f'''(x)$ in $[x_0, x_n]$ bezeichnet,

H. Bilharz.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Dinghas, Alexander: Über einige Identitäten vom Bernsteinschen Typus. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 24, Nr. 21, 96—97 (1952).

Zum Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes für $0 < x < 1$ und stetige $g(x)$ benutzt man nach S. Bernstein mit $q > \infty$ die Näherungspolynome

$$\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} g\left(\frac{k}{q}\right) x^k (1-x)^{q-k}.$$

Allgemeiner werde mit $n = 1, 2, \dots$ im R_n das $(n+1)$ -Flach $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$; $v = 1, \dots, n$; $x_v \geq 0$ vorgegeben, wo $g(x_1, \dots, x_n)$ entsprechend durch Polynomkoeffizienten C_{k_1, \dots, k_n}^q mittels der Polynome

$$\sum C_{k_1, \dots, k_n}^q g\left(\frac{k_1}{q}, \dots, \frac{k_n}{q}\right) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} (1 - x_1 - \dots - x_n)^{k_{n+1}}$$

anzunähern ist. Diese Annäherung gelingt auf Grund der multiplikativen Zerlegbarkeit eines Polynomes

$$\sum C_{k_1, \dots, k_n}^q x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} (1 - x_1 - \dots - x_n)^{k_{n+1}} \prod_{s=1}^l (q x_{r_s} - k_{r_s})^2.$$

(r_1, \dots, r_s ist Teilmenge von $1, \dots, n$.)

W. Maier.

Ivanov, V. K.: Über gleichmäßige Approximationen stetiger Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 543—558 (1952). [Russisch]

Die Arbeit stellt in Fragestellung und Methode die Verallgemeinerung einer früheren Veröffentlichung des Verf. (dies. Zbl. 44, 283) dar: es handelt sich jetzt darum, eine Funktion, die mit $-f(x)$ bezeichnet wird, durch „Quasipolynome“ anzunähern, d. h. das Minimax des Ausdrucks $\alpha_1 l_1(x) + \dots + \alpha_n l_n(x) + f(x)$ zu bestimmen. Dabei sind $l_1(x), \dots, l_n(x), f(x)$ gegebene stetige reelle oder komplexe Funktionen einer reellen Veränderlichen und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die variablen Parameter. Analog wie in der zitierten Note werden „Grenzmengen“ und „Normalmengen“ im Raum der Parameter definiert. Sodann wird gezeigt, daß es eine minimale Normalmenge aus q „Punkten“ gibt; dabei ist $q \leq 2n$, im reellen Fall sogar $q \leq n$. Ist $q \leq n$, so läßt sich nun die Bestimmung des Minimax verhältnismäßig leicht

durchführen (für den reellen Fall vgl. Schnirelman, dies. Zbl. 19, 57), andernfalls werden die Rechnungen komplizierter, da eine Reihe von Bedingungen (allerdings jeweils endlich viele) nachgeprüft werden muß.

W. Hahn.

Tumarkin, G. C.: Über die Annäherung im Mittel von komplexwertigen Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 21–24 (1952) [Russisch].

$\sigma(t)$ étant une fonction non-décroissante, soit $L^p(d\sigma; -\pi, \pi)$ l'espace des fonctions $f(t)$ avec $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p d\sigma(t) < \infty$. Achiezer avait démontré [Leçons sur la théorie de l'approximation, en russe, Moscou-Lénigrade 1947, Appendice B; ce Zbl. 31, 157] que si $p \geq 1$ et si $(1) \int_{-\pi}^{\pi} |\log \sigma'(t)| dt = \infty$, alors pour tout $f(x) \in L^p(d\sigma; -\pi, \pi)$ il existe une suite de polynômes $P_n(e^{it})$ en e^{it} , telle que $(2) \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - P_n(e^{it})|^p d\sigma(t) \rightarrow 0$. L'A. énonce sans démonstration que le théorème est valable pour $p > 0$. Si parcontre (1) n'est pas vérifié, il faut et il suffit pour (2) que $f(t) = F(e^{it})$ soit presque partout égale à la valeur frontière d'une fonction $F(z)$, analytique dans $|z| < 1$ et telle que $\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |F(re^{it})| dt = O(1)$. On a des résultats analogues si $|z| = 1$ est remplacé par une courbe de Jordan rectifiable dans le plan complexe, ou par l'axe réel.

J. Horváth.

Newman, Jerome and Walter Rudin: Mean convergence of orthogonal series. Proc. Amer. math. Soc. 3, 219–222 (1952).

H. Pollard hatte gezeigt (dies. Zbl. 35, 41), daß die Jacobische Reihe (J. R.) einer Funktion $f \in L^p$ im Mittel p -ter Ordnung gegen f strebt, wenn $M < p < m$ (wegen der Bezeichnungen s. die Bespr.). G. M. Wing übertrug dieses Ergebnis auf die Fourier-Besselsche (F.-B.) und auf Reihen, die nach allgemeineren orthogonalen Polynomen fortschreiten [Amer. J. Math. 72, 792–808 (1950)]. Verf. beweist hier, daß die genannte Konvergenzeigenschaft bei der J. R. und der F.-B. R. an den Enden des Spielraums \mathfrak{P} von p aufhört. Dazu leitet er eine notwendige Bedingung der Konvergenz her: Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ in (a, b) eine in bezug auf die Maßfunktion $\mu(x)$ orthonormale Folge, L_μ^p der Raum der Funktionen f , für die $\|f\|_{p, \mu} = \left\{ \int_a^b |f(x)|^p d\mu(x) \right\}^{1/p} < \infty$ ist ($p \geq 1$), ferner $a_n(f) = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) d\mu(x)$. Konvergiert dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \varphi_n(x)$ für alle $f \in L_\mu^p$ in L_μ^p , so ist

$$\|\varphi_n\|_{p, \mu} \|\varphi_n\|_{q, \mu} = O(1), \quad 1/p + 1/q = 1.$$

Da, wie Verf. dartut, die J. R. und die F.-B. R. diese Bedingung verletzen, so gibt es in den zugehörigen Grundgebieten ein $f \in L_\mu^p$, so daß diese Reihen in L_μ^p nicht konvergieren, wenn p in die Enden von \mathfrak{P} fällt.

L. Koschmieder.

Graves, Ross E.: A closure criterion for orthogonal functions. Canadian J. Math. 4, 198–203 (1952).

Es sei $p(t)$ eine Funktion, deren Null- und Unstetigkeitsstellen das Jordansche Maß Null haben, so daß für jedes $x \in (a, b)$, $p(t) \in L_2$ ($\min(c, x) < t < \max(c, x)$), wo $a \leq c \leq b$; a, b, c brauchen nicht endlich zu sein. Ferner sei $w(x)$ eine fast überall endliche, positive, meßbare Funktion, so daß $w(x) \int_c^x |p(t)|^2 dt \in L_1(a, b)$ und $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ orthogonal und normal in (a, b) . Dann gilt, wie der Verf. zeigt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \left| \int_c^x p(t) \Phi_n(t) dt \right|^2 w(x) dx \leq \int_a^b \left| \int_c^x |p(t)|^2 dt \right| w(x) dx;$$

das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $\{\Phi_n\}$ in $L_2(a, b)$ abgeschlossen ist. — Dieses Kriterium stellt eine Verallgemeinerung des von D. P. Dalzell [J. London math. Soc. **20**, 87—93 (1945); ebenda **20**, 213—218 (1945)] gegebene Kriteriums dar und läßt noch eine weitere Verallgemeinerung zu. Verf. macht eine Anwendung auf die Hermiteschen Funktionen $\Phi_n(x) = (\pi^{1/2} n! 2^n)^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x)$, wo $H_n(x)$ Hermitesche Polynome sind.

O. Volk.

Civin, Paul: Multiplicative closure and the Walsh functions. Pacific J. Math. **2**, 291—295 (1952).

Se $\{\Phi_n(x)\}$ è il sistema ortogonale e normale di Rademacher e $\{\psi_n(x)\}$ il sistema ordinato secondo Paley delle funzioni di Walsh $\psi_0(x) = 1$; $\psi_n(x) = \psi_{n_1}(x) \psi_{n_2}(x) \dots \psi_{n_k}(x)$, se $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_k}$, con $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, l'A. dimostra che qualsiasi successione $\{\lambda_n(x)\}$ di funzioni reali misurabili, tali che $\lambda_n(x+1) = \lambda_n(x)$,

$$\int_0^1 \lambda_m(x) \lambda_n(x) dx = \varepsilon_{mn}, \quad (\varepsilon_{nn} = 1; \varepsilon_{mn} = 0 \text{ per } m \neq n),$$

e tali che il prodotto $\lambda_i(x) \lambda_j(x)$ sia una funzione appartenente alla successione, possiede un'unità $\lambda_0(x)$ moltiplicativa e che quasi ovunque nell'intervallo $(0, 1)$ è $\lambda_i^2(x) = 1$, o come si dice, le funzioni $\lambda_n(x)$ formano un gruppo moltiplicativo che risulta isomorfo al gruppo di Walsh. — Si ha inoltre che sotto opportune ipotesi esiste una trasformazione di $(0, 1)$ in sè stesso che muta il sistema di Walsh nel sistema $\{\lambda_n(x)\}$.

G. Sansone.

Russo, Salvatore: Sulla convergenza delle serie di polinomi di Legendre. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **38**, 168—175 (1952).

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini reali, $\{P_n(x)\}$ la successione dei polinomi di Legendre, e si consideri la serie (*) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$. L'A. partendo dalla formula integrale di Schläfli per i polinomi di Legendre, assegna dei criteri di convergenza della serie (*) nell'ipotesi che $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, e ne fa alcune applicazioni.

G. Sansone.

Timan, A. F.: Lineare Methoden der Approximation periodischer Funktionen durch trigonometrische Polynome. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84**, 1147—1150 (1952) [Russisch].

Es sei $A = (\lambda_k^{(n)})$ ($n = 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, \dots, n+1$; $\lambda_0^{(n)} = 1, \lambda_{n+1}^{(n)} = 0$) eine gegebene unendliche Dreiecksmatrix; mit ihrer Hilfe ordne man jeder 2π -periodischen, integrierbaren Funktion

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

das trigonometrische Polynom

$$U_n(f; A; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

zu. Ist \mathfrak{M} eine gegebene Klasse solcher Funktionen $f(x)$, so betrachte man die Größen

$$\mathfrak{E}_n(\mathfrak{M}; A) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \sup_x |f(x) - U_n(f; A; x)| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Das Problem ist, das asymptotische Verhalten dieser Größen zu bestimmen oder mindestens abzuschätzen. Für spezielle Matrizen A ist dieses Problem schon von mehreren Verff. gelöst worden. Für eine allgemeine Klasse von Matrizen, nämlich diejenigen, die sich aus einer „summatorischen“ Funktion $\lambda(u)$ durch die Formel $\lambda_k^{(n)} = \lambda\left(\frac{k}{n+1}\right)$ herleiten, ist das Problem ein-

gehend vom Ref. untersucht worden (dies. Zbl. **34**, 44—45), und zwar für die Klassen:

$$W^{(r)} H^{(0)}: |f^{(r)}| \leq 1; \quad W^{(r)} H^{(x)}: |f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x)| \leq |x' - x|^\alpha$$

($0 < \alpha < 1$), sowie für die entsprechenden Klassen der trigonometrisch-konjugierten Funktionen. — Verf. betrachtet nun beliebige Matrizen und — neben den genannten Funktionen-

klassen — auch die Klasse $W^{(r)} H_\alpha$ der Funktionen, deren Stetigkeitsmodul unter einer gegebenen Modulfunktion $\omega(k)$ bleibt, und auch die Klasse der konjugierten Funktionen. Aus den gewonnenen Sätzen (die alle ohne Beweis mitgeteilt werden) sei der folgende als typisch erwähnt: Bedeutet \mathfrak{M} die Klasse $W^{(r)} H^{(\alpha)}$ ($r \geq 0, 0 \leq \alpha < 1$) oder die dazu konjugierte Klasse, so ist für $n \rightarrow \infty$

$$\mathfrak{E}_n(\mathfrak{M}; A) \leq \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t \, dt \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^n \frac{n-k}{i} \right) \left| \Delta^2 \left(\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \right) \right| \\ + O \left\{ \sum_{k=0}^{[n/2]} (k+1)^{1-\alpha} \left| \Delta^2 \left(\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \right) \right| + \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} (n-k) \left| \Delta^2 \left(\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k^r} \right) \right| \right\} + O \left(\frac{1}{n^{r+\alpha}} \right),$$

und es gibt Matrizen A , für die diese asymptotische Ungleichung zu einer asymptotischen Gleichung wird. (Δ^2 bezeichnet die zweite Differenz.) — Im Falle $r = \alpha = 0$ reduziert sich dieser Satz auf Sätze des Ref. (dies. Zbl. 39, 296; 40, 30).

B. Sz.-Nagy.

Meňšov, D. E.: Über die Unbestimmtheitsgrenzen der Fourierreihen. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 601—650 (1952) [Russisch].

Das Hauptergebnis (Th. 4) lautet: Gegeben seien im Intervall $-\pi, \pi$ eine L -integrierbare Funktion $f(x)$, eine meßbare Funktion $\varphi(x) \geq 0$, eine perfekte nirgendsdichte Menge P . Dann kann $f(x)$ außerhalb P so abgeändert werden, daß die Fourierreihe der entstehenden Funktion $g(x)$ fast überall die Häufungsgrenzen $g(x) \pm \varphi(x)$ hat. Th. 1 und 3 sind Spezialfälle hiervon [$P = 0$ bzw. $\varphi(x) = 0$], Th. 2 eine einfache Folgerung aus Th. 1 (Konstruktion einer trigonometrischen Reihe mit vorgegebenen Unbestimmtheitsgrenzen). — Z. T. sind die Ergebnisse (ohne vollständige Beweise) schon früher vom Verf. veröffentlicht worden. Literatur: Meňšov (dies. Zbl. 37, 179; 39, 292; 33, 262; 39, 70; nachsteh. Referat).

K. Zeller.

Meňšov, D. E.: Über Fourierreihen summierbarer Funktionen. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 1, 5—38 (1952) [Russisch].

Beweis von Satz 3 aus der oben besprochenen Arbeit.

K. Zeller.

Boas, jr., R. P.: Integrability of trigonometric series. II. Math. Z. 55, 183—186 (1952).

Part I see Duke math. J. 18, 787—793 (1951). Well known theorems [S. Szidon, Math. Z. 10, 121—127 (1921); A. Kolmogoroff, Bull. internat. Acad. Polonaise (A), 83—86 (1923)] give sufficient conditions in order that a series $(1) \sum c_n \exp(inx)$ is an L -Fourier series (by L^p -Fourier series is meant the Fourier series of an L^p -integrable function, $p \geq 1$). The mentioned conditions are expressed in terms of the differences $c_n - c_{n+1}$, $c_n - 2c_{n+1} + c_{n+2}$ of the sequence $[c_n]$ of the coefficients c_n . By making use of the same technique the author investigates the analogous but more difficult question to give sufficient conditions in order that (1) is an L^p -Fourier series. The following theorem is proved: I. If $1 < q \leq 2$, $q' = q/(q-1)$, $1 \leq p < q'$, and $\alpha < 1 - q/p'$, where $1/p + 1/p' = 1$, if k is an integer, $k \geq 1$, if $c_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ and

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{n+mk} - c_{n-mk}|^q = O(m^\alpha) \text{ as } m \rightarrow \infty,$$

then (1) is an L^p -Fourier series. Various corollaries are deduced. It is also proved by an example that the condition $\alpha < 1 - q/p'$ is an optimum in the sense that, if $\alpha \geq 1 - q/p'$, then the conclusion does not hold necessarily. Finally the author points out that the theorem can be largely extended by making use of the concept of generalized differences as it was done by the Ref. for criteria for L -Fourier series (this Zbl. 9, 108).

L. Cesari.

Boas, jr. R. P.: Integrability of trigonometric series. III. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 217—221 (1952).

The following results are due to the rev. (Béla Sz.-Nagy, this Zbl. 39, 295): Let $f(x)$ be of bounded variation on $(0, \infty)$ and $f(x) \downarrow 0$ for large x . (i) If $b(x)$ is the sine transform of $f(x)$, then, for $0 < \gamma \leq 1$, $x^{-\gamma} b(x) \in L(0, 1)$ if and only if $x^{\gamma-1} f(x) \in L(1, \infty)$. (ii) If $a(x)$ is the cosine transform of $f(x)$, then, for $0 < \gamma < 1$, an analogous statement holds. (iii) If $f(x) \in L(0, \infty)$ and $a(0) = 0$, then $x^{-1} a(x) \in L(0, 1)$ if and only if $f(x) \log x \in L(1, \infty)$. — These theorems can be read backwards as theorems about $f(x)$ instead of about $b(x)$ or $a(x)$, and so they suggest

the following theorems for sine and cosine series with monotonic coefficients, which are proved in the present paper: Let $f_n \downarrow 0$ for large n . (1) If $b(x) = \sum f_n \sin nx$, then, for $0 < \gamma \leq 1$, $x^{-\gamma} b(x) \in L$ if and only if $\sum n^{\gamma-1} f_n$ converges [this holds also for $\gamma = 0$: theorem of W. H. Young; see e. g. A. Zygmund, Trigonometrical series, Warszawa 1935 (this Zbl. 11, 17, p. 108)]. (2) If $a(x) = \frac{1}{2} f_0 + \sum_1^{\infty} f_n \cos nx$, then, for $0 < \gamma < 1$, $x^{-\gamma} a(x) \in L$ if and only if $\sum n^{\gamma-1} f_n$ converges. (3) If $\sum f_n$ converges and $a(0) = 0$, then $x^{-1} a(x) \in L$ if and only if $\sum f_n \log n$ converges. — The following theorem is also proved: If the Fourier series $f(x) = \sum b_n \sin nx$ does not change sign in a righthand neighborhood of 0, and if $b_n \geq 0$, then $\sum b_n$ converges if and only if $x^{-1} f(x) \in L$.
Béla Sz. Nagy.

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Höfing, E.: Zur Theorie der hypergeometrischen Funktionen. Monatsh. Math. 56, 126—136 (1952).

Verf. setzt sich zum Ziel, die mehrfachen Integrale, welche die verallgemeinerte hypergeometrische Differentialgleichung lösen, direkt aus der genannten Differentialgleichung abzuleiten. Hierzu geht er von der Bemerkung aus, daß das Integral über das Produkt zweier Lösungen zweier linearer homogener Differentialgleichungen eine Partikularlösung einer aus den genannten Differentialgleichungen zusammengesetzten Differentialgleichung darstellt. Durch eine passende Wahl der Integrationsgrenzen sowie des Integrationsweges gelingt es, aus diesem Integral verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen zu bilden. Die einzelnen Schritte, welche hierzu führen, werden vom Verf. behandelt.

M. J. O. Strutt.

Chandra, Dinesh: On the Hankel transformation of generalized hypergeometric functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 41—45 (1952).

Verf. beweist mit Hilfe der Operatorenrechnung, daß die Funktionen

$$\varphi(x) = \{x^{2\varrho_n - \nu - 3/2} / [\Gamma(\varrho_n) 2^{\varrho_n - 1}]\} {}_nF_n[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n; -\frac{1}{2}x^2] \quad \text{und} \\ \psi(x) = \{ \Gamma(\varrho_1) \cdots \Gamma(\varrho_{n-1}) / [\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)] \} \sum_{r=1}^n \left\{ \prod_{t=1}^n \Gamma(\alpha_t - \alpha_r) \prod_{s=1}^{n-1} \Gamma(\varrho_s - \alpha_r) \right\} \Gamma(\alpha_r) \\ \times \frac{x^{2\alpha_r + \nu - 2\varrho_n + 1/2}}{2^{\alpha_r + \nu - \varrho_n} \Gamma(\alpha_n + \nu - \varrho_n + 1)} {}_nF_n[\alpha_r, \alpha_r - \varrho_1 + 1, \dots, \alpha_r - \varrho_{n-1} + 1; \\ \alpha_r - \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_r - \alpha_n + 1, \alpha_r + \nu - \varrho_n + 1; -\frac{1}{2}x^2]$$

Hankelsche Bilder ν -ter Ordnung voneinander sind. Der Strich bedeutet, daß $t \neq r$ ist, und der Stern, daß $\alpha_r - \alpha_r + 1$ fehlt. Vorausgesetzt wird $\Re \varrho_n > 0$, $\Re (2\alpha_r - 2\varrho_n + \nu + 3/2) > 0$, $\Re (\alpha_r - \varrho_n + \nu + 1) > 0$, $\Re \varrho_n > \Re (\nu/2 + 1/4)$, $\Re (\varrho_n - \varrho_s) > \Re (\nu/2 - 3/4)$ ($r = 1, \dots, n$; $s = 1, \dots, n-1$). In den Beweis greift die Formel von Mac Robert und Thomae ein, nach der die Ausdrücke

$$\sum_{r=1}^n \left\{ \prod_{t=1}^n \Gamma(\alpha_t - \alpha_r) \prod_{s=1}^{n-1} \Gamma(\varrho_s - \alpha_r) \right\} \Gamma(\alpha_r) x^{\alpha_r} \\ \times {}_nF_{n-1}(\alpha_r, \alpha_r - \varrho_1 + 1, \dots, \alpha_r - \varrho_{n-1} + 1; \alpha_r - \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_r - \alpha_n + 1; -x) \\ \text{und} \quad \{ \Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n) / [\Gamma(\varrho_1) \cdots \Gamma(\varrho_{n-1})] \} {}_nF_{n-1}[\alpha_1, \dots, \alpha_n; \varrho_1, \dots, \varrho_{n-1}; -1/x],$$

jeder in seinem Bereiche, dieselbe Funktion darstellen. — Aus der Beziehung zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ folgert Verf., daß bei natürlichen Werten von m_1, \dots, m_{n-1} die Funktion

$$(\alpha_1 - m_1 + 1)/2, \dots, (\alpha_1 - m_{n-1} + 1)/2, (\alpha_1 + \nu + 1)/2; -\frac{1}{2}x^2]$$

ihr eigenes vorzeichenwahrendes oder -änderndes Bild der genannten Art ist, je nachdem ob $m_1 + \dots + m_{n-1}$ gerade oder ungerade ist.

L. Koschmieder.

Gatteschi, Luigi: On the zeros of certain functions with application to Bessel functions. *Indagationes math.* 14, 224—229 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 55, 224—229 (1952).

Sei $f(x) = (1 + \delta) \sin x + \varepsilon \cos x - r$, $\delta > -1$, $\delta = \delta(x)$, $\varepsilon = \varepsilon(x)$, $r = r(x)$ in $I = (\alpha, \beta)$ definiert. Es wird gezeigt: I. Wenn $f(x_0) = 0$, $x_0 \in I$, $|\varepsilon| \leq 1$, $\lambda = (|r| + |\delta \varepsilon| + \frac{1}{2} |\varepsilon^3|) (1 + \delta)^{-1} \leq 1$, so gibt es eine ganze Zahl m mit

$$(1) \quad |x_0 + \varepsilon(x_0) - m\pi| \leq \mu,$$

wo $\mu = \lambda + (\pi/2 - 1) \lambda^3$. II. Wenn A, B ganz, $A \leq B$, $\alpha = (A - 1/2)\pi$, $\beta = (B + 1/2)\pi$, in I $|\varepsilon| + \lambda < 1$ ist und ε, δ, r stetig sind, so gibt es zu jeder ganzen Zahl m mit $A \leq m \leq B$ mindestens eine Nullstelle, für die (1) gilt. Dies wird auch benutzt, um die Nullstellen der Bessel-Funktionen abzuschätzen. *K. Prachar.*

Mukherjee, B. N. and T. S. Nanjundiah: Tschebyscheff polynomials $T_n(z)$ and $U_n(z)$ and functions of the second kind. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 35, 19—23 (1952).

Die beiden Tschebyscheffschen Polynome T_n und U_n sind Partikularlösungen einer Differenzengleichung, deren allgemeine Lösung angegeben wird. Durch besondere Wahl entstehen aus dieser allgemeinen Lösung die genannten Tschebyscheffschen Polynome 1. und 2. Art. Beide Polynome genügen einer linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung, welche mit Hilfe hypergeometrischer Funktionen gelöst werden kann. Diese Lösungen können mit den Tschebyscheffschen Polynomen identifiziert werden. Zum Schluß werden Integralbeziehungen für diese Polynome angegeben. *M. J. O. Strutt.*

Chochlov, R. V.: Über einen asymptotischen Ausdruck für die assoziierten Laguerreschen Funktionen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 85, 975—976 (1952) [Russisch].

Für die zugeordneten Laguerreschen Funktionen $L_n^\nu(x)$ wird eine asymptotische Entwicklung angegeben, die die Aireysche Funktion benutzt. Sie gilt für beschränkte Werte von $t = \mu \left[\nu - 2\sqrt{(n+1)x - x} \right]$ wobei $\mu = x^{-1/6} (n+1)^{-1/6} (1 + \sqrt{x/(n+1)})^{-2/3}$. Das Hauptglied der Entwicklung lautet

$$L_n^\nu(x) = \sqrt{2} \mu n^{n+1/2} \left(\frac{n}{x} \right)^{\nu/2} e^{\nu\sqrt{x/n} - x/2 - n} \nu(t),$$

wo $\nu(t)$ die Aireysche Funktion ist.

K. Prachar.

Aljančić, S.: Beitrag zur Theorie der Gegenbauerschen Polynome. *Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova, mat. Inst.* 18, Nr. 2, 113—128 und deutsche Zusammenfass. 128 (1952) [Serbisch].

Für die Gegenbauerschen Polynome $C_n^\nu(x)$, $x = \cos \theta$, die durch

$$\frac{1}{(1 - 2hx + h^2)^\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x) h^n$$

definiert sind, gelten zwei trigonometrische Reihen

$$(1) \quad C_n^\nu(\cos \vartheta) = \frac{2 \Gamma(2\nu + n)}{\Gamma^2(\nu) n!} (2 \sin \vartheta)^{1-2\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^\nu(n) \sin(n + 2k + 1) \vartheta,$$

$$(2) \quad C_n^\nu(\cos \vartheta) = \frac{2 \Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} d_k^\nu(n) \sin \left[(n + 2\nu + 2k) \vartheta + \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \pi \right]$$

für $0 < \vartheta < \pi$ und (1') $\nu > 0$, $\nu \neq 1, 2, 3, \dots$ bzw. (2') $0 < \nu < 1$; dabei ist

$$c_k^\nu(n) = \frac{a_k^{1-n}}{(\nu + n + k) a_{n+k}^\nu}, \quad d_k^\nu(n) = \frac{a_k^\nu a_{n+k}^{2\nu}}{(\nu + n + k) a_{n+k}^\nu} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{(1-x)^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\nu x^k.$$

Die Koeffizienten $c_k^\nu(n)$ und $d_k^\nu(n)$ haben eine interessante Struktur. So, zum Beispiel, oszillieren für $s < \nu < s+1$, s ganz, die ersten s Glieder der Koeffizientenfolge $c_k^\nu(n)$, $k = 0, 1, \dots$, während der Rest der Folge dasselbe Vorzeichen hat und totalmonoton ist. Von den trigonometrischen Reihen (1) und (2) ausgehend, werden einige Eigenschaften der Gegenbauerschen Polynome bewiesen: 1° Auf Grund eines unlängst von J. Karamata (Sur certains développements asymptotiques avec application aux polynomes de Legendre, *Publ. Inst. math.*

Acad. serbe 4, im Druck) bewiesenen allgemeinen Satzes über die asymptotische Entwicklung von Funktionen, die durch im Abelschen Sinne summierbare trigonometrische Reihen dargestellt sind, wird die bekannte asymptotische Entwicklung

$$C_n^v(\cos \vartheta) = \frac{2}{B(v, v+n)} \sum_{\mu=0}^l \frac{a_\mu^v a_\mu^{1-v}}{(\nu+n+\mu) a_\mu^{v+n}} \frac{\cos [n\vartheta + (v+\mu)(\vartheta - \frac{1}{2}\pi)]}{(2 \sin \vartheta)^{v+\mu}} + o \frac{1}{n^{1-v}}$$

für $n \rightarrow \infty$ bewiesen. 2° Die Ungleichung

$$\frac{\Gamma(v) \Gamma(v+n+1)}{2^{1-v} \Gamma(2v+n)} |C_n^v(\cos \vartheta)| < \frac{G}{(\sin \vartheta)^v}, \quad 0 < \vartheta < \pi, \quad 0 < v < 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

mit von n und ϑ unabhängiger G , die ein Analogon der Stieltjesschen Abschätzung für die Legendreschen Polynome darstellt, wird mittels einer Ungleichung von L. Fejér [Math. Z. 24, 285—298 (1925)] für die Binominalreihe bewiesen.

Autoreferat.

Lambe, C. G.: Lamé-Wangerin functions. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 107—114 (1952).

Verf. geht von der Laméschen Differentialgleichung in der Wangerinschen Form aus, wobei die Ordnungszahl n die Hälfte einer ungeraden Zahl ist. Diese Gleichung wird auf eine algebraische Form transformiert, und es werden zwei Polynomlösungen dieser Gleichung angegeben. Durch Einsetzen ergeben sich Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Polynome. Hierauf betrachtet Verf. die Differentialgleichung, welche von den Quadraten und vom Produkt der Lösungen der Laméschen Gleichung erfüllt wird. Auch diese Gleichung kann durch Polynome gelöst werden mit Rekursionsformeln für die Koeffizienten. Es gelingt, die letzte Differentialgleichung einmal zu integrieren. Da sie von 3. Ordnung ist, gibt es drei Fundamentallösungen, welche in Polynomform aufgestellt werden. Durch Vergleich mit den Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichungen ergeben sich Ausdrücke für die Produkte ihrer Lösungen. Zum Schluß geht Verf. noch auf Ausdrücke in Form von Integralgleichungen für diese Lösungen ein.

M. J. O. Strutt.

Weber, Maria and A. Erdélyi: On the finite difference analogue of Rodrigues' formula. Amer. math. Monthly 59, 163—168 (1952).

Die Funktionen $\varrho(x)$ und die Polynome $X(x)$ werden gesucht, für welche

$$p_n(x) = \frac{1}{\varrho(x)} \Delta^n [\varrho(x-n) X(x) X(x-1) \dots X(x-n+1)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ein Polynom vom Grad n ist. Δ ist der Differenzenoperator. Eine Lösung dieses Problems gibt es nur, wenn $X(x)$ ein Polynom von höchstens dem zweiten Grad ist. Die zugehörigen Funktionen $\varrho(x)$ und die Polynome $p_n(x)$ werden berechnet; sie enthalten eine Reihe von bekannten Spezialfällen. Die Verff. bemerken, daß dies Problem ein nicht ganz einfacher Grenzfall einer von W. Hahn (dies. Zbl. 31, 390; 33, 57—58) behandelten allgemeineren Fragestellung ist.

J. Meixner.

Vilenkin, N. Ja.: Über gewisse fastorthogonale Funktionensysteme. Priklad. Mat. Mech. 16, 382—384 (1952) [Russisch].

Sei $P_m(x) = \cos m x - \cos(m+2)x$, $m = 0, 1, 2, \dots$ Im Quadrat $0 \leq x, y \leq \pi$ seien folgende Funktionen definiert:

$$P_{mn}(x, y) = P_m(x) P_n(y), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$Q_{mn}(x, y) = \Delta P_{mn}(x, y), \quad Q_{00}^*(x, y) = 1,$$

wo Δ der Laplacesche Operator ist. Es wird gezeigt, daß die P_{mn} ein abgeschlossenes System bilden und die Q nicht. Wenn man zu den obigen Funktionen Q noch die folgenden

$$Q_{l0}^*(x, y) = \operatorname{ch} l \left(\frac{1}{2} \pi - y \right) \cos l x, \quad Q_{0l}^*(x, y) = Q_{l0}^*(y, x) \quad l = 1, 2$$

$$Q_{l1}^*(x, y) = \operatorname{sh} l \left(\frac{1}{2} \pi - y \right) \cos l x, \quad Q_{1l}^*(x, y) = Q_{l1}^*(y, x)$$

hinzunimmt, so entsteht ein abgeschlossenes System.

K. Prachar.

Blanuša, D.: Eine Verallgemeinerung des Integralkosinus. Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova, mat. Inst. 18, Nr. 2, 129—132 und deutsche Zusammenfassg. 132 (1952) [Serbisch].

Funktionentheorie:

● Wray, Joe W.: Non-analytic functions of a complex variable representable by Lebesgue-Stieltjes integrals with a Cauchy kernel. (An abstract of a thesis.) Urbana 1952.

Block, I. Edward: The Plemelj theory for the class A^* of functions. Duke math. J. 19, 367—378 (1952).

Soit $f(\zeta)$ une fonction définie et continue sur une courbe rectifiable de Jordan Γ de sens positif remplissant la condition $s(\zeta_1, \zeta_2) \leq A |\zeta_1 - \zeta_2|$, où A est une constante, ζ_1 et ζ_2 sont des points quelconques de Γ et $s(\zeta_1, \zeta_2)$ est la longueur du plus petit de deux arcs de Γ joignant ζ_1 et ζ_2 . La fonction $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ est analytique dans les domaines D^+ et D^- , dont D^+ désigne l'intérieur

et D^- l'extérieur de Γ . Désignons par $F^+(\zeta)$ et $F^-(\zeta)$ les limites (si elles existent) de $F(z)$ lorsque z tend vers un point ζ de Γ en restant dans D^+ respectivement dans D^- . — On sait que si $f(\zeta)$ satisfait sur Γ à la condition de Lipschitz de l'ordre α $|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq M |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha$, où M et α sont des constantes positives, et si $\alpha < 1$, les limites $F^+(\zeta)$ et $F^-(\zeta)$ existent en tout point ζ de Γ et on a les formules de Sochocki $F^+(\zeta) = P(\zeta) + \frac{1}{2} f(\zeta)$, $F^-(\zeta) = P(\zeta) - \frac{1}{2} f(\zeta)$, où $P(\zeta)$ est la valeur principale de Cauchy de l'intégrale singulière $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t - \zeta} dt$. Les fonc-

tions $F^+(\zeta)$ et $F^-(\zeta)$ satisfont alors sur Γ à la condition de Lipschitz du même ordre que $f(\zeta)$ et on a $f(\zeta) = F^+(\zeta) - F^-(\zeta)$. Dans le cas $\alpha = 1$ ce résultat peut être faux. Soit $\zeta = \zeta(s)$ l'équation de la courbe Γ et s la longueur de l'arc de Γ aux extrémités ζ_0 et ζ où ζ_0 est un point fixe de Γ . Posons $f[\zeta(s)] = \Phi(s)$ et désignons par A^* la classe des fonctions continues $f(\zeta) = \Phi(s)$ remplissant sur Γ la condition [A. Zygmund, Duke math. J. 12, 47—76 (1945)] $|\Phi(s+h) + \Phi(s-h) - 2\Phi(s)| \leq K h$ où K ne dépend pas de s et $h > 0$. L'A. étend les résultats précédents aux fonctions $f(\zeta)$ de la classe A^* données sur les courbes de Jordan d'une classe G .

F. Leja.

Valverde, Facundo: Über die Monogenität gewisser Funktionen. Gac. mat., Madrid 4, 131—133 (1952) [Spanisch].

Salinas Palero, Baltasar R.: Bemerkung über die Bestimmung einer analytischen Funktion, deren Realteil bekannt ist. Gac. mat., Madrid 4, 44—46 (1952).

Carleson, Lennart: Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle. Acta math. 87, 325—345 (1952).

Es gehöre $f(z)$ zu einer gewissen Klasse C von im Einheitskreis regulären Funktionen, und es sei $F(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$, falls der Grenzwert existiert. Verf. bezeichnet

die auf $|z| = 1$ gelegene Punktmenge E als Eindeutigkeitsmenge in bezug auf C , falls ein zu C gehöriges f identisch verschwindet, sobald $F(\theta) = 0$ für jedes $e^{i\theta}$ in E . Hauptziel des Verf. ist nun die Charakterisierung solcher Mengen E für gewisse Klassen C , nämlich (a) diejenigen $f(z)$, welche eine Lipschitzbeziehung positiver Ordnung erfüllen, (b) die $f(z) = \sum a_n z^n$ mit $a_n = O(n^{-p})$, $p > 1$ oder (c) $|\ln |a_n||^{-1} = O(n^{-p})$, $0 < p < \frac{1}{2}$, $|a_n| < \text{const}$ oder (d) $\sum |a_n| < \infty$, (e) die $f(z)$ mit beschränktem Dirichletintegral. In dieser Richtung werden mehrere Sätze aufgestellt und Beweise geliefert, die jedoch nicht immer vollständig sind.

G. af Hällström.

Lohwater, A. J.: The boundary values of a class of meromorphic functions. Duke math. J. 19, 243—252 (1952).

Verf. betrachtet die Klasse derjenigen im Einheitskreise meromorphen und dort höchstens endlichviele Null- und Unendlichkeitsstellen besitzenden Funktionen $f(z)$, für welche die radialen Grenzwerte von $|f(re^{i\theta})|$ fast überall in $-\pi < \theta \leq \pi$ gleich Eins sind. Es zeigt sich, daß die im beschränkten Falle bekannten Resultate sich auf einen gewissen unbeschränkten Fall verallgemeinern lassen, indem die folgenden Sätze bewiesen werden: Wenn eine Funktion $f(z)$ der genannten Klasse eine beschränkte Charakteristik besitzt, dann gibt es wenigstens einen Radius $\theta = \theta_0$ derart, daß $f(re^{i\theta_0}) \rightarrow 0$ oder $\rightarrow \infty$ für $r > 1$ ist, sofern $f(z)$ nicht mit einer rationalen Funktion übereinstimmt. Ferner, im allgemeineren Falle, wo eine Funktion $f(z)$ der Klasse nicht notwendigerweise beschränkter

Charakteristik ist, läßt sich schließen, daß es einen in einen Peripheriepunkt mündenden Jordanbogen gibt, längs dessen $f(z)$ gegen 0 oder ∞ strebt. Einige verwandte Sätze werden erwähnt.

Y. Komatu.

Bourion, Georges: Sur le prolongement analytique des séries lacunaires. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **31**, 127—140 (1952).

(1) $\sum_0^\infty a_n w^n$ heiße eine Lückenreihe, wenn nicht alle Koeffizienten von einer Stelle an 0

sind und wenn $n_k < m_k < n_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) und $\lambda > 1$ existieren, so daß $a_n = 0$ für $n_k \leq n < m_k$ und $m_k/n_k \geq \lambda$ ist. Es gibt Funktionen $f(w)$ mit folgender Eigenschaft: $f(w)$ wird in der Umgebung von $w = 0$ durch eine Lückenreihe dargestellt und ist (mindestens) regulär in einem $w = 0$ und $w = \infty$ im Innern enthaltenden einfach zusammenhängenden Gebiet E der vollen, d. h. durch Hinzunahme von $w = \infty$ erweiterten w -Ebene, wobei noch E einen Winkelraum enthält, der von zwei von $w = 0$ auslaufenden Halbstrahlen eingeschlossen wird. Dabei lassen sich die Indexfolgen n_k, m_k in einem gewissen Umfang ($\lambda \geq m_k/n_k \geq \lambda > 1$, $n_{k+1}/m_k \geq \mu > 1$) beliebig vorschreiben, oder lassen sich an E noch weitere Forderungen stellen. Die Beispiele weisen die Besonderheit auf, daß auch die Entwicklung von $f(w)$ nach Potenzen von $1/w$ in der Umgebung von $w = \infty$ Lückencharakter hat, lassen sich aber so modifizieren, daß diese Besonderheit nicht mehr auftritt. Beim Beweis benützt Verf. Methoden und Ergebnisse von E. Lindelöf, F. Carlson und G. Pólya [vgl. insbes. G. Pólya, Math. Z. **29**, 549—640 (1929)]. — Weiter kann Verf., Sätze von M. L. Cartwright (dies. Zbl. **11**, 311; **13**, 212) über die Nullstellen ganzer Funktionen heranziehend, zeigen: Eine Lückenreihe (1) kann keine Funktion definieren, die in der vollen, nur längs einer zum Ursprung radialen endlichen Strecke aufgeschlitzten w -Ebene regulär ist. Von der Forderung der Regularität in $w = \infty$ kann man dabei noch abgehen. An die Stelle des radialen Schlitzes kann man einen Schlitz längs eines Bogens des Kreises $|w| = 1$ treten lassen. — Zum Schluß untersucht Verf. Potenzreihen mit Überkonvergenz, wobei das Überkonvergenzgebiet U in der Nähe des Konvergenzkreises gewisse vorgeschriebene Eigenschaften hat. Beispiel: Enthält U ein den Konvergenzkreis umfassendes Kreisgebiet, aus dem eine genügend scharfe, nach innen weisende, an den Konvergenzkreis heranreichende Spitze weggenommen ist, so läßt sich die Reihe als Summe zweier Potenzreihen schreiben, deren eine Lücken beliebig groß vorgeschriebener Relativbreite und deren andere einen größeren Konvergenzradius besitzt. — Weitere Literatur: Verf., dies. Zbl. **17**, 313.

W. Meyer-König.

Džrbašjan, M. M.: Über die Entwicklung ganzer Funktionen in verallgemeinerte Taylorsche Reihen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **82**, 665—668 (1952) [Russisch].

Es sei $E(z) = E(z; \varrho, \sigma) = \sum_{n=0}^\infty (2\sigma)^{n/\varrho} \Gamma(1 + 2n/\varrho)^{-1} \cdot z^n$ die Mittag-Lefflersche Funktion von der Ordnung $\varrho/2$ und dem Typus 2σ . Es wird gezeigt, daß jede ganze Funktion $g(z)$ von Ordnung ϱ und Typus $< \sigma$ auf eine und nur eine Art in eine Reihe der Gestalt $g(z) = \sum_{\nu=0}^\infty c_\nu z^\nu E^{(\nu)}(\bar{\alpha}_\nu z)$ entwickelt werden kann, die innerhalb $|z| < \infty$ gleichmäßig konvergiert, wenn dabei die α_ν eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^{-1/\varrho} |\alpha_\nu| < (\log 2) (\varrho \sigma)^{-1/\varrho}$ bedeuten, und $Q_\nu(z)$ die zugehörigen Abel-Gončarov-Polynome. Die Q_ν und $z^\nu E^{(\nu)}$ (wie oben) bilden ein biorthogonales System; das gestattet, die c_ν auszudrücken.

E. Ullrich.

Wilson, R.: A note on a theorem of Pólya's. Quart. J. Math., Oxford II. Sér. **3**, 145—150 (1952).

Soit $f(z)$ une fonction analytique et $\{b_n\}$ une suite numérique telle que $\lim |b_n|^{1/n} = 0$. Alors la fonction $f^*(z) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{b_n}{n!} f^{(n)}(z)$ est régulière dans le domaine d'existence de $f(z)$. On doit à G. Pólya plusieurs résultats sur les singularités de $f^*(z)$ [Göttinger Nachr. **1927**, 187—195, ce Zbl. **8**, 62]. R. Wilson complète certains de ces résultats et démontre entre autres que: Si $f(z)$ est régulière dans un cercle $|z - a| < r$ et si $z_0 = r e^{i\theta_0}$ est un point singulier de $f(z)$, isolé par rapport à la circonférence $|z| = r$ (c'est-à-dire il existe un arc $z = r e^{i\theta}$, $0 < |\theta - \theta_0| < \delta$, sur lequel $f(z)$ est régulière), alors z_0 est un point singulier de $f^*(z)$ isolé par rapport à la circonférence $|z| = r$.

F. Leja.

Skolem, Th.: On the abscissa of convergence for some Dirichlet's series. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **24**, Nr. 11, 54—59 (1952).

Verf. wirft die Frage auf nach der Konvergenzabszisse Dirichletscher Reihen der Gestalt

$$\sum_{x_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=1}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n)^{-s} \quad \text{mit} \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{t=1}^m a_t x_1^{e_{t,1}} \cdots x_n^{e_{t,n}},$$

wobei $a_t > 0$ ist und die $e_{t,r}$ reell und nicht negativ sind. Es wird der folgende

Satz bewiesen: Ist $\mu = \max_{\delta_1, \dots, \delta_m} \min_{1 \leq r \leq n} e_{1,r} \delta_1 + \cdots + e_{m,r} \delta_m \left(\delta_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \delta_i = 1 \right)$,

so ist die Reihe konvergent für $s > \mu^{-1}$ und divergent für $s \leq \mu^{-1}$. (In dem vom Verf. formulierten Satz fehlt die Voraussetzung, daß die $e_{t,r} \geq 0$ sein sollen.) — Der Beweis wird durch direkte Abschätzungen erbracht; wie Verf. bemerkt, scheint die direkte Anwendung der bekannten Formeln zur Bestimmung der Konvergenzabszisse Dirichletscher Reihen nicht ganz einfach zu sein. *A. Peyerimhoff.*

Austin, M. C.: On the absolute summability of a Dirichlet series. *J. London math. Soc.* **27**, 189—198 (1952).

Suppose $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots$; $l_n \rightarrow \infty$ and $D = \overline{\lim} (\log n / \log l_n) < \infty$. Further suppose that $k \geq 0$ and that σ_k, σ_k are respectively the abscissae [Cf. G. H. Hardy and M. Riesz, *Cambridge Tracts in Math.* **18**, 45—46 (1915); N. Obrechhoff, *Math. Z.* **30**, 375—386 (1929)] of summability (R, l, k) , $|R, l, k|$ of the Dirichlet series $\sum a_n l_n^s$. The object of this paper is to study the relationship between σ_k and $\bar{\sigma}_k$. In particular, the author proved the following two theorems: Theorem A. If $0 < x \leq 1$ and $k \geq 0$, then $\bar{\sigma}_{k+x} \leq \sigma_k + (1-x)D$. Theorem B. Let k^* denote the lower bound of the numbers k such that $\sigma_k < +\infty$. Then for all $k \neq k^*$, $\bar{\sigma}_k \leq \sigma_k + D$. — For $x = 1$, Theorem A reduces to a theorem of Bosanquet (this *Zbl.* **31**, 296). It is still open whether the restriction $k \neq k^*$ is necessary (Cf. L. S. Bosanquet, this *Zbl.* **30**, 149). *Noshiro.*

Bohr, Harald: On the summability function and the order function of Dirichlet series. *Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd.* **27**, Nr. 4, 39 S. (1952).

Es sei $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ eine Dirichletreihe, die weder überall konvergiert, noch überall divergiert. Mit $\psi(s)$ bezeichnen wir die untere Grenze (u. Gr.) aller $r \geq 0$, für die $f(s)$ auf der Graden σ Riesz-summierbar von der Ordnung r ist. Man nennt $\psi(\sigma)$ die Summabilitätsfunktion. Mit $\mu(\sigma)$ bezeichnen wir die u. Gr. aller $l \geq 0$, für die $f(\sigma + it) = O(|t|^l)$ ist. Man nennt $\mu(\sigma)$ die Ordnungsfunktion. Folgende Tatsachen sind bekannt: Rechts von einer gewissen Stelle Ω hat $\psi(\sigma)$ endliche Werte und stellt dort eine stetige, konvexe Funktion dar, die rechts von einer gewissen Stelle $\omega_\psi \geq \Omega$ gleich Null ist. Falls $\omega_\psi > \Omega$, gilt $\psi'(\omega_\psi - 0) \leq -1$. Auch $\mu(\sigma)$ ist für $\sigma > \Omega$ erklärt, stetig und konvex. Rechts von einer gewissen Stelle ω_μ ist auch $\mu(\sigma) = 0$. Es ist unbekannt, ob auch (*) für $\mu(\sigma)$ notwendig $\mu'(\omega_\mu - 0) \leq -1$ gilt, falls $\omega_\mu > \Omega$. Schließlich ist stets $\psi(\sigma) \leq \mu(\sigma) \leq \psi(\sigma) + 1$ für $\sigma > \Omega$. — Verf. zeigt, daß es zu willkürlich vorgegebenen $\Omega, \omega_\psi \geq \Omega, \omega_\mu \geq \Omega$ und willkürlich vorgegebenen Funktionen $\psi(\sigma), \mu(\sigma)$, die den oben aufgezählten Bedingungen einschl. (*) genügen, stets eine Dirichletreihe gibt, welche dieses ψ und μ als Summabilitäts- bzw. Ordnungsfunktion besitzt. Die Reihe wird konstruiert. Sie wird linear zusammengesetzt aus abzählbarvielen Reihen, deren ψ und μ besonders einfach ist, und die sich deshalb leichter angeben lassen. — Die Arbeit wurde auf Grund von Notizen aus dem Nachlaß Bohrs von E. Følner fertiggestellt. *W. Maak.*

Germa, R. H.: Un exemple simple de produit indéfini de facteurs primaires dont les zéros sont les racines d'équations récurrentes. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér.* **66**, 49—54 (1952).

Verf. definiert rekursiv eine gewisse Folge quadratischer Gleichungen, für deren Wurzelpaare α_n, β_n ($n = 0, 1, \dots$) gilt: α_n, β_n reell, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, $\beta_n < \beta_{n+1}$, $\alpha_0 < \beta_0$, $\alpha_n \rightarrow A$, $\beta_n \rightarrow B$. Sodann wird vermöge eines konvergenten unendlichen Produktes eine Funktion konstruiert, die im Innern des Kreises $|z - (A + B)/2| = (B - A)/2$ der komplexen z -Ebene regulär ist und dort die Nullstellen α_n, β_n besitzt. Man könnte dazu eine allgemeine Methode heranziehen (vgl. É. Picard, *Traité d'analyse* II, Paris 1925, S. 148—151), kommt jedoch in dem vorliegenden Fall etwas einfacher zum Ziel.

W. Meyer-König.

San Juan, Ricardo: Einige bemerkenswerte asymptotische Entwicklungen. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. **12**, 63—65 (1952) [Spanisch].

Errata d'un travail de l'A. (ce Zbl. **43**, 66).

J. Horváth.

Smith, R. C. T.: An interpolatory function analogous to the cardinal function. *Quart. J. Math.*, Oxford II. Ser. **3**, 235—240 (1952).

If the series $-\frac{1}{\Gamma(-z)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r b_r}{r!(z-r)}$ converges for a nonintegral value of z , it defines an integral function $G(z)$ which takes the values b_r at the nonnegative integers. For either of the conditions (i) $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{|b_r|^p}{r!} < \infty$, $p > 1$; (ii) $\frac{b_r}{r} = o(r^\delta)$, $\delta > 0$; the author proves the „consistency“ property

$$G(x) = -\frac{1}{\Gamma(-x+\lambda)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n G(n+\lambda)}{n!(x-n-\lambda)} \quad (R(\lambda) < 0),$$

and shows its relation to a series-inversion formula of Linfoot and Shepherd (this Zbl. **22**, 49). [Convergence and consistency results for the cardinal series, which takes on given values at all the integers, are given in J. M. Whittaker, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, II. Ser. **1**, 41—46 (1927) and this Zbl. **12**, 155; and in W. L. Ferrar, *Proc. roy. Soc. Edinburgh*, Sect. A **47**, 230—242 (1927)].

N. A. Bowen.

Kober, H.: A remark on the approximation of a function of two real variables by nearly analytic functions. *J. London math. Soc.* **27**, 369—371 (1952).

Eine in der offenen Menge R der z -Ebene ($z = x + iy$) stetige Funktion $f(z)$ heiße nahezu (nearly) analytisch in R , wenn f stetig ist in R und analytisch in allen Punkten von $R - N$, wobei N das 2-dimensionale Lebesguesche Maß (L_2 -Maß) Null hat. — Satz. Für eine in $|z| \leq 1$ stetige Funktion $F(z)$ gilt: (1) Es gibt eine Folge nahezu analytischer Funktionen $h_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, durch welche F in $|z| \leq 1$ gleichmäßig approximiert wird; (2) Zu einer in $|z| < 1$ analytischen Funktion $g(z)$ mit in $|z| < 1$ beschränkter Ableitung $g'(z)$ gibt es eine Folge $\{h_n(z)\}$ der in (1) genannten Beschaffenheit derart, daß $h'_n(z) = g'(z)$ L_2 -fast überall in $|z| < 1$; (3) Genügt F überdies in $|z| \leq 1$ der Lipschitzbedingung $|F(z_2) - F(z_1)| \leq C|z_2 - z_1|^v$, wo C konstant und $0 < v \leq 1$, so genügt jedes der gemäß (2) gewählten h_n ebenfalls je einer Lipschitzbedingung. — Bisher war dies nur für in $|z| < 1$ analytische Funktionen F mit in $|z| < 1$ beschränkter Ableitung bekannt, wobei F bei geeigneter Fortsetzung auf $|z| = 1$ einer Lipschitzbedingung mit $v = 1$ genügt (vgl. dies. Zbl. **35**, 47, a. a. O. 449).

Haupt.

Offord, A. C.: Some remarks on Fréchet's space of integral functions. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. **2**, 60—68 (1952).

Der lineare Raum der ganzen Funktionen wird nach Fréchet als (F) -Raum aufgefaßt und ist dann von 2. Kategorie in sich. Es werden einige Eigenschaften angegeben, die alle ganzen Funktionen mit Ausnahme einer Menge 1. Kategorie erfüllen: Ist $\{F_n\}$ eine Folge abgeschlossener beschränkter Mengen in dem Winkelraum $\pi/2 + \varepsilon \leq \arg z \leq 3\pi/2 - \varepsilon$, so daß der Abstand von F_n vom Ursprung nach ∞ geht, so erfüllen alle ganzen Funktionen bis auf eine Menge 1. Kategorie

die Beziehung $\limsup_n \sup_{z \in F_n} |f(z)| = 0$. Es gibt ferner eine Menge F^* , deren Komplement von 1. Kategorie ist, so daß jedes $f \in F^*$ jeden Wert unendlich oft in jedem Parallelstreifen annimmt. Dies gilt sogar noch für etwas schmalere Gebiete. Es sei $\alpha(r)$ eine wachsende Funktion von r mit $r^{-k} \alpha(r) \rightarrow \infty$ für jedes k , $\psi(z)$ eine ganze Funktion, $\{F_n\}$ eine Folge abgeschlossener beschränkter Gebiete mit einem gegen ∞ gehenden Abstand vom Ursprung, so gibt es wieder eine Menge F^* mit einem Komplement 1. Kategorie, so daß zu jedem $f \in F^*$ eine Folge $n_i(f)$ existiert mit $\sup_{z \in F_{n_i}} |f(z) - \psi(z)| < \alpha(r)$. G. Köthe.

Delange, Hubert: Un théorème sur les fonctions entières à zéros réels et négatifs. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 55—78 (1952).

A proof of each of the following theorems is given which consists of two parts, of which one part is based on the theory of normal families of analytic functions. Theorem A. Let (1) $f(z)$ be an integral function of genus p having real negative zeros only, let $n(t)$ denote the number of zeros in $|z| \leq t$, let $p < \varrho < p+1$. Then if (2) $\log |f(x)| \sim (-1)^p A x^\varrho$ as $x \rightarrow \infty$, it follows that (3) $n(t) \sim A \frac{\sin \pi \varrho}{\pi} t^\varrho$ as $t \rightarrow \infty$. Theorem B. Let (1) hold. Let the real number θ

satisfy $|\theta| < \pi$ and (4) $\text{NOT } m\pi/2 (p+1) < |\theta| \leq m\pi/2 \varrho$ for any odd integer m . Then if (5) $\log |f(re^{i\theta})| \sim (-1)^p A r^\varrho \cos \varrho \theta$, (3) follows. — No generality is lost by considering the canonical product in place of $f(z)$ defined by (1), as the Hadamard factorisation theorem shows. This the author does. Denoting the zeros by $-a_j$ ($j = 1, 2, \dots$), he shows, by using the theory of

normal families, that $F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a_j^p} \log \left(1 + \frac{z}{a_j}\right)$ satisfies (6) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{\varrho-p}} F(re^{i\theta}) = A \frac{\varrho}{\varrho-p} e^{(\varrho-p)i\theta}$

uniformly in $|\theta| < \pi$. (3) is deduced from the imaginary parts of (6) for θ near π , by an argument resembling that used by rev. (this Zbl. 30, 49) in a different proof of theorem A. Other proofs of this theorem, mentioned by the author, are due to Valiron [Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. Sér. 5, 117—257 (1914)], and, for $p=0$, to Titchmarsh [Proc. London math. Soc., II. Ser. 26, 185—200 (1926)] and Heins (this Zbl. 29, 298). For the proof of theorem B, the theory of normal families is used to show that (3) follows from (5) if θ is a real number that satisfies $|\theta| < \pi$, $\cos \varrho \theta \neq 0$, provided that the additional assumption $n(t) = O[t^\varrho]$ is made. A simple calculation verifies that $n(t) = O[t^\varrho]$ is a consequence of (4). When θ lies in $m\pi/2 (p+1) < |\theta| < m\pi/2 \varrho$, (m odd), (5) can hold without (3), as is shown by an example. Theorem B is included in the following theorem (rev. and Macintyre, this Zbl. 42, 312), when combined with theorem A. It also contains a restriction which rules out the possibility of Delange's counter-example. Theorem. Let (1) and (5) hold, where θ is a real number in $|\theta| < \pi$. Then (2) follows if either $0 < |\theta| < \pi/2 \varrho$ and $\log f(x) = o(x^{\pi/2|\alpha|})$; or $m\pi/2 \varrho < |\theta| < (m+2)\pi/2 \varrho$ and $\log f(x) = o(x^{(m+2)\pi/2|\alpha|})$ with m an odd positive integer. — Theorem B is a generalisation of theorem A. Other generalisations occur in the above-mentioned papers by Bowen, and Bowen and Macintyre, who point out that the full force of (5) is unnecessary in many cases (in particular when $\theta=0$), a sequence $\{r_n\}$, in place of r , tending steadily to infinity and satisfying $r_{n+1}/r_n \rightarrow 1$, being sufficient. N. A. Bowen.

Iliev, Ljubomir: Sätze über dreifach symmetrische schlichte Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 9—12 (1952) [Russisch].

Numerische Schätzungen für die ersten neun Koeffizienten der schlichten Funktionen $f_3(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + \dots + a_n^{(3)} z^{3n+1} + \dots$ in $|z| < 1$, auf Grund der Methode von Levin (1935). Ferner Aussagen über den größten Kreis $|z| \leq \theta < 1$, für den die Schlichtheit der Teilsummen $\sigma_n^{(3)}(z)$ dieser Reihe, bzw. von $\sigma_n^{(3)}(z)/z$ gesichert werden kann. E. Ulrich.

Franck, A.: Analytic functions of bounded type. Amer. J. Math. 74, 410—422 (1952).

An analytic function $f(z)$ is said to be of bounded type (B. T.) if $f(z) = h_1(z)/h_2(z)$ where, for $i = 1, 2$, $h_i(z)$ is analytic and $|h_i(z)| < 1$. The author establishes for other regions theorems analogous to a Theorem of Ostrowski-Nevanlinna: (i) A necessary and sufficient condition that $F(w)$, regular in $|w| < 1$ be B. T. is that $\int_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{i\theta})| d\theta \leq M$, $0 \leq r < 1$. (ii) If $F(w)$ is B. T. in $|w| < 1$, then

$F(w) = B(w)G(w)$, where $B(w)$ is the Blaschke product formed with the zeros of $F(w)$ in $|w| < 1$ and $G(w)$ is B. T., $\neq 0$ in $|w| < 1$, satisfying

$$\log |G(w)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos(\theta - \alpha)} d\Phi(\theta),$$

where $w = \varrho e^{i\alpha}$ and $\Phi(\theta)$ is of bounded variation in $0 \leq \theta \leq 2\pi$. (iii) If $F(w)$ satisfies the inequality (i), so does $G(w)$. (iv) If $F(w)$ is B. T. in $|w| < 1$, it possesses boundary values for almost all θ ($w = e^{i\theta}$), for nontangential approach. The method consists essentially of conformal transformation of the new region on to the unit circle $|w| < 1$ and appeal to the above theorem. A reduction of hypothesis (i) above, viz., the replacement of all r in $0 \leq r < 1$ by a sequence r_n , is shown possible by the use of a theorem of Gabriel [J. London math. Soc. 4, 133—139 (1929)]. Typical of the results obtained is the Theorem: Let $f(z)$ be analytic in $R(z) > 0$. Let C_n be a sequence of circles, radii R_n , which exhaust $R(z) > 0$. Let

$$\iint_{C_n} \frac{\log^+ |f(z)|}{|1+z|^2} dx dy \leq M R_n. \text{ Then } f(z) \text{ is B. T. in } R(z) > 0, f(z) = b(z)g(z),$$

[where $b(z)$ is the Blaschke product formed with the zeros of $f(z)$ in $R(z) > 0$], and for any circle C , radius R , in $R(z) > 0$, $\iint_C \frac{\log^+ |g(z)|}{|1+z|^2} dx dy \leq N R$. Conversely,

if $f(z)$ is B. T. in $R(z) > 0$, then $f(z)$ satisfies the latter inequality with f in place of g . The paper ends with a new proof of a theorem due to Wishard, Duke Math. J. 9, 672 (1942).

N. A. Bowen.

Nassif, M.: On the behaviour of the function $\sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{2} \pi i n^2} \frac{z^{2n}}{n!}$. Proc. London math. Soc., II. Ser. 54, 201—214 (1952).

Verf. beweist den folgenden Satz: Es sei

$$z_N = i N^{1/2} \exp(\tfrac{1}{2} \pi i \sqrt{2} (1 - 2N)), \quad z'_N = -z_N,$$

wobei N als groß vorausgesetzt werde; dann hat $f(z)$ genau eine Nullstelle innerhalb der Kreise C_N, C'_N wobei

$$C_N: |z - z_N| = \tfrac{1}{4} N^{-1/2}, \quad C'_N: |z - z'_N| = \tfrac{1}{4} N^{-1/2}.$$

Es seien ζ_N, ζ'_N die Nullstellen von $f(z)$ in den Kreisen C_N und C'_N , D_N und D'_N möge die Kreise

$$|z - \zeta_N| = \exp(-\varrho_N^{2-\epsilon}), \quad |z - \zeta'_N| = \exp(-\varrho'_N^{2-\epsilon})$$

bezeichnen, wobei $\varrho_N = |\zeta_N|$, $\varrho'_N = |\zeta'_N|$. Dann gilt für jeden Punkt außerhalb dieser Kreise, wenn $|z| = R$ genügend groß,

$$|f(z)| > \exp(\tfrac{1}{2} R^2).$$

Verf. beweist diesen Satz durch Betrachtung des Maximalgliedes von $f(z)$ und einiger benachbarter Summanden, sowie durch Herleitung neuer Abschätzungen für die Theta-Funktion $\vartheta_1(v, \tau)$ und ihre Ableitungen. W. Saxer.

Tims, W. R.: Note on a paper by M. Nassif. Proc. London math. Soc., II. Ser. 54, 215—218 (1952).

Verf. gibt einen genaueren Satz über die Verteilung der Nullstellen der von Nassif betrachteten Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{2} \pi i n^2} \frac{z^{2n}}{n!}$. W. Saxer.

Sherman, S.: On the roots of a transcendental equation. J. London math. Soc. 27, 364—366 (1952).

Die Gleichung $s \cdot e^s - a_1 \cdot e^s - a_2 = 0$ mit gegebenen (komplexen) a_1, a_2 besitze keine rein imaginäre Wurzel s . Sie hat genau dann nur Wurzeln mit negativen Realteilen, wenn im Falle $|a_2| < |\Re(a_1)|$ gilt $a_1 < 0$ und im Falle $|a_2| \geq |\Re(a_1)|$ gilt $N_{12} - N_{21} + (1 + \operatorname{sgn} \Re a_1)/2 = 0$. Dabei geben N_{12} bzw. N_{21} an, wie oft das

Argument einer gewissen Hilfsfunktion ein ungerades Vielfaches von π in steigendem bzw. fallendem Sinne überschreitet.

L. Collatz.

Hayes, N. D.: The roots of the equation $x = (c \exp)^n x$ and the cycles of the substitution $(x|c \exp)$. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 81—90 (1952).

Für $n = 1, 2, \dots$; $c < \infty$ erkläre man die aufgestockten Exponentiellen durch $(c \exp)^n x = c \exp \{(c \exp)^{n-1} x\}$. Seit Euler weiß man, daß $x - a^x = 0$ weniger reelle Wurzeln aufweist als (1) $x - a^{ax} = 0$. Transzendente Bestimmungs-gleichungen wie (1) erweisen sich für die Bearbeitung gewisser Differenzen-Differentialgleichungen als nützlich. Die Trennung der Wurzeln von $x = (c \exp)^n x$ erfolgt in der komplexen x -Ebene durch Streifeneinteilung der Breite π ; beansprucht wird eine ziemlich weitläufige Einzeldiskussion.

Wilhelm Maier.

Sz.-Nagy, Gyula: Über die Lage der kritischen Punkte rationaler Funktionen. Acta Sci. math. 14, 179—185 (1952).

L'A. étend les théorèmes de Walsh, Bôcher et du rapporteur sur les relations entre les zéros de la dérivée d'une fraction rationnelle, et les zéros et pôles de cette fraction, au cas où ces derniers sont remplacés par les points où la fraction rationnelle prend deux valeurs distinctes données. L'énoncé du th. de Bôcher donné au bas de la p. 182 n'est pas correct, car la première partie de l'énoncé, aussi bien que la seconde, n'est valable que si les domaines circulaires K_1, K_2 n'ont aucun point commun.

J. Dieudonné.

Shah, G. T.: Relation for one-quarter period of Weierstrass's \wp -function. Math. Student 19, 134—135 (1952).

Watson, G. N.: Periodic sigma functions. Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 129—149 (1952).

Die von Weierstrass eingeführte σ -Funktion baut sich aus der ungeraden und einfach periodischen Thetafunktion bekanntlich folgendermaßen auf:

$$\sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'(0)} e^{\eta u^2/2\omega_1} \vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right).$$

Durch die Bestimmungsgleichung $\eta = 0$ werden also solche Periodenverhältnisse gekennzeichnet, welche auch für $\int^\eta du \wp(u)$ eine Periodizität sicherstellen. Unter den rechteckigen Periodengittern elliptischer Funktionen kommt nur das eine Seitenverhältnis (1) $\omega_2/\omega_1 = i \cdot 0,5235 \dots$ in Betracht. Die Gesamtheit der Lösungen von $\vartheta_1'''(0, \frac{\omega_2}{\omega_1}) = 0$ führt auf abzählbar viele Parallelogrammgitter, die ebenfalls $\eta = 0$ bewirken und geordnet werden können nach teilerfremden Brüchen wachsender Nenner. Neben (1) erscheinen als „benachbarte“ bevorzugte Periodenverhältnisse z. B. $\omega_2/\omega_1 = \pm 0,5 + i \cdot 0,909 \dots$.

W. Maier.

Lelong-Ferrand, Jacqueline: Sur certaines classes de représentations d'un domaine plan variable. J. Math. pur appl., IX. Sér. 31, 103—126 (1952).

Die Verf. versucht in der ersten Hälfte der Abhandlung eine Verallgemeinerung derjenigen Begriffe, welche in der Theorie der konformen Abbildungen veränderlicher Gebiete nützlich sind. Hauptsächlich wird die Familie derjenigen Transformationen betrachtet, von welchen jede in einem gegebenen Gebiet zur Klasse BL im Sinne von Nikodym (dies. Zbl. 8, 159) gehört und ferner dort das beschränkte Dirichletsche Integral besitzt. Soweit das unbeschränkte Grundgebiet oder die unbeschränkten Transformationen in Frage kommen, soll die Metrik auf der Riemannschen Kugel bzw. der Ersatz des Dirichletschen Integrals auf Grund der entsprechenden Metrik benutzt werden. Zuerst werden die klassischen Begriffe über den Kern einer Gebietsfolge sowie die Konvergenz einer Gebiets- bzw. Transformationsfolge erklärt. Dann wird eine Hauptungleichung hergeleitet, indem eine Art Mittel der Lagen der Bildkurven der konzentrischen Kreisperipherien um einen Punkt abgeschätzt werden mittels des Dirichletschen Integrals. Diese Abschätzung wird sodann benutzt, um eine obere Schranke des Stetigkeitsmoduls einer inneren oder etwas verallgemeinerten Transformation zu bestimmen, was ein Hauptergebnis dieser Abhandlung ist. Es wird gezeigt, daß sich der Carathéodorysche Satz über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung auch auf die topologische Transformation von BL verallgemeinern läßt. Um später die Folge der topologischen Transformationen mit beschränkten

Dirichletschen Integralen zu untersuchen, wird eine untere Schranke der Entfernung des Urbildes vom Gebietsrande bei einer derartigen Transformation geliefert, falls die Entfernung des Bildkontinuums vom Rande durch eine positive Konstante beschränkt ist. — Die Verf. überlegt sich in der letzten Hälfte die Konvergenz derjenigen Folge, welche aus den in den einzelnen Gebieten definierten Transformationen mit den soeben erwähnten Eigenschaften besteht. Falls die Entfernungen der vorgeschriebenen Normierungspunkte von den betreffenden Gebieten sich nicht gegen Null häufen, läßt sich zeigen, daß es stets eine gegen eine unausgeartete Grenztransformation konvergierende Teilfolge gibt. Andernfalls läßt sich dagegen zeigen, daß eine gewisse Teilfolge ausartet. Einige Ergebnisse in beiden genannten Fällen, insbesondere über das Verhalten der Grenztransformation im unausgearteten Falle, werden erwähnt. Nebenbei wird bemerkt, daß die Analytizität bei klassischen Sätzen eine wesentliche Rolle nur in bezug auf die Eindeutigkeit der Transformation spielt. Zum Schluß wird noch eine Anwendung gemacht auf die Untersuchung des Verhaltens einer in der rechten Halbebene schlichten Funktion um den unendlich fernen Punkt. — Unglücklicherweise enthält die Abhandlung einen ungewöhnlichen typographischen Fehler, was auch die Verf. dem Ref. brieflich mitgeteilt hat; die Berichtigung wird aber bald in diesem Journal erscheinen. Die Abhandlung ist der folgenden Reihe nach zu lesen: S. 106, Zl. 1 → S. 108, Z. 2; S. 109, Z. 1 → S. 107, Z. 2; S. 108, Z. 1 → S. 106, Z. 2; S. 107, Z. 2 → S. 109, Z. 2.

Y. Komatu.

Piranian, George: Uniformly accessible Jordan curves through large sets of relative harmonic measure zero. *Pacific J. Math.* 2, 371–375 (1952).

Let R be a Jordan region, E a set of points on the boundary of R and $w = f(z)$ a continuous schlicht mapping of $|z| \leq 1$ upon the closure of R , conformal in $|z| < 1$. The set E is said to have harmonic measure 0 relative to R provided its image $f^{-1}(E)$ on the unit circle is a set of Lebesgue measure 0. The author gives an example of a Jordan region R whose boundary passes through a linear set of positive Lebesgue measure (or through a set of positive two-dimensional Lebesgue measure) and of harmonic measure 0 relative to R , and which has the property that each boundary point of R can be reached from a certain fixed point in R by an arc whose length is less than one and whose interior points all lie in R . The following conjecture is given: Let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, with $\sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 < \infty$, and let E be the set of points $e^{i\theta}$ for which $f(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ exists. Then E has a subset E^* of measure 2π and with the property that the set of values $f(e^{i\theta})$ ($e^{i\theta}$ on E^*) has two-dimensional Lebesgue measure 0.

J. Gorski.

Hällström, Gunnar af: On the conformal mapping of incision domains. *Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math.* 16, Nr. 13, 13 S. (1952).

Auf der Kreislinie $|z| = 1$ sei eine Folge (λ_n) von offenen einander nicht überdeckenden Kreisbögen λ_n gegeben und ihre abgeschlossene Komplementärmenge (bezüglich $|z| = 1$) mit κ bezeichnet. Daneben werden Schlitzgebiete E betrachtet, die dadurch entstehen, daß man von der Kreisscheibe $|w| < 1$ die abgeschlossene Hülle einer abzählbaren Menge von Einschnitten $l_n (w = \rho e^{i\varphi_n}, 0 < w_n \leq \rho \leq 1)$ wegnimmt, aber so, daß jeder Punkt der Kreislinie $|w| = 1$ noch erreichbarer Randpunkt des Schlitzgebietes ist. Nun soll $|z| < 1$ auf ein solches Schlitzgebiet konform abgebildet werden, so daß die Kreisbögen λ_n den isolierten Einschnitten und freien Stücken der Häufungsschnitte entsprechen. Verf. zeigt, daß dies dann und nur dann möglich ist, wenn jeder isolierte Teil von κ eine positive Kapazität hat. Mit der Abbildung im Zusammenhang steht die Greensche Funktion $g(z, \infty)$ des Gebietes, das aus der Vollebene durch Wegnehmen von κ entsteht. Mittels der Kriterien von N. Wiener, G. af Hällström [*Acta. Soc. Sci. Fennicae*, n. Ser. A 3, 5 (1941)] und L. Myrberg (dies. Zbl. 42, 316) für reguläre und irreguläre Randpunkte auf κ bezüglich der Greenschen Funktion $g(z, \infty)$ wird die Gestalt des Bildgebietes E diskutiert.

A. Pfluger.

Jenkins, James A.: Remark on „some problems in conformal mapping“. *Proc. Amer. math. Soc.* 3, 147–151 (1952).

Die in Kap. IV, § 4 seiner früheren Arbeit (dies. Zbl. 36, 49) gestreifte Frage,

wann für ein dreifach zusammenhängendes Gebiet und ein dreifach zusammenhängendes Teilgebiet die Moduln $\Re(a_1, a_2, a_3)$ übereinstimmen, unterzieht Verf. einer eingehenden Diskussion.

A. Pfluger.

Huckemann, Friedrich: Verschmelzung von Randstellen Riemannscher Flächen. Mitt. math. Sem. Gießen, Nr. 41, 36 S. (1952).

Von der durch $w = \cos \sqrt{z}$ erzeugten Fläche \mathfrak{F}_1 wird durch Verschiebung der algebraischen Windungspunkte über Koordinaten $w = p_j, n_j, 1 \leq p_j \rightarrow \infty, -1 \geq n_j \rightarrow -\infty$, eine einfach zusammenhängende Fläche \mathfrak{F} erzeugt mit einer unmittelbaren Randstelle über $w = \infty$. Die passend zerschnittene Fläche \mathfrak{F} wird in ein nullwinkliges unendlich vielseitiges, von Orthokreisen zur reellen Achse berandetes Polygon \mathfrak{P} der ζ_1 -Ebene abgebildet, das längs unendlich vieler Strecken („Gräten“) parallel zur imaginären Achse aufgeschnitten ist. Bei geeigneten Annahmen über die Länge der Gräten folgt aus dem Modulsatz, daß eine Ausschöpfung von \mathfrak{P} durch Bögen von $|\zeta_1| = \varrho$ eine zulässige Ausschöpfung der z -Ebene liefert. Die grenzpunktartige Fläche \mathfrak{F} definiert eine ganze transzendente Funktion, deren Wertverteilungsverhalten zufolge der benützten Hilfsabbildungen angegeben werden kann. Da die Wahl der Grätenendpunkte innerhalb gewisser Grenzen willkürlich ist, lassen sich Funktionen mit interessanten Eigenschaften auf diesem Wege erzeugen, z. B. solche mit vorgeschriebener unterer und oberer Ordnung ($\leq 1/2$). Als weitere Anwendung wird eine Funktion $w(z)$ konstruiert mit den Eigenschaften $\delta(\infty) = 1, \vartheta(a_j) = 1/2^j, j = 1, 2, \dots$, also erstmals eine Funktion mit unendlich vielen positiven Verzweigungsindizes angegeben. Nicht minder interessant ist schließlich das Beispiel einer Funktion mit folgendem Verzweigungsverhalten: Die Summe der Nevanlinnaschen Verzweigungsindizes ist null, während die der Valironischen ∞ ist. Die Ordnungserniedrigung ist abhängig von der Stärke der Konvergenz der $|n_j|, p_j$ gegen ∞ , was man auch bei gewissen Klassen unendlicher Produkte direkt an dem analytischen Ausdruck bestätigen kann. Auf mögliche Verallgemeinerungen wird hingewiesen.

H. Wittich.

Ohtsuka, Makoto: On a covering surface over an abstract Riemann surface. Nagoya math. J. 4, 109—118 (1952).

Aus gewissen Überlagerungseigenschaften einer Riemannschen Fläche R über der Fläche R kann geschlossen werden, daß R nicht zur Klasse (B_0) derjenigen Riemannschen Flächen gehört, auf denen außer den Konstanten keine eindeutigen beschränkten harmonischen Funktionen existieren. Für den erreichbaren Rand von R bez. R (erzeugt von denjenigen Kurven auf R , die den idealen Rand von R definieren, deren Spurkurven auf R aber in inneren Punkten von R endigen) wird ein harmonisches Maß $\omega(P)$ definiert. Das Hauptergebnis lautet: Wenn $\omega(P)$ positiv ist, gehört R nicht zu (B_0) . Dafür, daß die Bedingung dieses Satzes erfüllt ist, gibt Verf. eine Reihe von Kriterien an.

H. Tietz.

Ohtsuka, Makoto: On the behaviour of an analytic function about an isolated boundary point. Nagoya math. J. 4, 103—108 (1952).

Let D be a plane region with an isolated boundary point z_0 . Consider an analytic function $f(z)$ which maps D onto a covering surface \bar{R} of an abstract Riemann surface R . The author shows that either 1. the image of $0 < |z - z_0| < r$ for $r \rightarrow 0$ converges to an interior point of R , or 2. this image is a parabolic ideal boundary component of \bar{R} , or 3. the range of values of $f(z)$ at z_0 is a sphere punctured at two points, or 4. this range is a torus. Use is made of the methods in the theory of cluster sets.

L. Sario.

Sario, Leo: A linear operator method on arbitrary Riemann surfaces. Trans. Amer. math. Soc. 72, 281—295 (1952).

In zusammenfassenden Ergebnissen, die Verf. früher [dies. Zbl. 32, 204; 35, 50 (2 Referate); 37, 56 (3 Referate)] publiziert hat, werden Approximationsmethoden gewisser Funktionen auf Riemannschen Flächen entwickelt. Der normale lineare Operator L erzeugt eine harmonische Funktion Lv auf einem kompakten oder nichtkompakten Gebiet S einer Riemannschen Fläche R von beliebigem Geschlecht, vorausgesetzt, daß v harmonisch in der Umgebung des Randes l von S ist. Verf. beweist für eine singuläre Funktion s , die harmonisch in der Umgebung von l ist und sich über l harmonisch fortsetzen läßt, die Existenz einer reellen Funktion p auf R , ebenfalls harmonisch in der Umgebung von l , mit $p - s = L(p - s)$ auf S .

Diese Operatorenmethode wird auf ein- und mehrwertige reelle Funktionen angewendet und führt schließlich zur Lösung von Randwertproblemen für abstrakte Riemannsche Flächen. Die erläuterte Methode erlaubt in vielen Fällen eine einfachere Approximation im Vergleich zu den bekannten Verfahren von Dirichlet und Hilbert.

H. P. Künzi.

Röhl, Helmut: Die Elementartheoreme der Funktionenklassen auf geschlossenen Riemannschen Flächen. Math. Nachr. 7, 65—84 (1952).

Die Ausdehnung der Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer arithmetischen Grundlagen auf allgemeinere Funktionenklassen war der Gegenstand mehrerer vorangehender Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 43, 299; 46, 83). Diese Untersuchungen schlossen sich insbesondere an die Klassentheorie von R. König an, und die dieser Theorie entsprechenden Elementartheoreme werden in der vorliegenden Arbeit abgeleitet. Nach Aufstellung der Elementarfunktionen und -differentiale einer Variablen und dem Beweis ihrer Eindeutigkeit wird die Partialbruchzerlegung und der Aufbau von Funktionen und Differentialen aus gegebenen Polen und Hauptteilen behandelt. Hierbei tritt als wesentliches Hilfsmittel der Begriff des effektiven Hauptteiles auf, der durch gewisse Existenzforderungen hinsichtlich der Elementarfunktionen gekennzeichnet wird. Die Untersuchung der Elementarfunktionen und -differentiale von zwei Variablen führt über den Entwicklungssatz zu den Vertauschungstheoremen und weiter zu dem Reduktionssatz. Dabei ergeben sich die Definitionen von Differentialen bzw. Funktionen 1.—3. Gattung. Im Anschluß an den Reduktionssatz wird die Zugehörigkeit von Reduktionskoeffizienten zu gewissen Körpern behandelt. Den Abschluß bilden Bemerkungen über die Änderungen in den Ergebnissen, wenn man von der speziellen Ortsuniformisierenden zu dem allgemeinen Fall übergeht.

H.-J. Kowalsky.

Tietz, Horst: Fabersche Entwicklungen auf geschlossenen Riemannschen Flächen. J. reine angew. Math. 190, 22—33 (1952).

Gegenstand der Arbeit bilden Entwicklungssätze für Funktionen und Differentiale auf geschlossenen Riemannschen Flächen vom Geschlecht p . Verf. überträgt dabei die Fabersche Darstellungsmethode für Funktionen in schlichten Entwicklungsbereichen auf die oben angegebenen Riemannschen Flächen. — Ein Differential dritter Gattung $dF(y, z)$ erzeugt ein vollständiges System der zur Fläche A gehörigen Elementarfunktionen $\mathfrak{E}_n(z)$ und Elementardifferentiale $d\mathfrak{F}_n(y)$ durch

$$\mathfrak{E}_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dF(y, z)}{\eta^n} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

und

$$d\mathfrak{F}_n(y) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dF(y, z)}{\zeta^n} d\zeta \quad (n = -(p-1), \dots, 0, 1, \dots).$$

Weiter wird bewiesen, daß alle in einem Gebiet G der Fläche A regulären und eindeutigen Funktionen $f(z)$ und Differentiale $dg(y)$ dargestellt werden können durch in G konvergente Reihen $f(z) = \sum_{\substack{n=0 \\ n > p}} a_n \mathfrak{E}_n(z)$ und $dg(y) = \sum_{\substack{n > -p \\ n \neq 1}} b_n d\mathfrak{F}_n(y)$.

H. P. Künzi.

Chow, Wei-Liang and Kunihiko Kodaira: On analytic surfaces with two independent meromorphic functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 319—325 (1952).

Let V^r be a compact complex analytic variety of complex dimension r . According to Chow's recent result, the field $\mathfrak{F}(V)$ of all meromorphic functions on V is an algebraic function field of s dimensions ($0 \leq s \leq r$). There exists therefore a projective model V^* of $\mathfrak{F}(V)$ and a meromorphic transformation Φ of V onto V^* , uniquely determined up to a birational transformation. The variety V is called „algebraic“ when V^* can be so chosen that Φ is everywhere biregular. Although every V^r is algebraic for $r = 1$, it is not so for $r \geq 2$ without restriction. Here the characterization of algebraic varieties arises naturally as a basic problem. The authors solve this problem in the special case $r = 2$ under the following form: The variety V is algebraic if and only if V has the same dimension as V^* and in addition if V admits a Kählerian metric. Roughly speaking the proof consists of two parts. In one part they show that Φ is „birational“ and in the other part they

modify V^* such that Φ is everywhere biregular. The former seems to the reviewer to be more essential and depends on the Riemann-Roch theorem for Kählerian surfaces, proved by Kodaira previously. The latter makes extensive use of the technique of quadratic transformations (generalized naturally to analytic surfaces) and the properties of exceptional curves.

Igusa.

Bochner, S.: On the addition theorem for multiply periodic functions. Proc. Amer. math. Soc. 3, 99—106 (1952).

Verf. gewinnt die Additionstheoreme der $2n$ -fach periodischen meromorphen Funktionen von n komplexen Veränderlichen ($n \geq 1$) aus Sätzen über algebraische bzw. rationale Abhängigkeit solcher Funktionen ohne Verwendung von Eliminationsmethoden unmittelbar mit Hilfe des folgenden Satzes: Sei A ein Gebiet im Raume der k komplexen Veränderlichen $z = (z_1, \dots, z_k)$ und B ein Gebiet im Raume der l Veränderlichen $w = (w_1, \dots, w_l)$. In A seien reguläre Funktionen $\Phi_1(z), \dots, \Phi_r(z)$, in B reguläre Funktionen $\Psi_1(w), \dots, \Psi_s(w)$ vorgegeben; ferner sei $f(z, w)$ eine in $A \times B$ reguläre Funktion. Dann gilt: a) Gehört $f(z, w)$ für jedes feste w aus B zum Funktionenkörper $K_z = K(\Phi_1(z), \dots, \Phi_r(z))$ und für jedes feste z aus A zum Körper $K_w = K(\Psi_1(w), \dots, \Psi_s(w))$, so gehört $f(z, w)$ in $A \times B$ zum Körper $K_{z,w} = K(\Phi_1(z), \dots, \Phi_r(z), \Psi_1(w), \dots, \Psi_s(w))$. b) Ist $f(z, w)$ für jedes feste w aus B algebraisch über K_z und für jedes feste z aus A algebraisch über K_w , so ist $f(z, w)$ in $A \times B$ algebraisch über $K_{z,w}$. c) Ist $f(z, w)$ für jedes feste w aus B algebraisch über K_z von einem Grade $\leq g$, und für jedes feste z aus A in K_w enthalten, so ist $f(z, w)$ in $A \times B$ algebraisch über $K_{z,w}$ von einem Grade $\leq g$. — Diese Aussage verallgemeinert weitgehend den Weierstraß-Hurwitzschen Satz über den rationalen Charakter einer meromorphen Funktion mehrerer komplexer Veränderlicher, die in bezug auf jede Veränderliche bei festgehaltenen anderen Veränderlichen als rational vorausgesetzt ist. Der Beweis benutzt u. a. Gedanken von H. Kneser zum Beweise des Weierstraß-Hurwitzschen Satzes (dies. Zbl. 7, 156); von wesentlicher Bedeutung ist ein Lemma, das in spezialisierter Fassung von S. Bochner und W. T. Martin in ihrem Lehrbuch „Several complex variables“ (Princeton 1948, dies. Zbl. 41, 52; pp. 199—203 des Buches) schon in ähnlichem Zusammenhang verwendet wurde.

K. Stein.

Hitotumatu, Sin: Cousin problems for ideals and the domain of regularity. II. Proc. Japan Acad. 28, 25—28 (1952).

Ein Ideal I analytischer Funktionen in einem Gebiete G des Raumes C^n von n komplexen Veränderlichen heiße lokal einfach, wenn jedes von I erzeugte Punktideal I_P für jeden Punkt P aus G Hauptideal ist. Verf. gewinnt als einfache Folgerung aus der Ideal- und Modultheorie analytischer Funktionen von H. Cartan (dies. Zbl. 24, 223; 35, 171; 38, 237): In einem Regularitätsgebiet G des C^n gilt die zweite Cousinsche Aussage über die Existenz regulärer Funktionen zu beliebig vorgegebenen Nullstellenflächen dann und nur dann, wenn jedes abgeschlossene, lokal einfache Ideal analytischer Funktionen in G Hauptideal ist. (Teil I vgl. dies. Zbl. 44, 308—309.)

K. Stein.

Masani, P. and T. Vijayaraghavan: An analogue of Laurent's theorem for a simply connected region. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 25—30 (1952).

„Im nichtleeren Durchschnitt D von zwei offenen Kreisscheiben D_1 und D_2 der komplexen Zahlenebene sei eine Funktion $f(z)$ der komplexen Variablen z gegeben. Ihr Wertevorrat liege in einer (nichtkommutativen) Banachschen Algebra und $f(z)$ sei holomorph in D und besitze in jedem Punkt von D ein Inverses $\{f(z)\}^{-1}$. Dann ist $f(z)$ Produkt von zwei Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$, die dieselben Eigenschaften in D_1 resp. D_2 haben.“ — Der Beweis stützt sich auf einen analogen Satz von H. Cartan über abgeschlossene Kreisscheiben (dies. Zbl. 24, 223). Die offenen Kreisscheiben werden von innen durch abgeschlossene approximiert.

A. Kriszten.

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Maak, Wilhelm: Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. J. reine angew. Math. 190, 34—48 (1952).

Verf. def. auf einer beliebigen Halbgruppe H eine Klasse komplexer Funktionen, welche einen translationsinvarianten Mittelwert haben und allgemeiner als die fastperiodischen (fp.) Funktionen sind. Die Zahl M heißt Mittelwert von f , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in H$ existieren, so daß $|M - 1/n \sum_i f(a_i d)| < \varepsilon$ und $|M - 1/m \sum_j f(c b_j)| < \varepsilon$ für alle $c, d \in H$ gilt. Funktionen, welche einen Mittelwert besitzen, heißen nach Verf. ergodisch. Ist dazu noch die Approximation $|M - 1/n \sum_i f(c a_i d)| < \varepsilon$ für alle c, d durch geeignete

Wahl von a_i immer erreichbar, so heißt f stark ergodisch. Solche sind auf einer Gruppe G u. a. die sog. ω -Funktionen, zu deren Definition Verf. sich eines speziell geschaffenen Begriffes von Nullmenge bedient: f ist eine ω -Funktion, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Teilmengen A_1, \dots, A_n, N von G existieren, so daß $A_1 + \dots + A_n + N = G$ und $|f(c x d) - f(c y d)| < \varepsilon$, falls nur x, y zu einem A_i und $c x d, c y d$ zu $G - N$ gehören, wobei N eine Nullmenge ist. Noch speziellerer Art sind die ω -fp. Funktionen, bei deren Definition $A_1 + \dots + A_n = G$ gefordert wird. Wird die übliche Definition der fp. Funktionen auf Abelsche Halbgruppen anstatt auf Gruppen angewandt, so erweisen sich die so definierten Funktionen als ergodisch. Um die Ergodizität auch im nicht-Abelschen Fall zu gewährleisten, muß man diese Definition abändern. Das führt zu einer neuen Theorie, welcher die letzten Seiten der in Rede stehenden und die ganze weiter unten referierte Arbeit gewidmet sind. Verf. schwebt das Ziel vor, von der Theorie der fp. Funktionen ausgehend, zu ergodischen Sätzen zu gelangen, was eine Umkehrung der bisher verfolgten Forschungsrichtung bedeuten würde.

St. Hartman.

Maak, Wilhelm: Fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen. Acta math. 87, 33—58 (1952).

Eine komplexe Funktion f auf einer Halbgruppe H (ohne „Kürzungsregel“) heißt fastperiodisch (fp.), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele Teilmengen A_1, \dots, A_n von H existieren, so daß 1° $H = A_1 + \dots + A_n$ und 2° aus $c' x d', c' y d' \in A_i$ die Ungleichung $|f(c x d) - f(c y d)| \leq \varepsilon$ für alle $c, d \in H$ folgt. Das Hauptergebnis lautet: genau, wie im Falle der fp. Funktionen auf Gruppen, ist f ein gleichmäßiger

Limes von Ausdrücken $\sum_{i=1}^n \sum_{\sigma=1}^{s_i} \gamma_{i,\sigma} D_{i,\sigma}(x)$, wo die $D_{i,\sigma}(x)$ die Koeffizienten unitärer Darstellungen D_i von H und die $\gamma_{i,\sigma}$ komplexe Zahlen sind. Um das Problem auf die Theorie der fp. Funktionen auf Gruppen zurückzuführen, ordnet Verf. der Halbgruppe H eine Gruppe \hat{G} zu. Zu diesem Zwecke wird bewiesen, daß die Transformationen $T f(x) = f(x a)$ den linearen Raum R aller auf H fp. Funktionen umkehrbar eindeutig auf sich abbilden und mithin eine Gruppe innerhalb aller eindeutigen Transformationen von R auf sich erzeugen. Dies ist die Gruppe \hat{G} . Nun lassen sich die fp. Funktionen auf H auf die fp. Funktionen auf \hat{G} umkehrbar eindeutig linear abbilden, indem man $\hat{f}(T) = \varphi(1)$ setzt, wenn $T f = \varphi$ ($T \in \hat{G}; f, \varphi \in R$) ist. Als interessantes Nebenresultat erhält Verf. den Satz: ist H maximal fastperiodisch, so läßt es sich in eine Gruppe einbetten.

St. Hartman.

Peck, J. E. L.: Almost periodic functions. Proc. Amer. math. Soc. 3, 107—110 (1952).

Bochner und v. Neumann haben in ihren bekannten Abhandlungen (dies. Zbl. 9, 349; 11, 160) die Fejérsche Methode der Summierung von Fourierreihen übertragen auf den Fall fastperiodischer Funktionen. Eine bestimmte Folge Fejérscher Kerne kann jeweils benutzt werden, um die Fourierreihen eines entsprechenden Moduls fastperiodischer Funktionen zu summieren. Ein solcher Modul hat stets abzählbare Dimension. Verf. zeigt, daß unter Benutzung von i. a. überabzählbaren Folgen Fejérscher Kerne und des Konvergenzbegriffes von Moore-Smith ein „einheitliches Summierungsverfahren“ angegeben werden kann, welches auf sämtliche fastperiodischen Funktionen einer Gruppe angewandt werden kann. Im Gegensatz zum Verf. sieht Ref. hierin keinen Widerspruch zu den eingangs gemachten Feststellungen. Es ist nicht verwunderlich, daß man bei Benutzung der

Moore-Smithschen Konvergenz zu anderen Resultaten kommt, als wenn man sich auf den üblichen Konvergenzbegriff stützt. W. Maak.

Burkill, H.: Cesàro-Perron almost periodic functions. Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 150—174 (1952).

Die vom Verf. in zahlreichen früheren Arbeiten angelegte Kollektion neuer Begriffe und Abkürzungen dafür wird hier wieder beträchtlich erweitert, so daß sich Ref. in der Lage eines Zeitungslesers sieht, der sich in den vielen Abkürzungen für Parteien und Organisationen mangels eines Lexikons nicht mehr recht auskennt. Es wird der Abstand $D_{CP}[f(x), g(x)]$ zweier Funktionen $f(x), g(x)$ definiert als die obere Grenze von

$$\left| \int_y^{y+k} dx \int_x^{x+h} [f(t) - g(t)] dt \right|$$

für $-\infty < y < \infty$, $0 \leq h, k \leq 1$. Dabei ist das innere ein CP-Integral, das äußere ein spezielles Denjoy-Integral. Eine CP-integrierbare Funktion heißt dann CP-fastperiodisch (CP a. p.), wenn zu jedem positiven ε eine relativ dichte Menge von Zahlen τ existiert, für welche $D_{CP}[f(x + \tau), f(x)] < \varepsilon$ ist. Unter diesen Begriff fallen dann alle reinperiodischen Funktionen, aber auch alle D a. p., alle S a. p.- und alle u. a. p.-Funktionen. Mindestens die letzten beiden Abkürzungen gehören zu denen, die dem Ref. unklar sind. Es werden dann einige Analoga zu bekannten Sätzen aus der Theorie der gewöhnlichen fastperiodischen Funktionen bewiesen: 1. Die Menge der CP a. p. Funktionen ist die CP-abgeschlossene Hülle der trigonometrischen Polynome. 2. Es existiert das Cesàro-Mittel zweiter Ordnung

$$M_2\{f(x)\} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_{-X}^X \left(1 - \frac{|x|}{X}\right) f(x) dx$$

und es ist $M_2\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$ nur für eine höchstens abzählbare Menge $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ von 0 verschieden, woraus die formale Fourierreihe entsteht:

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\lambda_n x} \quad \text{mit} \quad A_n = M_2\{f(x)e^{-i\lambda_n x}\}.$$

3. Wenn $f(x)$ und $g(x)$ dieselbe Fourierreihe haben, so ist $D_{CP}[f(x), g(x)] = 0$, d. h. es ist fast überall (was zur Abwechslung französisch p. p. abgekürzt wird) $f(x) = g(x)$. Ferner wird gezeigt, wenn die λ_n keine Häufungsstelle im Endlichen haben und der Größe nach geordnet sind, wenn $f(x+t) + f(x-t) - 2s \rightarrow 0$ (C, j), wo $j \geq 2$ ist, dann ist für $k > j$ unter gewissen zusätzlichen Bedingungen die Fourierreihe (R, λ_n, k) -summierbar zur Summe s . Zum Schluß wird der Begriff der CP a. p. Funktionen noch zu SCP a. p. Funktionen modifiziert und wird insbesondere der Fall konvergenter Fourierreihen behandelt. O. Perron.

Grosswald, Emil: On the parabolic generators of the principal congruence subgroups of the modular group. Amer. J. Math. 74, 435—443 (1952).

In the paper the author suggests implicitly the following conjecture: There exists a set of generators of the principal congruence modular group, mod p , such that among the generators only one of them is parabolic. He proved the conjecture under the hypothesis of some properties of primitive root, mod p . The property seems to be true but the best that is known at present [Hua, Bull. Amer. math. Soc. 48, 726—730 (1942)] is not enough for the present purpose. Loo-Keng Hua.

Hervé, Michel: Sur les fonctions fuchsienues de deux variables complexes dans un bicercle. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 41—43 (1952).

Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 42, 90, im folgenden zitiert mit II). — \mathfrak{D} sei jetzt der Dizylinder $|x| < 1, |y| < 1$. Neben automorphen Formen betrachtet Verf. automorphe α -Formen; diese sind auf \mathfrak{D} regulär und genügen den in II genannten Funktionalgleichungen auf der Mannigfaltigkeit $\alpha(z) = 0$ [hinsichtlich $\alpha(z)$ und k vgl. II]. Es gilt der wichtige Hilfssatz: Zu jeder α -Form $\varphi(z)$ vom Gewichte $m > k - 2$ existiert eine zu $\varphi(z) \bmod \alpha(z)$ kongruente α -Form $\varphi'(z)$, die auf \mathfrak{D} durch $|\varphi'(z)| = |\varphi'(x, y)| \leq K(1 - |x|)^{-m-5}(1 - |y|)^{-m-5}$ mit konstantem K abgeschätzt werden kann. Durch Verknüpfung dieses Hilfssatzes mit gewissen Basissätzen ergeben sich Aussagen folgender Art: Jede α -Form hinreichend hohen Gewichts ist einer Form (schlechthin) des gleichen Gewichts $\bmod \alpha(z)$ kongruent. Jede Form (schlechthin) hinreichend hohen Gewichts m läßt sich aus drei festen Formen, unter ihnen $\alpha(z)$, linear mit passenden Formen als Komponenten

zusammensetzen und durch eine Poincarésche Reihe darstellen. Für hinreichend großes m gilt die fundamentale Relation $d(m) = \lambda m^2 + b(r)m + c(r)$, wo λ nur von Γ , $b(r)$ und $c(r)$ außerdem nur von der Restklasse r von $m \bmod q$ abhängen.

H. Petersson.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen :

Ważewski, T.: Certaines propositions de caractère „épidermique“ relatives aux inégalités différentielles. Ann. Soc. Polon. Math. 24, 1—12 (1952).

Aus einem bekannten Satz wird gefolgert: Es sei $\Omega(x, y)$ eine offene Menge in der (x, y) -Ebene, $f(x, y)$ stetig in Ω , $\psi(x)$ für $a \leq x < b$ das Maximalintegral der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit dem Anfangswert $\psi(a) = \eta$, $\varphi(x)$ stetig für $a \leq x < b$, $\varphi(a) \leq \eta$ und $\varphi(\beta) > \psi(\beta)$ für ein $a < \beta < b$, schließlich $\varepsilon(x) > 0$ und stetig für $a \leq x < b$. Dann gibt es ein ξ mit den Eigenschaften

$$a \leq \xi \leq \beta, (\xi, \varphi(\xi)) \in \Omega, \psi(\xi) < \varphi(\xi) < \psi(\xi) + \varepsilon(\xi), \underline{D}^+ \varphi(\xi) > f(\xi, \varphi(\xi)).$$

(Die Formulierung des Verf. ist eine weniger direkte.) Es werden noch ähnliche Sätze angeführt und der Vorteil dieser Sätze für mancherlei Beweisführungen dargestellt.

E. Kamke.

Azbelev, N. V.: Über die angenäherte Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen n -ter Ordnung auf Grund der Methode von S. A. Čaplygin. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 517—519 (1952) [Russisch].

Das vom Verf. angegebene Verfahren der sukzessiven Approximationen liefert auf Grund einer von S. A. Čaplygin (1950) angegebenen Methode die oberen und unteren Schranken für die Näherungslösungen der Differentialgleichung (1) $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, die zur exakten Lösung konvergieren. f muß in einem Gebiet stetig sein und in diesem Gebiet muß (2) $\partial f / \partial y^{(k)} \leq 0$ ($k = 0, \dots, n-1$) sein. Gegeben sei (1) mit den Anfangsbedingungen (3) $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$ ($k = 0, \dots, n-1$) und eine gewisse Funktion $z = z(x)$ für das Gebiet (x_0, X) , die mit ihren n Ableitungen stetig ist und denselben Anfangsbedingungen (3) und der Ungleichung (4) $z^{(n)} > f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})$ genügt. Weiterhin sei $t = t(x)$ durch die Gleichung $t = f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})$ und (3) bestimmt. Wenn die Funktion f in $x_0 \leq x \leq X$, $A_k(x) \leq y^{(k)} \leq B_k(x)$ ($k = 0, \dots, n-1$) stetig ist, wobei $A_k(x) = \min(z^{(k)}(x), t^{(k)}(x))$ und $B_k(x) = \max(z^{(k)}(x), t^{(k)}(x))$ und (2) erfüllt ist, so genügt die Funktion $t = t(x)$ in (x_0, X) der Ungleichung $t^{(n)} < f(x, t, \dots, t^{(n-1)})$ und in einem Bereich (x_0, x) der Ungleichung $t < y$ [entsprechend gilt $t > y$, wenn statt (4) gefordert wird $z^{(n)} < f(x, z, \dots, z^{(n-1)})$]. — Bildet man nun die Folge:

$$u_{i+1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-\varrho)^{n-1} f(\varrho, u_i, u_i', \dots, u_i^{(n-1)}) d\varrho + y_0 + y_0'(x-x_0) + \dots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1},$$

so gilt: Wenn das erste Element der Folge der Bedingung (3) genügt und in (x_0, X) mit seinen n Ableitungen stetig ist und dort die Ungleichung $u_i^{(k)} > y^{(k)}$, $[u_i^{(k)} < y^{(k)}]$, ($k = 0, \dots, n$) erfüllt ist, so konvergiert die Folge $\{u_i^{(k)}\}$ in (x_0, X) gegen die Lösung y mit ihren Ableitungen $y^{(k)}$ ($k = 1, \dots, n$), wobei die Ungleichungen gelten: $u_i^{(k)} < y^{(k)}$, $[u_i^{(k)} > y^{(k)}]$ für die geraden Indizes und $u_i^{(k)} > y^{(k)}$, $[u_i^{(k)} < y^{(k)}]$ für die ungeraden Indizes.

Rudolf Ludwig.

Bojanić, Ranko: Ein Existenzsatz über die Lösungen einer Klasse impliziter Differentialgleichungen erster Ordnung. Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova, mat. Inst. 18, Nr. 2, 137—142 und deutsche Zusammenfassg. 142 (1952) [Serbisch].

Unter Benutzung einer modifizierten Methode der schrittweisen Annäherungen (vgl. Verf., Über die Randwertaufgabe zweiter Ordnung, Publ. Inst. math. Acad. serbe 4, im Druck) wird ein Beweis eines Satzes von F. A. Valentine [Univ. California Publ. Math., n. Ser. 2 (Nr. 1, Seminar Rep. in Math., Los Angeles), 77—84 (1944)] gegeben.

Autoreferat.

Viswanatham, B.: On the existence of a solution of an infinite differential system. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 13—24 (1952).

L'A. démontre l'existence d'une solution d'un système différentiel ordinaire à une infinité d'inconnues $dy^i(x)/dx = f^i(x, y^1, y^2, \dots)$ ($i = 1, 2, \dots$) avec les conditions initiales $y^i(\xi) = \eta^i$ ($i = 1, 2, \dots$) en supposant la continuité des f^i . Il suppose d'abord que les f^i sont bornées dans $a \leq x \leq b$, $-\infty < y^i < +\infty$

($i = 1, 2, \dots$), et puis il établit un théorème analogue à celui de Perron étendu à un système différentiel par Max Müller [Math. Z. 28, 637 (1927)]. Enfin il démontre l'existence d'une solution d'un système dont les seconds membres ne sont pas bornés: $dy^i/dx + \lambda^i y^i = f^i(x, y^1, y^2, \dots)$ ($i = 1, 2, \dots$). *Hukuhara.*

Sysoev, A. E.: Einige Fälle der Integrierbarkeit von Differentialgleichungen erster Ordnung. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 2, 175—179 (1952) [Russisch].

Après avoir généralisé le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, l'A. exprime la condition pour que l'équation $y' = f(x, y)$ admette une intégrale générale de la forme $\Phi(\varphi) = C \cdot F(\varphi/\varphi)$, où $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$. Il en déduit des conditions suffisantes pour l'intégrabilité par quadratures d'équations de la forme $y' = A(x)y + \sum_k B_k(x)y^k$ (les k étant des exposants réels quelconques). — Applications à quelques cas particuliers (valeurs particulières des k). *Ch. Blanc.*

Gavurin, M. K.: Über Systeme von Differentialgleichungen von der Form $y' = Ay^2 - 2By + C$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 205—208 (1952).

Dans l'équation indiquée, y et C sont des vecteurs, B une matrice carrée et A une matrice „cubique“ (A, B, C constantes). L'A. introduit des règles de calcul avec A et montre que, moyennant des hypothèses convenables sur A, B et C (hypothèses trop longues à rapporter ici), l'intégration de l'équation peut se faire formellement comme si A, B, C et y étaient des grandeurs scalaires. *Ch. Blanc.*

Montaldo, Oscar: Sull'integrazione dei sistemi di Riccati. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 21, 47—58 (1952).

L'A. détermine pour commencer les invariants d'un système de n (> 2) équations différentielles homogènes d'ordre 2, mis sous la forme réduite

$$(*) \quad d^2 y_i / dx^2 + \sum p_{ik} dy_k / dx + \sum q_{ik} y_k = 0 \quad (i = 1, \dots, n; p_{ii} = 0);$$

la substitution $\xi = \varphi(x)$, $y = \xi'^{-1/2} z$ transforme (*) en un système de même forme, dont les coefficients s'expriment aisément par les p_{ik} et les q_{ik} , ce qui fournit les invariants cherchés:

$$p_{ik}, q_{ik} - \frac{1}{2} dp_{ik} / dx, 4p_{ik}^2 q_{hh} + 3(dp_{ik} / dx)^2 - 2p_{ik}(d^2 p_{ik} / dx^2),$$

de poids resp. 1, 2 et 4; les coefficients de (*) peuvent de plus s'exprimer rationnellement en fonction de ces invariants et de leurs dérivées. On peut du reste former aussi des invariants absolus, par combinaison des invariants relatifs. Dès lors, la condition nécessaire et suffisante pour que (*) soit réductible à un système à coefficients constants est que ces invariants absolus soient constants. — Application aux systèmes de Riccati $y'_i + y_i \sum y_k = a_i + \sum a_{ki} y_k$; l'A. donne la forme générale de tels systèmes transformables en systèmes linéaires réductibles à des systèmes à coefficients constants. Ce résultat généralise celui de Chiellini (ce Zbl. 41, 209).

Ch. Blanc.

Mineur, Henri: Sur les points singuliers des systèmes canoniques admettant un nombre d'intégrales premières uniformes en involution égal à celui des degrés de liberté. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1844—1846 (1952).

L'on se donne un système mécanique à n degrés de liberté (rapporté aux variables canoniques $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$), admettant n intégrales premières uniformes en involution, indépendantes, $f_i(p, q) = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), qui définissent une variété à $2n$ dimensions de l'espace $E(q, p)$. T étant le tableau aux n lignes ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial q_1}, \frac{\partial f_i}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial q_n}, \frac{\partial f_i}{\partial p_1}, \frac{\partial f_i}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial p_n} \right\|,$$

un point M de E est singulier d'ordre p , lorsque T a le rang $(n - p)$. — L'on peut effectuer un changement local de variables canoniques, ainsi que des intégrales premières, tels qu'au voisinage d'un M d'ordre 1, il y ait

$$\delta = D(f_2, f_3, \dots, f_n) / D(q_2, q_3, \dots, q_n) \neq 0, \quad f_i = q_i \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

et l'on y définit la variété (à $2n - 2$ dimensions) des points singuliers, par

$$\partial f_1 / \partial q_1 = 0, \partial f_1 / \partial p_1 = 0, \Delta = D(\partial f_1 / \partial q_1, \partial f_1 / \partial p_1) / D(q_1, p_1) \neq 0.$$

Ce résultat s'étend à tout l'espace E : Les variétés des points singuliers sont à $2n - 2$ dimensions et en nombre fini. Pour qu'une variété intégrale contienne un point singulier, il est nécessaire et suffisant, que les constantes c qui la définissent vérifient une relation $\theta(c_1, c_2, \dots, c_n)$. L'on peut calculer Δ au moyen des variables initiales et étudier complètement les lieux de points singuliers. *A. Froda.*

● **Lefschetz, S., edited by: Contributions to the theory of nonlinear oscillations. Vol. II.** (Annals of Mathematics Studies, number 29.) Princeton: Princeton University Press 1952. VII, 116 p. \$ 1,50.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln besprochen.

San Juan, Ricardo: Le problème de Watson pour les solutions des équations différentielles linéaires homogènes. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1338—1340 (1952).

Soit (*) $P_0 d^m y / dx^m + P_1 d^{m-1} y / dx^{m-1} + \dots + P_m y = 0$, où les P_i sont des polynômes de degré $\leq p$. La transformation de Laplace $y(x) = \int_L v(t) e^{tx} dt$, où L est un chemin d'intégration convenablement choisi, transforme (*) en $(c_0 t^m + \dots + c_m) \cdot d^p v / dt^p + \dots + Q_p v = 0$. Si les racines α_i ($i = 1, \dots, m$) de $c_0 t^m + \dots + c_m = 0$ sont simples, (*) admet m solutions $y(x)$ telles que pour $f(x) = y(x) e^{-\alpha_i x} x^{\lambda_i + 1}$ ($\lambda_i = C^{te}$) on ait

$$\left| f(x) - \sum_{v=0}^{n-1} \frac{a_v}{x^v} \right| \cdot |x|^n \leq m_n,$$

avec $m_n < C^n n!$, dans le demi-plan $\Re x \geq k > 0$. L'A. indique deux autres théorèmes qui servent à démontrer le résultat précédent. *J. Horváth.*

Butlewski, Z.: Un théorème de l'oscillation. Ann. Soc. Polon. Math. 24, 95—110 (1952).

Si $A_1(t), \dots, A_n(t)$ sont des fonctions continues et positives pour $t \geq t_0$, telles que $\int_{t_0}^{\infty} A_i(t) dt = \infty$, les fonctions $x_1(t), \dots, x_n(t)$ satisfaisant au système d'équations $x'_1 = A_1 x_n$, $x'_i = A_i x_{i-1}$ ($i = 2, \dots, n-1$), $x'_n = -A_n x_{n-1}$ et aux conditions initiales $x_i(t_0) \geq 0$ ($i = 1, \dots, n-1$), $x_n(t_0) \leq 0$, sont toutes oscillantes (à moins d'être identiquement nulles) et leurs zéros s'entrelacent. — L'A. démontre un théorème analogue pour le système plus général $x'_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$); les hypothèses sur les seconds membres de ces équations deviennent alors un peu plus compliquées. *J. Mikusiński.*

Persen, Leif N.: Über die Wronskische Determinante bei selbstadjungierten Differentialgleichungen. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 24, Nr. 4, 12—15 (1952).

L'A. fondandosi sulla nota proprietà che il wronskiano W di due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione $[f(x)y]' + \lambda g(x)y = 0$ vale $A/f(x)$, $A = \text{cost.}$, nota l'effettiva espressione di W nel caso delle equazioni relative ai polinomi di Hermite, di Laguerre, di Tchebychef e di Legendre. *G. Sansone.*

Rudin, Walter: Inversion of second order differential operators. Proc. Amer. math. Soc. 3, 92—98 (1952).

Consider the differential equation

$$(*) \quad L(y) \equiv y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

($a \leq t \leq b$), where $p(t)$ and $q(t)$ are continuous and let us suppose that for every solution $y(t)$ of (*) with $y(a) = y(b) = 0$ we have $y(t) = 0$. Let $K(x, t)$ be the Green's function belonging to (*). If $F(t)$ is defined in the neighbourhood of a point x of $[a, b]$, let $y(t) = y(t; F, h)$ be such a solution of (*) that $y(x+h) = F(x+h)$ and $y(x-h) = F(x-h)$. $y(t; F, h)$ is unique for h sufficiently small. Put

$$\Delta_h F(x) = y(x; F, h) - F(x),$$

and

$$\Delta^* F(x) = \limsup_{h \rightarrow 0} 2\Delta_h F(x)/h^2, \quad \Delta_* F(x) = \liminf_{h \rightarrow 0} 2\Delta_h F(x)/h^2.$$

Say that $f \in H$ in (a, b) if f is measurable and $\int_a^b (x-a)(b-x)|f(x)|dx < \infty$. —

Theorem. Let $F(x)$ be continuous and bounded for $a < x < b$. Suppose (i) $A^*F(x) > -\infty$, $A_*F(x) < +\infty$ in (a, b) , except possibly on countable sets E_1 and E_2 ; (ii) $\limsup_{h \rightarrow 0} \Delta_h F(x)/h \geq 0$ on E_1 , $\liminf_{h \rightarrow 0} \Delta_h F(x)/h \leq 0$ on E_2 ; (iii) there exists a function $g \in H$ in (a, b) such that $g(x) \leq A^*F(x)$ in (a, b) . Then (A) $F(a+)$ and $F(b-)$ exist; (B) $F'(x)$ is finite for every x in (a, b) ; (C) $F''(x)$ is finite for almost all x in (a, b) ; (D) $L(F) \in H$ in (a, b) ; (E) for all x in (a, b)

$$F(x) = - \int_a^b K(x, t) L(F(t)) dt + y(x),$$

where y is a solution of (*) with the boundary values $y(a) = F(a+)$, $y(b) = F(b-)$. — A similar theorem for an infinite interval has been proved by the author in a previous paper (this Zbl. 43, 68). Notions similar to the L -convexity introduced in this paper have been considered by various authors (Beckenbach, this Zbl. 16, 352; M. M. Peixoto, this Zbl. 32, 347, 39, 287; Bonsall, this Zbl. 38, 209). J. Horváth.

Richard, Ubaldo: Sulla rappresentazione asintotica degli estremi delle soluzioni di equazioni differenziali lineari del 2° ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 382—387 (1952).

Nell'equazione (1) $\frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{dy}{dx} \right\} + q(x)y(x) = 0$ siano $p(x) > 0$, $q(x) > 0$ per $x \geq a$, e la funzione $\omega(x) = \frac{1}{2} p(x) \frac{d}{dx} \{ [p(x)q(x)]^{-1/2} \}$ sia monotona e infinitesima per $x \rightarrow \infty$. Se $y(x)$ è un integrale oscillante della (1), e $\{x_n\}$ è la successione dei suoi punti estremanti e $\{\xi_n\}$ quella dei suoi zeri, l'A. prova i seguenti risultati:

$$(i) \text{ posto } \varrho_1(x_n) = \frac{\{p(x_n)q(x_n)\}^{1/2} y^2(x_n)}{1 + \omega(x_n)}, \quad \varrho_2(x_n) = \frac{\{p(x_n)q(x_n)\}^{1/2} y^2(x_n)}{1 - \omega(x_n)},$$

$$\varrho_1(\xi_n) = \frac{\{p(\xi_n)q(\xi_n)\}^{-1/2} p^2(\xi_n) y'^2(\xi_n)}{1 + \omega(\xi_n)}, \quad \varrho_2(\xi_n) = \frac{\{p(\xi_n)q(\xi_n)\}^{-1/2} p^2(\xi_n) y'^2(\xi_n)}{1 - \omega(\xi_n)}$$

si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_1(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_2(x_n) = k^2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_1(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_2(\xi_n) = k^2$ ($k > 0$);

(ii) valgono le formule asintotiche $\{p(x_n)q(x_n)\}^{1/4} |y(x_n)| = k + O\{|\omega(x_n)|\}$, $\{p(\xi_n)q(\xi_n)\}^{-1/4} p(\xi_n) |y'(\xi_n)| = k + O\{|\omega(\xi_n)|\}$. G. Sansone.

Pucci, Carlo: Formule di maggiorazione per un integrale di una equazione differenziale lineare del secondo ordine. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 33, 49—90 (1952).

L'A. si occupa, in questo lavoro, del problema di stabilire limitazioni del modulo dell'integrale dell'equazione autoaggiunta (1) $\frac{d}{dx} \left[\theta(x) \frac{dy}{dx} \right] + A(x)y = f(x)$, soddisfacente alle condizioni $\alpha_1 y(a) - \alpha y'(a) = \gamma$, $\beta_1 y(b) + \beta y'(b) = \gamma_1$, $|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta| + |\beta_1| \neq 0$. Circa venticinque anni fa M. Picone [Math. Z. 28, 519—555 (1928)] si occupò dello stesso problema nel caso particolare $\alpha = \beta = 0$ e nel caso $\alpha \alpha_1 > 0$, $\beta \beta_1 > 0$. Con procedimenti che ricordano in qualche punto quelli di Picone (loc. cit.), dopo avere generalizzato alcuni vecchi risultati di questi [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. 11, 1—141 (1910)], l'A. dimostra, nel caso generale da lui trattato, numerose formule di maggiorazione che hanno interesse, oltre che per procedimenti di calcolo, in problemi soprattutto di fisica matematica, anche per questioni puramente esistenziali. — Per dare un'idea del tipo di limitazioni che l'A. stabilisce, ci limitiamo ad enunciare il seguente risultato: „Sia $y(x)$ un integrale in (a, b) dell'equazione differenziale (1) che soddisfa le condizioni ai limiti (I) $\alpha_1 y(a) - \alpha y'(a) = 0$, $\beta_1 y(b) + \beta y'(b) = 0$ con $\alpha \alpha_1 \geq 0$, $\beta \beta_1 \geq 0$, e supponiamo che sia $\lambda_{r-1} < 1 < \lambda_r$, ove λ_{r-1} , λ_r sono autovalori relativi all'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx} \left[\theta \frac{dy}{dx} \right] + \lambda A u = 0$$

e alle condizioni ai limiti (I). Se è $\int_a^b f dx = 0$, $\int_a^b A dx - \frac{\alpha_1}{\alpha} \theta(a) - \frac{\beta_1}{\beta} \theta(b) > 0$, si ha:

$$\max |y| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} + \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1} + \dots + \frac{\lambda_{r-1}}{1 - \lambda_{r-1}} + \frac{\lambda_r}{\lambda_r - 1} \right) \int_a^b \frac{dx}{\theta} \int_a^b |f| dx$$

$$+ \frac{1}{4} \int_a^b |f| dx \left/ \left(\int_a^b A dx - \frac{\alpha_1}{\alpha} \theta(a) - \frac{\beta_1}{\beta} \theta(b) \right) \right. \dots$$

Come complemento dei risultati stabiliti, l'A. perviene ad alcune limitazioni per gli autovalori di una equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine e completa un teorema di Picone relativo all'esistenza degli autovalori stessi. *L. Giuliano.*

Duff, G. F. D. and N. Levinson: On the non-uniqueness of periodic solutions for an asymmetric Liénard equation. *Quart. appl. Math.* **10**, 86—88 (1952).

Nach H. Serbin (dies. Zbl. **38**, 249) besitzt die Differentialgleichung $\ddot{x} + f(x) \cdot \dot{x} + g(x) = 0$ eine eindeutig bestimmte periodische Lösung unter den Voraussetzungen: $f(x), g(x)$ stetig, $f(x) < 0$ für $-x'_1 < x < x_1$, $f(x) > 0$ für $x < -x'_1$ und $x_1 < x$ (mit $-x'_1 < 0 < x_1$), $x g(x) > 0$ für $x \neq 0$, $\int_0^\infty f(x) dx > 0$, $\int_0^\infty f(x) dx$

oder $\int_0^\infty g(x) dx$ divergent. Die Verff. behandeln die Aufgabe, ein Beispiel anzugeben mit $g(x) \equiv x$, und $f(x) = A_3 x^6 - A_2 x^4 + A_1 x^2 - A_0 - C x$, welches die genannten Bedingungen erfüllt und bei welchem in Gegensatz zur Eindeutigkeitsaussage von Serbin mindestens drei periodische Lösungen [bzw. noch mehr Lösungen bei entsprechend höherem Grade des Polynoms $f(x)$] existieren. *L. Collatz.*

Grobman, D. M.: Die charakteristischen Exponenten von Systemen, die sich wenig von linearen unterscheiden. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **30 (72)**, 121—166 (1952) [Russisch].

The author proves that, under suitable assumptions, the characteristic exponents (i. e., $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \cdot \log \Sigma |x_k|$) of the solutions of $\dot{x}_i = \Sigma a_{ik} x_k + f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ are slightly different from those corresponding to $\dot{y}_i = \Sigma a_{ik} y_k$. The statements are too numerous and too lengthy to be stated here in extenso. Applications to stability and to the evaluation of the characteristic exponents are discussed.

J. L. Massera.

Makarov, I. P.: Neue Stabilitätskriterien nach Ljapunov im Falle einer unendlichen Dreiecksmatrix. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **30 (72)**, 53—58 (1952) [Russisch].

In the present paper the author establishes results similar to others previously proved by him in a paper with the same title (this Zbl. **40**, 50). Consider the system

$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} x_k$, ($i = 1, 2, \dots$). Theorem 1: If the p_{ik} are constants satisfying the following assumptions: a) $p_{ii} < a < 0$, $|p_{ii}| > |p_{ss}|$ if $s > i$; b) if $i > k$, $|p_{ik}| \leq K_{ik} |p_{ii} - p_{kk}|$ where $0 \leq K_{ik} \leq \frac{1}{2}$, $\sum K_{k1} < \infty$, $K_{ik} \geq K_{lk}$ if $l > i$ and $K_{ik} \geq K_{im}$ if $m > k$; c) $p_{ik} = 0$ if $i < k$; then the solution $x_i = 0$ is asymptotically stable in the sense of Ljapunov (with the norm $\Sigma |x_i|$). Theorem 2: If the p_{ik} are continuous functions of t for $t \geq t_1$ satisfying: a) $p_{ii}(t) \leq p_{ii}(t_1) < a < 0$, $|p_{ii}| \geq |p_{ss}|$ ($s > i$), $|p_{ii}(t) - p_{ss}(t)| \geq |p_{ii}(t_1) - p_{ss}(t_1)| > 0$; b) if $i > k$, $|p_{ik}(t)| \leq M_{ik}(t)$. $\exp \left[\int_{t_1}^t (p_{ii} - p_{kk}) dt \right]$, where $M_{ik}(t) \geq 0$, $\int_{t_1}^t M_{ik} dt = K_{ik} < \frac{1}{2}$, $\sum K_{k1} < \infty$, $K_{ik} \geq K_{lk}$ if $l > i$, $K_{ik} \geq K_{im}$ if $m > k$; c) $p_{ik} \equiv 0$ if $i < k$; then the solution $x_i = 0$ is asymptotically stable. *J. L. Massera.*

Malkin, I. G.: Über die Konstruktion der Ljapunovschen Funktionen für Systeme linearer Gleichungen. *Priklad. Mat. Mech.* **16**, 239—242 (1952) [Russisch].

If the characteristic numbers of the solutions of a linear system (whose coefficients are bounded continuous functions of t) are all negative, a Ljapunov function V which is a positive definite form of degree m in the space coordinates may be constructed such that $dV/dt = -W$, W being an arbitrary positive definite form of degree m . *J. L. Massera.*

Filippov, A. F.: Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines stabilen Grenzyklus für eine Gleichung zweiter Ordnung. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **30 (72)**, 171—180 (1952) [Russisch].

The equations studied are $\ddot{x} + f(x) \dot{x} + g(x) = 0$ and $\ddot{x} + \varphi(x, \dot{x}) \dot{x} + g(x) = 0$, where f, g, φ satisfy assumptions too complicated to be stated here in extenso.

J. L. Massera.

Guderley, Gottfried: A formula for the normalization constant in eigenvalue problems. *Quart. appl. Math.* **10**, 176—177 (1952).

Germa, R. H.: Extension d'un théorème de Poincaré aux systèmes d'équations récurro-différentielles de forme normale dépendant d'un paramètre variable. *Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér.* **66**, 27—30 (1952).

Estensione al caso dei sistemi di risultati precedenti [Bull. Soc. roy. Sci. Liège **20**, 678 (1951)] sulle equazioni differenziali ricorrenti. *G. Cimmino.*

Minorsky, Nicolas: Sur les systèmes à l'action retardée. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 1945—1947 (1952).

La méthode „stroboscopique“ proposée par l'A. permet de discuter l'existence et la stabilité de solutions périodiques pour une équation différentielle à argument retardé ou avancé de la forme (*) $\ddot{x} + a \dot{x} + x_h + \varepsilon x_h^3 = 0$, où $x_h = x(t - h)$, a, ε et h étant petits. La stabilité de la solution périodique dépend des signes de h , de ε et de $\omega - a/h$, ω étant la fréquence de l'oscillateur harmonique voisin de celui défini par (*).

Ch. Blanc.

Hahn, Wolfgang: Über uneigentliche Lösungen linearer geometrischer Differenzengleichungen. *Math. Ann.* **125**, 67—81 (1952).

Data l'equazione alle differenze geometriche

$$(1) \quad P_n(x) \partial^n f(x) + P_{n-1}(x) \partial^{n-1} f(x) + \dots + P_0(x) f(x) = 0, \\ \partial f(x) = [f(qx) - f(x)]/(q-1)x, \quad q \neq 1,$$

con $(1-x)P_0(x) = \sum_{k=0}^s p_{0k} x^k$, $q^{r(r-1)/2} P_r(x) = \sum_{k=0}^s p_{rk} x^k$ ($r = 1, 2, \dots, n$), $s \geq 1$, p_{rk} costanti non tutte nulle, l'A. ricerca le soluzioni della (1) della forma

$$(2) \quad f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j (1-ax)_{\lambda+j}$$

dove le C_j sono costanti, λ è un parametro e il simbolo $(1-ax)_{\lambda}$ è definito da

$$(1-ax)_{\lambda} = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1-aq^j x}{1-aq^{j+\lambda} x}.$$

Premesse alcune proprietà analitiche delle serie (2), l'A. dimostra che non sempre la (1) ammette soluzioni della forma (2), ed assegna un semplice criterio perchè esistano delle soluzioni di questa forma, dall'A. chiamate soluzioni improprie, che la soddisfano nei punti della successione $x = q^{-1}, q^{-2}, \dots$. — L'A. studia in particolare le equazioni alle differenze geometriche

$$\sum_{r=0}^n (q-1)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} x^r \partial^r f(x) \sum_{j=r}^n \begin{bmatrix} j \\ r \end{bmatrix} (B_j - A_j x) = 0$$

e le equazioni confluenti ipergeometriche alle differenze

$$(b - a q x) f(q^2 x) - (b + q - q x) f(q x) + q f(x) = 0$$

le cui soluzioni si esprimono con serie ipergeometriche di Heine. *G. Sansone.*

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Hillman, Abraham: On the differential algebra of a single differential polynomial. *Ann. of Math., II. Ser.* **56**, 157—168 (1952).

Die Arbeit behandelt Verallgemeinerungen eines Rittschen Satzes aus der Theorie der partiellen Differentialpolynome mit nachfolgenden Anwendungen auf die Komponententheorie partieller Differentialpolynome, auf singuläre Lösungen usw. Charakteristisch für die Beweisführung ist die Anwendung formaler Potenzreihen in einer konstanten Unbestimmten. Die

Hauptresultate werden an zahlreichen Beispielen erläutert. — Teil I gruppiert sich um den folgenden Satz von Ritt: A und B seien zwei von Null verschiedene partielle Differentialpolynome (p. d. p.'s) in differenzierbaren Unbestimmten y_1, \dots, y_n , und „ B enthalte A “ (jede Lösung von A ist Lösung von B). Ist dann \bar{A} die Summe der Terme niedrigsten (höchsten) Grades von A in den y_i und ihren Ableitungen, und hat B die entsprechende Bedeutung, so gilt: \bar{B} enthält \bar{A} . Für die angestrebte Verallgemeinerung dieses Satzes wird folgende Konstruktion benutzt: R sei ein differenzierbarer Ring mit Differentiationen $\delta_1, \dots, \delta_m$. c sei eine konstante Unbestimmte über R . Der Ring $R \langle c \rangle$ der formalen Potenzreihen $A = A_t c^t + A_{t+1} c^{t+1} + \dots$ (t ganz; $A_t \in R$) wird zu einem differenzierbaren Ring durch Einführung von Differentiationen $\delta'_1, \dots, \delta'_m$ mittels der Gleichungen $\delta'_i A = (\delta_i A_t) c^{t+i} + (\delta_i A_{t+1}) c^{t+i+1} + \dots$ (b_i ganz, fest). Für eine von Null verschiedene Reihe $A \in R \langle c \rangle$ heiße der niedrigste Koeffizient A_t der Führungskoeffizient von A . Dann gelten folgende Sätze: $R = F \{y_1, \dots, y_n\}$ sei der Ring der p. d. p.'s über dem differenzierbaren Körper F der Charakteristik Null. 1) Ist A ein von Null verschiedenes Element aus $R \langle c \rangle$, und ist $y_i = \Theta_i$ eine Lösung des Führungskoeffizienten von A in einer geeigneten Erweiterung F' von F , so gibt es eine Erweiterung F'' von F' und eine natürliche Zahl q derart, daß $A = 0$ eine Lösung $y_i = \Theta_i + \Phi_{i1} c^{1/q} + \Phi_{i2} c^{2/q} + \dots$ in $F'' \langle c^{1/q} \rangle$ besitzt. 2) Sind $A \neq 0, B \neq 0, M_0, \dots, M_s$ Elemente von $R \langle c \rangle$ und gilt mit einer natürlichen Zahl p $B^p = M_0 A + M_1 (\delta'_1 A) + \dots + M_s (\delta'_s A)$, so enthält der Führungskoeffizient von B den Führungskoeffizienten von A . (Die δ'_s mit $s > m$ bedeuten dabei höhere Ableitungen in einer fest gewählten Abzählung.) 3) Es sei λ ein Isomorphismus (auch hinsichtlich der Differentiation) von R in $R \langle c \rangle$. Für $A \in R$ bedeute A_λ den Führungskoeffizienten des λ -Bildes von A , sofern dieses von Null verschieden ist; sonst sei $A_\lambda = 0$. Dann gilt: Sind A und B Elemente von R , und ist A in B enthalten, so ist auch A_λ in B_λ enthalten. — $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ seien Elemente von F . Der Isomorphismus λ von $R = F \{y_1, \dots, y_n\}$ heiße positiv bezüglich (Θ_i) , wenn A_λ ein von Null verschiedenes Element von F ist für jedes A , das nicht durch (Θ_i) annulliert wird. — Teil II bringt verschiedene Anwendungen der genannten Ergebnisse. Zu dem Problem der singulären Lösungen ergibt sich: λ sei ein hinsichtlich (Θ_i) positiver Isomorphismus von R in $R \langle c \rangle$. G sei ein algebraisch irreduzibles p. d. p. aus R und S seine Separante. Ist dann G_λ nicht in S_λ enthalten, so gehört (Θ_i) zu der allgemeinen Lösung von G . Als weitere Anwendungen ergeben sich zwei Verallgemeinerungen des folgenden Satzes: $A \neq 0, M_0, \dots, M_s$ seien Elemente von $R = F \{y_1, \dots, y_n\}$ und es gelte $M_0 A + M_1 (\delta'_1 A) + \dots + M_s (\delta'_s A) = 0$. Dann ist A in jedem M_i enthalten. Wegen der umfangreichen Formulierung dieser Verallgemeinerungen muß hier jedoch auf deren Wiedergabe verzichtet werden. Es folgen Sätze über die Beziehungen zwischen den Komponenten eines p. d. p. und denen seiner Ableitungen. Es seien A_1, \dots, A_r algebraisch irreduzible p. d. p.'s der Ordnungen p_1, \dots, p_r , und es sei $p = \max p_i$. Abschließend zeigt Verf., daß es stets ein algebraisch irreduzibles p. d. p. der genauen Ordnung $p + 1$ gibt, dessen allgemeine Lösung die der A_0 eigentlich umfaßt.

H.-J. Kowalsky.

Birindelli, Carlo: Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili in un prescritto campo semplicemente connesso del piano. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 518—523 (1952).

Il punto $t \equiv (t_1, t_2)$ vari in un campo T semplicemente connesso del piano; $g^{(1)}(t), g^{(2)}(t), \varphi^{(1,\kappa)}(t), \varphi^{(2,\kappa)}(t)$ ($\kappa = 1, 2, \dots, p$) siano vettori a p componenti continui in T colle derivate (supposte essistenti) $\frac{\partial g^{(1)}}{\partial t_2}, \frac{\partial g^{(2)}}{\partial t_1}, \frac{\partial \varphi^{(1,\kappa)}}{\partial t_2}, \frac{\partial \varphi^{(2,\kappa)}}{\partial t_1}$; sia $x \equiv [x_1, x_2, \dots, x_p]$ un vettore a p componenti; allora dato il sistema lineare ai differenziali totali

$$(1) \quad dx = \left[g^{(1)}(t) + \sum_{k=1}^p x_k \varphi^{(1,k)}(t) \right] dt_1 + \left[g^{(2)}(t) + \sum_{k=1}^p x_k \varphi^{(2,k)}(t) \right] dt_2,$$

e supposte soddisfatte identicamente in T le note condizioni locali di integrabilità (condizioni necessarie), si dimostra che „se $t^{(0)}$ è un punto di T , esiste un'unica soluzione del sistema (1), per cui $x(t_0) = x^{(0)}$, dove $x^{(0)}$ è un qualunque vettore assegnato a p componenti, e il suo campo di esistenza è tutto il campo T “.

M. Cinquini-Cibrario.

● **Sauer, Robert:** Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. LXII.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1952. XIII, 229 S. DM 26.—.

L'A. expose de façon claire et concise les bases classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles du 1^{er} et 2^e ordre, mais en marquant la différence entre les problèmes aux limites qu'il laisse à peu près de côté (problème de Dirichlet dont il ne mentionne pas les progrès depuis 30 ans) et les problèmes à valeurs initiales posés par les équations de type hyperbolique auxquelles l'ouvrage est consacré; il met en relief le rôle des régions d'influence des données, limitées par les caractéristiques, qui n'ont pas d'analogue dans les problèmes aux limites. Dans le but explicite d'être utile à la théorie et la technique des gaz, il fait des développements utiles pour l'approximation numérique comme la théorie parallèle des équations aux différences et des méthodes de grilles. Mais se limitant déjà dans le domaine classique ancien sans utiliser les transformations de Fourier ou Laplace, il laisse de côté, en les mentionnant, des travaux récents, comme ceux de M. Riesz ou l'utilisation des distributions de Schwartz. Le premier chapitre pose et différencie les problèmes à traiter, le second parle des équations du premier ordre (méthode de Monge, transformation de contact, application aux équations de Hamilton-Jacobi); les deux derniers développent le sujet (méthode de Riemann, principe de Huyghens, travaux de Hadamard, application aux écoulements gazeux, équations linéarisées). *M. Brelot.*

Martin, M. H.: A remark on characteristics. Proc. Amer. math. Soc. 3, 280—281 (1952).

On considère l'équation $L(u) = a_{ij} u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i} = 0$ (les indices de répétant désignent la sommation). Si une solution de cette équation est déterminée par l'équation de la forme $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$, et si la famille des surfaces $u = \text{const.}$ admet une enveloppe, cette enveloppe est une caractéristique de l'équation $L(u) = 0$.

M. Krzyżński.

Sibirani, Filippo: Su alcune classi di equazioni alle derivate parziali delle quali può costruirsi l'integrale completo. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser. 8, 91—94 (1952).

Folgende vier Sätze werden bewiesen: I. Ist

$$H_m = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-s} \partial y^s}$$

und bedeutet $y = \varphi(x; c_1, \dots, c_n)$ die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $f(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, so ist die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung $f(z; H_1, H_2, \dots, H_n) = 0$ die folgende: $z = \varphi(c_{n+1} x + (1 - c_{n+1}) y; c_1, \dots, c_n)$ (c_{n+1} ist eine beliebige Konstante). II. Ist

$$K_m = \sqrt{\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left[\frac{\partial^m z}{\partial x^{m-s} \partial y^s} \right]^2}$$

und $y = \varphi(x; c_1, \dots, c_n)$ die allgemeine Lösung von $f(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ so ist $z = \varphi(c_{n+1} x \pm \sqrt{1 - c_{n+1}^2} y; c_1, \dots, c_n)$ die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung $f(z, K_1, K_2, \dots, K_n) = 0$. III. Das allgemeine Integral von $f(y, y'', y^{IV}, \dots, y^{(2n)}) = 0$ sei $y = \chi(x; c_1, \dots, c_{2n})$, so ist

$$z = \chi\left(c_{2n+1} x + \frac{y}{c_{2n+1}}, c_1, \dots, c_{2n}\right)$$

die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$f\left(z, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y^2}, \dots, \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^n \partial y^n}\right) = 0 \quad (c_{2n+1} \neq 0).$$

IV. Die vollständige Lösung von

$$f\left(z, \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0$$

ist $z = \lambda\left(c_{n+1} x + \frac{y}{c_{n+1}}, c_1, \dots, c_n\right)$. Hier bedeutet die Funktion $y = \lambda(x, c_1, \dots, c_n)$ die allgemeine Lösung von $f(y, y'^2, \dots, y^{(n)2}) = 0$. *St. Fenyő.*

Markus, Lawrence: Global integrals of $fZ_x + gZ_y = h$. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 311—332 (1952).

Un champ de vecteurs E_1 sans singularités défini dans le plan R^2 vérifie la

condition P , s'il existe un homéomorphisme de R^2 sur R^2 qui transforme E_1 en un champ de vecteurs parallèles à une direction fixe [cette propriété dépend uniquement du comportement à l'infini de E_1]. L'A. montre que E_1 vérifie la condition P s'il existe une courbe transversale complète analytique et réciproquement. (Résultat, évident si on supprime le mot analytique, dont la démonstration utilise des résultats de Whitney sur le prolongement des fonctions analytiques réelles.) L'A. établit des critères permettant de reconnaître que certains champs E_1 vérifient la condition P . Par exemple, si le nombre de contacts de E_1 avec le cercle de centre O et de rayon r est < 4 lorsque r est assez grand, alors E_1 vérifie la condition P . L'importance de la condition P pour l'étude des équations différentielles mentionnées dans le titre de l'article saute aux yeux. G. Reeb.

Hornich, Hans: Häufigkeit von regulären Lösungen bei gewissen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 11, 125—133 (1952).

Wenn die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum a_{l_1 \dots l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$$

ein am Nullpunkt reguläres Integral hat, so kann es ersichtlich nur das folgende sein:

$$u = \sum \frac{a_{l_1 \dots l_n}}{\alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}.$$

Daraus folgt: Wenn für gewisse ganze Zahlen l_i (≥ 0) der Nenner verschwindet, so muß $a_{l_1 \dots l_n} = 0$ sein; sonst gibt es kein am Nullpunkt reguläres Integral. Aber auch wenn diese notwendige Bedingung erfüllt ist, braucht es keines zu geben. Es kann dann nämlich vorkommen, daß die Nenner für gewisse l_i absolut so klein werden, daß die Reihe nicht mehr konvergiert; das hängt von der arithmetischen Natur der α_i ab und kann z. B. passieren bei gewissen Liouvilleschen Zahlen. Verf. untersucht nun auf der Kugel $\sum \alpha_i^2 = 1$ die Menge der Punkte $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, für die aus den besagten Gründen keine Lösung existiert. Er findet, daß es eine G_δ -Menge vom Maß 0 ist, während die komplementäre Menge, für die also eine reguläre Lösung stets existiert, trivialerweise die Kugelsegmente mit lauter positiven oder lauter negativen α_i enthält und darüber hinaus noch eine auf der Kugel überall dichte Menge von der Dimension 0 bildet. O. Perron.

Bergman, Stefan: On solutions of linear partial differential equations of mixed type. Amer. J. Math. 74, 444—474 (1952).

La partie réelle de $\int_{-1}^{+1} E(z', \bar{z}', t) f(z'(1-t^2)) dt / (1-t^2)^{1/2}$ ($z' = z - z_0$, $\bar{z}' = \bar{z} - \bar{z}_0$) où E est une fonction génératrice convenable transforme les fonctions d'une variable complexe en solution d'une équation aux dérivées partielles, homogène, linéaire, à coefficients fonctions entières. L'A. qui a introduit et largement utilisé ce genre d'opérateur dans bien des travaux [Voir en part. Trans. Amer. math. Soc. 57, 299—331 (1945) et ce Zbl. 32, 229] développe ici une extension à des équations posées par la théorie des fluides compressibles et qui se ramènent aux cas antérieurs mais avec des singularités pour les coefficients. Introduction de divers opérateurs, applications en particulier à la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. M. Brelot.

Kapilevič, M. B.: Über eine Gleichung vom gemischten elliptisch-hyperbolischen Typus. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 11—38 (1952) [Russisch].

On considère l'équation (A) $\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} + y^{-p} u_{y y} - b^2 u = 0$, p étant un nombre entier telle que $(-1)^p = -1$. Dans le demi-espace $y > 0$ l'équation (A) est du type elliptique et l'A. construit une solution bornée du problème de Dirichlet

dans ce demi-espace, relatif à l'équation (A), en posant la condition aux limites $u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \tau(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, τ étant une fonction continue et bornée pour $-\infty < x_i < +\infty$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), et ensuite une solution du problème de Neumann, s'annulant à l'infini et satisfaisant à la condition aux limites $u_y(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Dans le demi-espace $y < 0$ l'équation (A) est du type hyperbolique. L'A. résout le problème de Cauchy (en se bornant cette fois aux cas $n = 2$ et $n = 3$).

M. Krzyżański.

Günther, Paul: Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei partiellen Differentialgleichungen vom normalen hyperbolischen Typus. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 100, Nr. 2, 43 S. (1952).

Verf. betrachtet die Differentialgleichung

$$I(u) \equiv g^{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta u + A^\alpha V_\alpha u + Cu = 0,$$

wobei die Funktion u und die Ableitung $\partial u / \partial n$ auf einer Anfangsfläche F gegeben sind. Die geodätischen Nulllinien durch einen Punkt O bilden einen Kegel, der aus F ein Gebiet S ausschneidet ($g^{\alpha\beta}$ hat die Signatur $(+ - - \dots -)$). Es handelt sich nun um die Frage, wann für die Gleichung das Huygenssche Prinzip (im engeren Sinne) gilt (d. h. wann der Wert von u in O nur von dem Anfangswerte auf dem Rande des Gebietes S abhängt): Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des Huygensschen Prinzips ist $G(v) = 0$, wo G der zu I adjungierte Differentialausdruck und v eine Lösung einer bestimmten Differentialgleichung ist. Durch Reihenentwicklungen findet Verf. vier notwendige Bedingungen (Beziehungen zwischen $g^{\alpha\beta}$, A^α und C).

J. Haantjes.

Ladyženskaja, O.: Über die Konvergenz der Fourierreihen, die die Lösung eines gemischten Problems für Gleichungen von hyperbolischem Typus bestimmen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 481—484 (1952) [Russisch].

Let L be a well-behaved, formally self-adjoint and elliptic linear differential operator defined in an open region Ω of n -space and consider the equation $\partial^2 u / \partial x_0^2 = Lu + f$ in a cylinder Γ with base Ω together with the boundary conditions $u = \varphi$ and $u_{x_0} = \psi$ when $x_0 = 0$ and $u = 0$ on Γ . It has the formal solution

$$(1) \quad u = \sum v_s (a_s \cos \lambda_s x_0 + b_s \sin \lambda_s x_0) + \frac{v_s}{\lambda_s} \int_0^{x_0} f_s(t) \sin \lambda (x_0 - t) dt$$

where v_1, v_2, \dots are a complete orthonormal set of eigenfunctions of $Lv = -\lambda v$, ($v = 0$ on the boundary of Ω) and $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots$ the corresponding eigenvalues and a_s, b_s and $f_s(x_0)$ the Fourier coefficients of φ, ψ and f respectively. It is announced that if suitable generalized solutions are admitted, the problem has a unique solution given by (1) and that if $\|g\|_1^2 = \int_\Omega \sum_{k \geq 0} \left| \frac{\partial g}{\partial x_k} \right|^2 dx, \dots$ and $\|g\|^2 = \int_\Omega |g|^2 dx_1 \dots$

then $\|u\|_1^2 \leq C(\|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|^2 + \|f\|^2)$ where C is uniformly bounded if x_0 is bounded. Similar estimates are announced for the derivatives of u .

L. Gårding.

Ladyženskaja, O.: Lösung eines gemischten Problems mit Hilfe von Differenzen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 705—708 (1952) [Russisch].

The operator $\partial^2 / \partial x_0^2 - L$ of the preced. review is changed to a normal hyperbolic operator with linear terms whose coefficients may depend on x_0 and the same boundary value problem is considered. A generalized solution of the problem is obtained as the weak limit of certain suitable difference equations. For this solution estimates similar to those of the preceding review are valid. No proofs.

L. Gårding.

Gerasimenko (Kuznecova), L. V.: Lösung des Cauchy-Kowalewskischen Problems für gewisse partielle Differentialgleichungen im Bereich der beliebig glatten Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 11—14 (1952) [Russisch].

The results of Holmgren [Ark. Mat. Astr. Fys. 4, Nr. 14 und Nr. 18 (1908)] and M. Gevrey [Ann. Sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 35, 129 (1918)] concerning

the heat equation are generalized to equations $Lu = f$ where L is a product of factors of the type $(\partial/\partial t)^p + \alpha(\partial/\partial x)^q$. L. Gårding.

Dacev, A. B.: Über die Wärmeleitung in einem inhomogenen Stabe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **82**, 861—864 (1952) [Russisch].

On cherche une solution de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \varrho \sigma \frac{\partial u}{\partial t},$$

(k, ϱ et σ étant des fonctions continues données de x), satisfaisant à la condition initiale

$$(1) \quad u(x, 0) = \Phi(x) \quad (x_0 < x < x'),$$

et aux conditions aux limites

$$(2) \quad u(x_0, t) = \varphi(t), \quad u(x', t) = \psi(t) \quad (t > 0).$$

Ce problème fut résolu antérieurement par l'application des méthodes diverses, voir par ex. M. Gevrey, J. Math. pur. appl., VI. Sér. **9**, 305—471 (1913), E. Rothe, Math. Ann. **102**, 650—670 (1929), et pour l'équation à 3 variables ce Zbl. **1**, 62—63. La méthode appliquée par l'A. de la note présente est différente de celles qui interviennent dans les travaux cités. L'A. divise l'intervalle $\langle x_0, x' \rangle$ en n parties $\Delta x_i = \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ($i = 1, 2, \dots, n$) et remplace les fonctions k, ϱ et σ par les constantes $k_{in} = k(x_i)$, $\varrho_{in} = \varrho(x_i)$, $\sigma_{in} = \sigma(x_i)$. Dans les domaines $x_{i-1} < x < x_i$, $t > 0$ on cherche les solutions u_{in} de l'équation $a_i^2 \frac{\partial^2 u_{in}}{\partial x^2} = \frac{\partial u_{in}}{\partial t}$ ($a_i^2 = \frac{k_{in}}{\varrho_{in} \sigma_{in}}$), satisfaisant à la condition initiale (1) et aux conditions aux limites $u_{in}(x_i) = u_{i+1,n}(x_i)$, $k_i \frac{\partial u_{in}}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial u_{i+1,n}}{\partial x}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$); les fonctions u_1 et u_n sont assujetties, en outre, à satisfaire aux conditions (2) au point x_0 ou x' respectivement. On obtient ainsi une suite de fonctions $u_n(x, t) = u_{in}(x, t)$ pour $x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $t > 0$, déterminées pour $x_0 < x < x'$, $t > 0$. L'A. démontre la convergence de cette suite vers la solution cherchée du problème. M. Krzyżański.

Browder, Felix E.: The Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary even order with variable coefficients. Proc. nat. Acad. Sci. USA **38**, 230—235 (1952).

A differential operator $K = L + R$ where R is of order $< 2m$ while L has the form $Lf(x) = (-1)^m \sum D_\alpha (p_{\alpha\beta}(x) D_\beta f(x))$, (x a point in real n -space R_n ; D_α and D_β run over all derivatives of order m ; $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}$) is called elliptic in a bounded region $D \subset R_n$ if the coefficients are sufficiently well-behaved and (1) the polynomial $\sum p_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta$, ($\xi_\alpha = \xi_j \xi_k \dots$ if $D_\alpha = \partial^m / \partial x_j \partial x_k \dots$) of the real variables ξ_1, \dots is positive definite when x is in D and (2) $\int \sum p_{\alpha\beta} D_\alpha f D_\beta f dx \geq c \int \sum (D_\alpha f)^2 dx$ for some $c > 0$ and all infinitely differentiable f vanishing outside compact subsets of D . Using an extension of the method of orthogonal projection (Weyl, this Zbl. **26**, 20), a proof is sketched that Dirichlet's problem for the equation $Ku = f$ can be reduced to one Fredholm equation and that the equations $Ku = f$ and $K^*u = f$, ($*$ denotes the adjoint; vanishing boundary values), constitute a Fredholm pair. Regularity properties of the weak solution of $Ku = 0$ are also given. Similar results have been obtained by Vishik for small regions (this Zbl. **41**, 217) and by the rev. for arbitrary bounded regions [C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 1554—1556 (1951)] with the use of (1) alone. Lars Gårding.

Kornhauser, E. T. and I. Stakgold: A variational theorem for $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ and its application. J. Math. Physics **31**, 45—54 (1952).

Die Eigenwertaufgabe $\Delta u + \lambda u = 0$ in R , $u = 0$ auf B (mit Δ = Laplace-scher Operator, B = Rand des ebenen Bereiches R) besitze die Eigenwerte $0 < \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$ und $\Delta v + \mu v = 0$ in R , $\partial v / \partial n = 0$ auf B (mit n als äußerer Normalen) habe die Eigenwerte $0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \dots$. Die Verff.

wollen $\mu_1 < \lambda_0$ bei beliebigem Gebiet R zeigen; sie verwenden den Gedankengang: a) für alle Gebiete R von gegebener Fläche A fällt μ_1 für den Kreis am größten aus, b) fällt λ_0 für den Kreis am kleinsten aus; c) beim Kreis ist $\mu_1 < \lambda_0$; die Aussage b) ist bereits bekannt, und c) läßt sich aus den exakten Lösungen sofort ablesen. Um a) zu beweisen, wird gezeigt: 1. Bei infinitesimaler die Gesamtfläche erhaltender Deformation des Kreises wächst μ_1 niemals an. 2. Ist R kein Kreis, so gibt es eine infinitesimale, die Gesamtfläche erhaltende Deformation, bei der μ_1 anwächst. Der Beweis ist hiermit natürlich noch nicht streng; die Verff. betonen, daß sie die Annahme benutzen: Unter allen ebenen Bereichen mit gegebener Fläche A existiert ein Bereich, für den μ_1 den größtmöglichen Wert annimmt. — Eine Tabelle stellt übersichtlich die Werte für verschiedene Bereiche (Kreis, Quadrat, Rechteck, Dreieck usw.) zusammen; eine Ausdeutung auf elektrische Wellen wird gegeben.

L. Collatz.

Pólya, G.: Remarks on the foregoing paper. J. Math. Physics **31**, 55—57 (1952).

Für eine von Kornhauser und Stakgold (vorsteh. Referat) aufgestellte, aber nicht streng bewiesene Behauptung wird ein einfacher sehr geistreicher Beweis gegeben. — Bei der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ und einem festen zweidimensionalen Bereich R sei λ_0 der kleinste Eigenwert bei der Randbedingung $u = 0$ und μ_1 der kleinste positive Eigenwert bei der Randbedingung $\partial u / \partial n = 0$ (mit n als äußerer Normalen). Die Behauptung lautete $\mu_1 < \lambda_0$. Nun werde R als Scheibe mit gleichförmiger Massendichte 1 betrachtet und J' sei das größere (oder eventuell eines der beiden gleichgroßen) Hauptträgheitsmomente von R bezüglich des Schwerpunktes. Dann wird zunächst durch einfache Benutzung der Minimaleigenschaften des Eigenwertes μ_1 die an sich schon interessante Abschätzung bewiesen $\mu_1 \leq A/J'$, wobei A den Flächeninhalt von R bedeutet. Der Beweis für $\mu_1 < \lambda_0$ benutzt dann die drei Schritte: (a) Für alle Bereiche R mit gegebener Fläche A hat der Kreis das kleinste J' ; (b) für alle Bereiche R mit gegebener Fläche A hat der Kreis das kleinste λ_0 ; (c) für den Kreis ist $A/J' < \lambda_0$.

L. Collatz.

Egloff, Werner: Eine mit der Theorie der Kugelverbiegungen zusammenhängende Eigenwertaufgabe der Potentialtheorie. Math. Nachr. **8**, 99—122 (1952).

Das Problem der infinitesimalen Verbiegungen einer Kugelkalotte mit einer nichtebenen Randkurve, deren Punkte sich parallel zu einer Ebene, etwa der Äquatorebene, verschieben, wurde von E. Rembs mittels stereographischer Abbildung auf ein homogenes Randwertproblem der Potentialtheorie vom Poincaréschen Typus in der Äquatorebene zurückgeführt. Die Dissertation bringt eine numerische Lösung dieses Problems unter der Voraussetzung, daß das stereographische Bild der Randkurve eine Ellipse ist. Die dem Randwertproblem äquivalente homogene Integralgleichung besitzt einen Kern, der aus zwei Summanden besteht, wovon der eine einen Pol 1. Ordnung und der andere eine logarithmische Unstetigkeit besitzt. Während Poincaré dieses Problem auf eine Fredholmsche Integralgleichung zurückgeführt hat, schlägt Verf. einen völlig anderen Weg ein. Er entwickelt die gesuchte Funktion in eine Fourierreihe und erhält durch Einführung in die Integralgleichung vier homogene Poincarésche Differenzengleichungen 4. Ordnung, deren Koeffizienten keine Polynome sondern transzendente Funktionen sind. Diese Gleichungen können daher nicht durch Integration einer Differentialgleichung vom Fuchsschen Typus gelöst werden. Dem Verf. gelingt die Umgehung dieser Schwierigkeit, indem er die homogenen Differenzengleichungen 4. Ordnung durch eine einfache Transformation auf solche 2. Ordnung zurückzuführen vermag, die bekanntlich der rasch konvergenten Kettenbruchmethode zugänglich sind auch dann, wenn sie keine rationalen Koeffizienten haben. Die Bestimmung derjenigen Ellipsen, die stereographische Bilder möglicher Randkurven sind, läuft dann auf die Ermittlung der Eigenwerte jener Differenzengleichungen 2. Ordnung hinaus. Diese Eigenwerte lassen sich aus einer Kettenbruchgleichung in Abhängigkeit von einem Formfaktor h berechnen und legen mit diesen zusammen die Hauptachsen der gesuchten Ellipsen vollständig fest. — Verf. berechnet die ersten drei Eigenwerte, die zu $h = 0,1$ gehören und untersucht eingehend die Konvergenzgrenzen der zur Bestimmung der Eigenwerte benutzten Kettenbrüche.

H. Schubert.

Herglotz, Gustav: Die Greensche Funktion der Wellengleichung für eine keilförmige Begrenzung. Math. Ann. **124**, 219—234 (1952).

Die von W. Magnus redigierte Arbeit liefert zunächst die Lösung der Rand-

wertaufgaben der Wellengleichung für keilförmige Gebiete mit beliebigem Öffnungswinkel. Für Öffnungswinkel, die rationale Vielfache von π sind, gab Sommerfeld die Lösung nach der Spiegelungsmethode an. Eine hier gegebene Darstellung der Sommerfeldschen Lösung enthält auch den Fall beliebiger Öffnungswinkel. Durch Spezialisierung können Ergebnisse der Theorie der Besselfunktionen vereinfacht bewiesen, bzw. erweitert werden. — Die im Mittelpunkt der Arbeit stehenden Formeln stellen die Greenschen Funktionen für die genannten Randwertprobleme dar. Als Grenzfall sind darin die Greenschen Funktionen der Potentialtheorie für keilförmige Gebiete enthalten. Da die Potentialgleichung und die erste Randbedingung invariant gegenüber konformen Abbildungen des Raumes sind, ergibt sich damit auch eine Darstellung der Greenschen Funktion der Potentialtheorie für das allgemeine Kugelzweiflach, die durch Benutzung pentasphärischer Koordinaten besonders übersichtlich wird.

Cl. Müller.

Müller, Claus: Über die ganzen Lösungen der Wellengleichung. Math. Ann. 124, 235—264 (1952).

G. Herglotz hat 1945 in einem unveröffentlichten Vortrag eine Reihe von Sätzen über Kugelfunktionen in p Veränderlichen bewiesen, und unter anderem auch eine von E. Hecke [Math. Ann. 78, 398 (1918)] und A. Erdélyi (dies. Zbl. 18, 255) in verschiedener Weise abgeleitete Formel neu begründet. Die Resultate von Herglotz gestatten eine Aussage über das asymptotische Verhalten der überall regulären Lösungen der p -dimensionalen Wellengleichung $\Delta U + U = 0$ im Unendlichen und ergaben im Falle von zwei Dimensionen einen neuen Beweis eines Satzes des Ref. (dies. Zbl. 32, 351) wonach eine überall reguläre Lösung der Wellengleichung identisch verschwindet, wenn $r^{(p-1)/2} |U|$ für $r \rightarrow \infty$ gleichmäßig beschränkt ist und auf den zu einer „verallgemeinerten“ Halbkugel weisenden Strahlen mit $r \rightarrow \infty$ verschwindet. (Hierbei ist r der Abstand von einem festen Punkt.) Dieses Resultat wird vom Verf. (in einer zur Vereinfachung des Beweises abgeschwächten Formulierung) neu abgeleitet; der Beweis basiert auf einer Verschärfung der Herglotzschen Ergebnisse. Neben einer Darstellung der Herglotzschen Behandlung der Kugelfunktionen bilden diese Verschärfungen den Hauptinhalt der Arbeit. Sie besagen im einfachsten Falle: Es sei $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_p)$ der Ortsvektor im $p \geq 3$ dimensionalen Raume und $r = |\mathfrak{x}|$ seine Länge. Es sei $\mathfrak{x}/r = \mathfrak{x}_0$ ein beliebiger Punkt der Einheitskugel ω . Für eine auf ω integrierbare Funktion $G(\mathfrak{x}_0)$ werde die δ -Mittelung $[G(\mathfrak{x}_0)]_\delta$ erklärt durch $\int G(\eta_0) d\omega$, wobei das Integral über denjenigen Teil der (durch den Einheitsvektor η_0 beschriebenen) Einheitskugel zu erstrecken ist, für welchen das innere Produkt $(\mathfrak{x}_0, \eta_0) \geq \delta$ ist. Hierbei ist $1 > \delta > -1$, aber δ kann beliebig nahe an $+1$ liegen. Zweimalige δ -Mittelung wird analog definiert. — Nun sei $U(\mathfrak{x})$ eine überall reguläre Lösung der Wellengleichung, für die $r^{p-1} \int |U(\mathfrak{x})|^2 d\omega \leq M^2$ ist, wobei das Integral über die ganze Einheitskugel erstreckt wird und M eine Konstante ist. Dann besitzt $U(\mathfrak{x})$ die in jedem endlichen Gebiet gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$U(r \mathfrak{x}_0) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} i^n r^{(2-p)/2} J_{n+(p-2)/2}(r) K_n(\mathfrak{x}_0),$$

worin J_ν die Besselsche Funktion erster Art der Ordnung ν und K_n eine Kugelfunktion n -ter Ordnung bedeutet. Ist $U_2(r \mathfrak{x}_0)$ die durch zweimalige δ -Mittelung aus U entstehende Funktion

und $F_2(\mathfrak{x}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} [[K_n(\mathfrak{x}_0)]_\delta]_\delta$, so gilt für $r \rightarrow \infty$

$$r^{(p-1)/2} U_2(r \mathfrak{x}_0) = e^{i\tau} i^{(1-p)/2} F_2(\mathfrak{x}_0) + e^{i\tau} i^{(p-1)/2} F_2(-\mathfrak{x}_0) + o(1).$$

Entsprechende Formeln können für höhere Glieder einer asymptotischen Entwicklung der durch $h(>2)$ -fache δ -Mittelung aus U entstehenden Funktion abgeleitet werden. Ist umgekehrt $F(\eta_0)$ eine k mal stetig differenzierbare Funktion auf ω , und ist $k \geq \frac{1}{2} p + 2l - 1$, so stellt das (über die durch η_0 beschriebene Einheitskugel erstreckte) Integral

$$\int e^{i\tau}(\mathfrak{x}_0, \eta_0) F(\eta_0) d\omega$$

eine Lösung von $\Delta U + U = 0$ dar, deren asymptotisches Verhalten für $r \rightarrow \infty$ bis auf Glieder der Ordnung $r^{1-l-(p-1)/2}$ eindeutig durch $F(\mathfrak{x}_0)$ und seine Ableitung beschrieben wird. Die

erste Näherung lautet $[i^{(1-p)} e^{i\tau} F(\mathfrak{x}_0) + i^{(p-1)/2} e^{i\tau} F(-\mathfrak{x}_0)] \left(\frac{2\pi}{r}\right)^{(p-1)/2}$. W. Magnus.

Pachale, Helmut: Über ein ebenes nichtlineares biharmonisches Randwertproblem. Math. Nachr. 7, 187—212 (1952).

Verf. betrachtet die folgende Aufgabe: Gesucht wird eine in einem einfach zusammen-

hängenden, ebenen, ganz im Endlichen gelegenen Gebiet R biharmonische Funktion $U = U(x, y)$, deren erste Ableitungen in R und auf S (Rand von R) stetig sind und nichtlineare Randbedingungen der Form

$$(1) \quad U_x(p) = F\{p; U_x(p), U_y(p); C\}, \quad U_y(p) = G\{p; U_x(p), U_y(p); C\}$$

mit $p \in S$ genügen. Die Ausdrücke F, G bezeichnen gewisse von einem kleinen Parameter C abhängige Funktionaloperationen, in denen die Randwerte $U_x(p), U_y(p)$ von höherer als erster Ordnung, oder mit dem Parameter C behaftet auftreten. Für harmonische Funktionen wurden solche Fragestellungen von K. Maruhn untersucht (dies. Zbl. 29, 213). Durch die Setzung von $u = U_x, v = U_y$ gelangt Verf. zu dem System

$$(2) \quad a) u_y = v_x \quad b) \Delta \vartheta = 0 \quad (\vartheta = u_x + v_y)$$

mit analogen Randbedingungen. Wegen a) erhält man über den Gaußschen Satz sofort eine notwendige Bedingung für die Randwerte. Es muß

$$(3) \quad \int_S [F\{p; U_x(p), U_y(p); C\} \cos(n_p, y) - G\{p; U_x(p), U_y(p); C\} \cos(n_p, x)] dS = 0$$

sein. Verf. schreibt das Problem (2) auf Integrofunktionalgleichungen um und löst diese nach den Methoden von L. Lichtenstein durch sukzessive Approximation. Es zeigt sich, daß das Erfülltsein der Bedingung (3) auch hinreicht für die Lösbarkeit des Ausgangsproblems, wenn C hinreichend klein gewählt ist. — Ist R_a das zu $R + S$ komplementäre Gebiet, so wird ferner eine biharmonische Funktion gesucht, deren erste Ableitungen in $R_a + S$ stetig sind, sich im Unendlichen beschränkt verhalten und der Randbedingung (1) genügen, während die zweiten Ableitungen wie $(r_{OP})^{1/2}$ im Unendlichen verschwinden ($P \in R_a + S, O \in R$). Es gelten analoge Ergebnisse. Schließlich wird die Lösbarkeit solcher nichtlinearer Randwertaufgaben in der Nachbarschaft von Lösungen der klassischen Randwertaufgabe untersucht und werden die Randvorgaben (1) dahingehend erweitert, daß die Funktionaloperationen F, G noch zweite Ableitungen enthalten.

G. Hellwig.

Soudan, Robert: Indéformabilité d'un corps à potential polyharmonique constant. Arch. Sci. 5, 5—18 (1952).

Im Äußern eines homogenen Körpers V (die Formulierungen sind in der ganzen Arbeit nicht präzise) sei das polyharmonische Potential $U(P) = \delta \int_V v_n(M, P) d\tau_M$

mit $v_n(M, P) = \sum_{\alpha=-1}^{2n-2} C_\alpha \overline{M} P^\alpha$ gegeben (C_α Konstante, wenigstens ein $C_\alpha \neq 0$ für ungerades α). Dann ist es unmöglich, den Rand S von V analytisch so zu deformieren, daß $U(P)$ ungeändert bleibt.

H. Hornich.

Lohwater, A. J.: A uniqueness theorem for a class of harmonic functions. Proc. Amer. math. Soc. 3, 278—279 (1952).

Pour que la représentation usuelle $u(r, \theta) = \int d\mu k(z, a)$ d'une fonction harmonique dans le cercle $|z| = r < 1$, avec $\int |u(r, \theta)| d\theta < M$, $k(z, a) = \Re \left(\frac{z+a}{z-a} \right)$, conduise à des masses $d\mu_n$ ponctuelles, $(\int |d\mu_n| < \infty)$, il suffit que $\lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = 0$ presque partout et que $\lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = \pm \infty$ sur un ensemble dénombrable $E(\theta)$.

P. Lelong.

Green, John W.: On the level surfaces of potentials of masses with fixed center of gravity. Pacific J. Math. 2, 147—152 (1952).

Considérons dans l'espace ordinaire l'ensemble E ($OM \leq 1$) et dans E les répartitions μ de la masse 1, avec centre de gravité en O . Le potentiel en P ($OP > 1$) est maximum si et seulement si μ se compose de masses égales aux extrémités du diamètre de direction OP ; il est minimum si et seulement si μ ne charge que le grand cercle d'axe OP ; et tout cela subsiste en remplaçant le noyau $1/r$ par $\varphi(r)$ strictement décroissante et strictement convexe. Application à la forme des surfaces de niveau de μ , comparées aux sphères de centre O .

M. Brelot.

Jenkins, James A. and Marston Morse: Contour equivalent pseudoharmonic functions and pseudoconjugates. Amer. J. Math. 74, 23—51 (1952).

Une fonction pseudo-harmonique dans D est une fonction $U(x, y)$ localement topologiquement équivalente à une fonction harmonique dans D . Si les courbes de niveau $U = \text{const.}$, $V = \text{const.}$ des fonctions pseudo-harmoniques U et V se correspondent par un homéomorphisme

ψ qui conserve le sens, U et V sont dites „contouréquivalent“ (CE). Cette propriété est dite „stricte“ si $U = V\psi$ dans D . — Les AA. démontrent que, si U et V , pseudo-harmoniques dans D et Δ respectivement, satisfont, de plus, à certaines conditions sur les contours (jordanien) de D et Δ , la condition nécessaire et suffisante pour que U et V soient (CE) est qu'il existe un homéomorphisme de l'ensemble des points critiques de U en ceux de V , transformant aux voisinages de ces points, ainsi que sur les frontières de D et Δ , les arcs $U = \text{const.}$ en arcs $V = \text{const.}$ — U étant pseudo-harmonique V est dite „pseudo-conjuguée“ de U si la fonction complexe $U + iV$ est une transformation intérieure. Un procédé de construction de la pseudo-conjuguée d'une fonction U donnée est indiqué. Au moyen de la transformation intérieure ainsi formée et d'une représentation conforme de la surface de Riemann qu'elle engendre, il est démontré qu'une fonction pseudo-harmonique dans un domaine jordanien, continue sur la contour et y satisfaisant aux mêmes conditions que plus haut, est strictement (CE) à une fonction harmonique. — Il peut être intéressant de rapprocher les considérations et résultats de ce travail, ayant un caractère à la fois analytique et topologique, d'un Mémoire récent de Y. Toki (ce Zbl. 42, 335) qui donne une caractérisation purement topologique des fonctions pseudo-harmoniques.

S. Stoilow.

Brelot, M. et G. Choquet: Espaces et lignes de Green. Ann. Inst. Fourier 3, 199—263 (1952)

Verff. betrachten topologische Räume \mathfrak{E} , die Verallgemeinerungen von Riemannschen Flächen sind: Denn Punktumgebungen von \mathfrak{E} sollen offene Gebiete des geschlossenen (d. h. mit einem unendlich fernen Punkt komplettierten) Euklidischen Raumes R^n homeomorph entsprechen, und wenn hierbei zwei Umgebungen einen gemeinsamen Teil besitzen, soll zwischen den Lokalparametern Isometrie (im Falle $\tau = 2$ allgemeine Konformität) bestehen. Für geschlossene Teilgebiete Ω von \mathfrak{E} wird das Dirichletsche Problem behandelt: Ist f auf dem Rande vorgegeben, so betrachtet man die harmonische obere Einhüllende \bar{H}_f aller in Ω subharmonischen Funktionen mit oberer Grenze $\leq f$ auf dem Rande und ebenfalls die harmonische untere Einhüllende \underline{H}_f der f am Rande majorisierenden superharmonischen Funktionen. Es ist dann $H_f \leq \bar{H}_f$, und bei Gleichheit ist f lösungsfähig (résolutive). Auch allgemeinere Gebiete kommen hierbei in Frage, zunächst die Gebiete Ω oder Räume \mathfrak{E} , welche Greensche Funktionen G besitzen (Greensche Räume). Maximale Stücke der (im Parameterraum) orthogonalen Trajektorien der Schar $G = \text{Konst.}$, auf welchen $\text{grad } G \neq 0$ gilt, heißen Greensche Linien. Eine Greensche Linie ist regulär, falls sie von dem Pol P ausgeht und auf ihr $\liminf G = 0$ gilt. Jedem von P (im Parameterraum) ausgehenden Halbstrahl entspricht eine diesen berührende Greensche Linie, und zwar bilden die von P ausgehenden nicht regulären Greenschen Linien eine Nullmenge in dem Sinne, daß die bezüglichen Anfangsrichtungen die Einheitskugel in einer Punktmenge von verschwindendem $(\tau - 1)$ -dimensionalem Maß schneiden. Wegen der Zuordnung zwischen Greenschen Linien und Punkten auf der Einheitskugel entspricht jeder meßbaren Punktmenge auf der Kugel ein Greensches Linienbüschel mit dadurch bestimmtem sog. Greenschem Maß, das seinerseits auf jeder Niveauläche von G der Schnittpunktmenge ein harmonisches Maß erteilt. Für eine in einem Greenschen Raum beschränkte subharmonische Funktion u kann nun das Maximumprinzip so formuliert werden, daß die obere Grenze von u mit der oberen Grenze auf den regulären Greenschen Linien übereinstimmt.

G. af Hällström.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

● Hornback, Joseph Hope: Integral equations related to the representation of functions by potentials. (An abstract of a thesis.) Urbana 1952.

Gross, B.: On the inversion of the Volterra integral equation. Quart. appl. Math. 10, 74—76 (1952).

Die Gleichung $k(x) = m(x) + \int_0^x k(x-t) m(t) dt$ definiert den lösenden Kern zu dem Kern $k(x-t)$. Wenn k und m die Laplace-Transformierten $K(p)$ und $M(p)$ besitzen, so ist bekanntlich $M(p) = \frac{K(p)}{1 + K(p)}$, also, wenn die komplexe Umkehrformel anwendbar ist:

$$m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{K(p)}{1 + K(p)} e^{pz} dp.$$

Wenn der Integrationsweg zu einer Schleife um die negativ reelle Achse deformiert

werden kann, ergibt sich $m(z)$ als Laplace-Integral:

$$m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left[\frac{K(p e^{-i\pi})}{1 + K(p e^{-i\pi})} - \frac{K(p e^{i\pi})}{1 + K(p e^{i\pi})} \right] e^{-pz} dp = \int_0^{\infty} \bar{r}(p) e^{-pz} dp.$$

Ist k selbst eine Laplace-Transformierte $k(x) = \int_0^{\infty} r(s) e^{-xs} ds$, also $K(p)$ eine

Stieltjes-Transformierte $K(p) = \int_0^{\infty} \frac{r(s)}{s+p} ds$, so läßt sich $r(p)$ in die Gestalt bringen:

$$r(p) = \frac{r(p)}{\left[1 + \int_0^{\infty} \frac{r(s)}{(s-p)} \cdot ds \right]^2 + \pi^2 r^2(p)}.$$

G. Doetsch.

San Juan, Ricardo: Funktional Charakterisierungen der verallgemeinerten Laplacetransformationen in den Räumen L , L^r , R und U . Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 41—62 (1952) [Spanisch].

Das schon früher vom Verf. (dies. Zbl. 38, 269; 43, 321) und vom Ref. (dies. Zbl. 42, 109) behandelte Problem, die Laplace-Transformation in etwas verallgemeinerter Gestalt $f(z)$

$= \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-t\varphi(z)} dt$ in gewissen Funktionenräumen durch ihr Differentiations-, Integrations- oder Faltungsgesetz zu charakterisieren, wird hier nochmals in ausführlicherer Weise behandelt. Um die auf ein endliches Intervall bezüglichen Sätze von Steinhaus, Riesz usw. über die Darstellbarkeit eines linearen Funktional durch ein Integral anwenden zu können, wird das Intervall $(0, \infty)$ durch die Substitution $t = -\log x$ auf das Intervall $(0, 1)$ reduziert und die Laplace-Transformation in der Gestalt $f(z) = \int_0^1 \psi(x) x^{\varphi(z)-1} dx$ geschrieben. Zunächst wird

(Lema fundamental S. 42) die Transformation in Gestalt eines Integrals $I(\varphi, z) = \int_0^1 \psi(x) \alpha(z, x) dx$

angesetzt und gezeigt, daß $\alpha(z, x) = x^{\varphi(z)-1}$ ist, wenn es in einem gewissen Funktionenraum

eine vollständige Folge $\psi_n(x)$ gibt, für die das „Integrationsgesetz“ $I \left[\int_x^1 \psi_n(u) du \right] = I(1) I[x \psi_n(x)]$ gilt, und $I(1, z) = 1/g(z)$ gesetzt wird. Wird nun statt des Integralansatzes vorausgesetzt, daß I in einem bestimmten Funktionenraum wie L , L^2 , L^r ($r > 1$), U linear (distributiv und stetig) ist, so kann man I nach Steinhaus usw. als Integral in obiger Gestalt ansetzen und dann das „Lema fundamental“ anwenden. Damit ergibt sich, daß die Laplace-Transformation durch die Eigenschaft der Linearität und durch das Integrationsgesetz (analog auch durch das Differentiations- oder Faltungsgesetz) in jenen Räumen vollständig charakterisiert ist.

G. Doetsch.

Delange, Hubert: Sur un théorème de Widder. Bull. Sci. math., II. Sér. 76_I, 10—17 (1952).

Es sei $\Phi(t) \geq 0$, und die Laplace-Transformation $\int_0^{\infty} e^{-xt} \Phi(t) dt = F(x)$ sei für $x > a$ konvergent. Damit eine für $x > a$ unbeschränkt oft differenzierbare

Funktion $f(x)$ in der Gestalt $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \varphi(t) dt$ dargestellt werden kann mit

einem $\varphi(t)$, das die Bedingung $|\varphi(t)| \leq M \Phi(t)$ erfüllt, ist notwendig und hinreichend, daß für $x > a$ gilt: $|f^{(n)}(x)| \leq M |F^{(n)}(x)|$, $n = 0, 1, \dots$ — In dem Spezialfall $\Phi(t) \equiv 1$ ergibt sich ein von Widder (The Laplace transform, 1941, S. 315—317) bewiesener Satz. [Hier ist $|F^{(n)}(x)| = n!/x^{n+1}$, in dem Zitat in vorliegender Note steht der Druckfehler $x^{n+1}/n!$.] Aus dem obigen Satz ergibt sich: Die kleinste

Zahl M , für die die Relation $|\varphi(t)| \leq M \Phi(t)$ gilt, ist $\sup_{x, n} \frac{|f^{(n)}(x)|}{|F^{(n)}(x)|}$. — Es wird auch ein entsprechender Satz für Laplace-Stieltjes-Integrale aufgestellt.

G. Doetsch.

Bose, S. K.: On Laplace transform. Math. Z. **56**, 84—93 (1952).

Die Transformation $\varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx$ werde symbolisch durch $\varphi(p) \doteq f(x)$ bezeichnet. Unter gewissen Voraussetzungen gilt:

Satz I. Wenn $\varphi_1(p) \doteq f_1(t)$, $\varphi_2(p) \doteq t f_2(t)$, $\varphi_3(p) \doteq f_3(t)$, dann ist

$$\int_0^\infty \varphi_1(u) \varphi_3(u) f_2(u) \frac{du}{u} = \int_0^\infty f_1(v) F(v) \frac{dv}{v} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{v} F(v) = \int_0^\infty f_3(z) \frac{\varphi_2(v+z)}{v+z} dz.$$

Satz II. Wenn $\varphi(p) \doteq f(t)$, $\sqrt{p} f\left(\frac{1}{p}\right) \doteq g(t)$, $\psi(p) \doteq \chi(t)$, dann ist

$$\int_0^\infty \varphi(t^2) \chi(t) \frac{dt}{t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty g\left(\frac{t^2}{4}\right) \psi(t) dt.$$

Satz III. Wenn $\varphi(p) \doteq f(t)$, $p^\nu e^{-xp^\mu} \doteq g(x, t)$, $\Theta(p) \doteq F(t)$, dann ist

$$\int_0^\infty u^{\nu-\mu-1} \varphi(u^\mu) F(u) du = \int_0^\infty f(x) G(x) dx \quad \text{mit} \quad G(x) = \int_0^\infty \Theta(v) g(x, v) \frac{dv}{v}.$$

Es werden Spezialfälle und Beispiele zu diesen Sätzen behandelt. *G. Doetsch.*

Pilatovskij, V. P.: Über die Berechnung des Restgliedes der asymptotischen Entwicklung einer Funktion, die durch ihre Laplace-Transformierte gegeben ist. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **83**, 649—650 (1952) [Russisch].

L'A. donne quelques remarques sur une formule introduite dans son article (ce Zbl. **46**, 114). Dans la formule (11) le signe = doit être remplacé par \approx .

J. Mikusiński.

Cotte, Maurice: Sur une correspondance symbolique approchée. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 134—136 (1952).

Poli, L.: Intégrales et calcul symbolique. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. **66**, 21—26 (1952).

Wenn $p \int_0^\infty e^{-pt} h(t) dt = f(p)$, abgekürzt $h(t) \supset f(p)$, so gilt für eine beliebige Funktion $g(a)$, für die sich die nötigen Integralvertauschungen vornehmen lassen:

$$\int h(s) g\left(\frac{t}{s}\right) \frac{ds}{s} \supset \int f(u) g\left(\frac{u}{p}\right) \frac{du}{u},$$

wobei links die Integralgrenzen $t, \infty; 0, t; 0, \infty$ und rechts bzw. $0, p; p, \infty; 0, \infty$ lauten können. Durch Spezialisierung von h und g erhält der Verf. zahlreiche Korrespondenzen auf einheitlichem Wege.

G. Doetsch.

Jaiswal, J. P.: A note on Meijer transform. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. **66**, 55—60 (1952).

Es sei $\Phi(p) = p \int_0^\infty e^{-(1/2)st} (st)^{-k-1/2} W_{k+1/2, m}(st) t^{\nu-1} h(t) dt$ [Meijer-Transformierte von $t^{\nu-1} h(t)$], $h(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$, $p^{-\lambda} f(p) = \int_0^\infty e^{-ps} g(s) ds$. Dann

ist (*) $\Phi(p) = \int_0^\infty g(s) \chi(p, s) ds$ mit $\chi(p, s) = \frac{\Gamma(\nu-k+1+m) \Gamma(\nu-k+1-m)}{p^\nu \Gamma(\nu+1-2k)}$

$\cdot \int_0^\infty e^{-ts} t^\lambda {}_2F_1\left[\begin{matrix} \nu-k+1+m, \nu-k+1-m \\ \nu-2k+1 \end{matrix}; -\frac{t}{p}\right] dt$, wenn $\Re \lambda > -1$, $\Re(\nu-k+1 \pm m) > 0$, $\Re p > 0$ und $g(s)$ beschränkt ist, die Laplace-Transformierte von $|g(s)|$ existiert und das Integral in (*) absolut konvergiert. — Es werden Spezialfälle und Beispiele zu diesem Satz behandelt.

G. Doetsch.

Duff, G. F. D.: *F-equation Fourier transforms*. Canadian J. Math. 4, 248—256 (1952).

Poursuivant ses recherches [C. r. Acad. Sci., Paris 229, 1195—1197 (1949)] sur l'équation $\frac{d}{dz} F(z, \alpha) = F(z, \alpha + 1)$ étudiée par Truesdell (An essay toward a unified theory of special functions, Ann. Math. Studies n. 18, Princeton 1948), l'A. considère ici les solutions qui s'expriment à la fois sous forme de série $\sum_{n=0}^{\infty} f(\alpha + n) z^n / n!$ et d'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi i \alpha s + z e^{2\pi i s}) g(s) ds$. La „fonction de coef.“ f et la „fonction spectrale“ g sont transformées mutuelles de Fourier (dans un sens à préciser). On en déduit diverses formules de composition et on donne des exemples concrets. J. Deny.

Fox, Charles: *Iterated transforms*. Canadian J. Math. 4, 149—161 (1952).

Die Untersuchung, die im Rahmen der L^2 -Theorie verläuft, benutzt, wie es bei der Behandlung der „general transforms“ üblich ist, die Mellin-Transformation $F(s) = \int_0^{\infty} f(u) u^{s-1} du$ auf der Geraden $\Re s = \frac{1}{2}$. (In der Folge werden Paare zusammengehöriger Funktionen $f(u)$, $F(s)$ immer mit entsprechenden kleinen und großen Buchstaben bezeichnet.) Innerhalb dieser Theorie erweist es sich als natürlich, die Laplace-Transformation einer Funktion $m(u)$ durch $m(x) = x \int_0^{\infty} e^{-xu} m_1(u) du$ mit $m_1(y) = \int_0^y m(u) du$ zu definieren. (Wenn die Laplace-Transformierte von $m(u)$ im üblichen Sinn existiert, stimmt sie nach dem „Integrationsgesetz“ mit der neuen Definition überein.) Nach dieser Definition ist e^{-x} eine Laplace-Transformierte (was sie im üblichen Sinn nicht ist), nämlich der Funktion $m_1(u) = 0$ für $0 \leq u < 1$, $= 1$ für $u \geq 1$. Verf. knüpft nun an das bekannte Resultat an, daß die Aufeinanderfolge zweier Laplace-Transformationen eine Stieltjes-Transformation ist: Aus $g(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} h(t) dt$, $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} g(t) dt$ folgt $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{h(t)}{x+t} dt$. Er zeigt, daß hierbei der Kern e^{-xt} durch die verallgemeinerte Laplace-

Transformierte eines beliebigen „Fourier-Kernes“ ersetzt werden kann. Für den letzteren ist an folgendes zu erinnern: Wenn $m(u)$ und $n(u)$ die Eigenschaft haben, daß ihre Mellin-Transformierten die Gleichung $M(s) N(1-s) = 1$ erfüllen und beide auf $\Re s = \frac{1}{2}$ beschränkt sind, so wird die „allgemeine Fourier-Transformation“

$$B(y) = \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} A(x) \frac{m_1(xy)}{x} dx$$

für $A(x) \in L^2(0, \infty)$ umgekehrt durch

$$A(y) = \frac{d}{dy} \int_0^{\infty} B(x) \frac{n_1(xy)}{x} dx.$$

$m_1(x)/x$ und $n_1(x)/x$ heißen „allgemeine Fourier-Kerne“. Im Spezialfall $m_1 = n_1$ kehrt die Transformation sich selbst um, und der Kern heißt symmetrisch. Für einen solchen gilt nun folgender Satz 1. Die Mellin-Transformierte $M(s)$ von $m(u)$ erfülle die Gleichung $M(s) M(1-s) = 1$ und sei auf $\Re s = \frac{1}{2}$ beschränkt, d. h. $m_1(x)/x$ sei ein symmetrischer Fourier-Kern. Ist $h(x) \in L^2(0, \infty)$, so folgen aus

$$g(u) = \int_0^{\infty} m(u t) h(t) dt, \quad f(u) = \int_0^{\infty} m(u t) g(t) dt$$

die Gleichungen

$$(1) \quad f(u) = \int_0^{\infty} \frac{h(t)}{u+t} dt, \quad (2) \quad \int_0^{\infty} f(u t) h(t) dt = \int_0^{\infty} g(u t) g(t) dt.$$

Im asymmetrischen Fall $m_1 \neq n_1$ ergibt sich (Satz 2) unter analogen Voraussetzungen aus

$$g(u) = \int_0^{\infty} m(u t) h(t) dt, \quad f(u) = \int_0^{\infty} n(u t) g(t) dt$$

ebenfalls Gleichung (1), aber im allgemeinen nicht (2). Diese Resultate werden noch weiter verallgemeinert.

G. Doetsch.

Agnew, Ralph Palmer: Integral transformations and Tauberian constants. Trans. Amer. math. Soc. **72**, 501—518 (1952).

In Verallgemeinerung der klassischen Abelschen und Tauberschen Sätze wurden in letzter Zeit unter der Voraussetzung $(1) \lim_{x \rightarrow \infty} |xu(x)| < \infty$ Abschätzungen für $|F(t) - S(T)|$ gefunden, wobei $F(t) = \int_0^\infty \varphi(x) u(x) dx$, $S(T) = \int_0^T u(x) dx$ gesetzt ist. Rajagopal (dies. Zbl. **40**, 322) gab solche Abschätzungen für die spezielle Zuordnung der Variablen $T = q_0/t$ (q_0 konst.). Verf. betrachtet einen allgemeineren Fall der Zuordnung, wobei $t = t(x)$, $T = T(x)$ als positive Funktionen eines positiven Parameters x angenommen werden, mit $t(x) \rightarrow 0$, $T(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$. Es sei $0 < q_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} t T \leq \lim_{x \rightarrow \infty} t T = q_2 < \infty$ und

$$A(q) = \int_0^q \frac{1 - \varphi(x)}{x} dx + \int_q^x \frac{|\varphi(x)|}{x} dx.$$

Unter der Voraussetzung (1) gilt dann

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |F(t) - S(T)| \leq A(q) \lim_{x \rightarrow \infty} |xu(x)|,$$

wobei $q = q_2$ für $A(q_1) \leq A(q_2)$ und andernfalls $q = q_1$ ist. $A(q)$ ist hierbei die beste (kleinste) Konstante. Gilt eine der beiden oder gelten die beiden Grenzbeziehungen $\lim_{x \rightarrow \infty} t T = 0$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} t T = \infty$, so gibt es eine reelle beschränkte meßbare Funktion $u(x)$, für die $\lim_{x \rightarrow \infty} |xu(x)| = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} |F(t) - S(T)| = \infty$ gilt. Das Min $A(q) = A_0 = A(q_0)$ mit $\varphi(q_0) = 1/2$ liefert in

(2) die kleinste Konstante A , wenn $t(x)$ und $T(x)$ unabhängig von $u(x)$ angenommen werden. Dieselbe Eigenschaft besitzt A_0 auch in diesem Fall bei den analogen Abschätzungen von $|F(t(T)) - S(T)|$ und $|F(t) - S(T(t))|$, wenn $t(T)$, $T(t)$ positive, von $u(x)$ unabhängige Funktionen bedeuten. A_0 besitzt dieselbe Eigenschaft, auch wenn die positive Funktion $t(T)$ möglicherweise noch von $u(x)$ abhängt, $\varphi(x) \geq 0$ und $u(x)$ eine reelle stetige, der Bedingung (1) unterworfenen Funktion ist. V. Garten.

Cameron, R. H., B. W. Lindgren and W. T. Martin: Linearization of certain nonlinear functional equations. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 138—143 (1952).

Es sei C der Raum der in $0 \leq t \leq 1$ stetigen Funktionen $x(t)$ mit $x(0) = 0$ und T die eventuell nichtlineare Transformation $y(t) = T x(t) = x(t) + \Lambda(x(t))$, die in einer Wiener-meßbaren Untermenge I von C definiert ist und I eindeutig in eine Menge TI überführt. Cameron und Martin (dies. Zbl. **36**, 348) haben gezeigt, daß die Umkehrung $x(t) = T^{-1} y(t)$ als Mittellimes einer Reihe von „Fourier-Hermite“-Funktionalen dargestellt werden kann. In der vorliegenden Note wird ein Minimierungsprozeß aufgezeigt, der approximierende Lösungen des Umkehrungsproblems erzeugt, welche die wahre Lösung im Sinne eines $L^1(C)$ -Mittellimes annähern. G. Doetsch.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

• **Riesz, Frédéric et Béla Sz.-Nagy: Leçons d'analyse fonctionnelle.** Budapest: Académie des Sciences de Hongrie 1952. VIII, 448 p. Forint 90,—; \$ 7,70.

Das Buch zerfällt in zwei Teile, der erste gibt eine Theorie der Ableitung und der Integration und stammt von F. Riesz, der zweite behandelt die Integralgleichungen und die linearen Transformationen und hat B. Sz.-Nagy zum Verf. Das Werk ist aus Vorlesungen beider Verff. entstanden, die hervorragend klare und verständliche Darstellung hält etwa die Mitte zwischen dem Stil einer Vorlesung und einer rein systematischen Entwicklung des Gegenstandes. Es wird weniger größte Allgemeinheit angestrebt, vielmehr dem Gange der historischen Entwicklung folgend ein möglichst vielseitiges Bild der Ideen und Methoden an markanten Beispielen zu geben versucht. — Der erste Teil beginnt mit einem direkten Beweis des Satzes von Lebesgue, daß jede Funktion beschränkter Variation fast überall differenzierbar ist. Es schließen sich an weitere Sätze über Funktionen beschränkter Variation und der Satz von Denjoy-Young-Saks über die vier Derivierten einer beliebigen Funktion. Das erste Kapitel (über die Ableitung) schließt mit der Differentiation und Integration von Intervallfunktionen.

Das zweite Kapitel bringt das Lebesguesche Integral, das direkt ohne Einführung des Maßbegriffes erklärt wird: Es wird eingeführt für Treppenfunktionen, dann für die Grenzfunktionen wachsender Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen, schließlich für die Differenzen solcher Funktionen. Die damit erreichte Klasse fast überall erklärter Funktionen heißt die Klasse C_2 der summierbaren Funktionen. Der Satz von B. Levi sagt dann aus, daß C_2 gegenüber der nochmaligen Bildung von Grenzfunktionen wachsender Folgen mit beschränkten Integralen abgeschlossen ist. Es schließen sich an der Satz von Lebesgue über gliedweise Integration einer majorisierten Folge summierbarer Funktionen, die Summierbarkeit zusammengesetzter Funktionen, das Lemma von Fatou, die Ungleichungen von Hölder, Minkowski. Die meßbaren Funktionen werden als Grenzfunktionen summierbarer Funktionen erklärt, das Maß einer Punktmenge als Integral über die charakteristische Funktion. Absolute Stetigkeit als Kennzeichen eines unbestimmten Integrals, partielle Integration, Substitutionsregel folgen. Ein Abschnitt über den Raum L^2 bringt den Satz von Riesz-Fischer, die Darstellung linearer Funktionale auf L^2 , Orthogonalsysteme, Komplementärzerlegungen von L^2 . Auch für die L^p werden die linearen Funktionale bestimmt. Es folgt die Integration von Funktionen mehrerer Variablen, der Satz von Fubini, die Ableitung und Integration von Rechtecksfunktionen. Der nächste Abschnitt bringt den Nachweis, daß die ursprüngliche Lebesguesche Definition des Integrals der hier gegebenen äquivalent ist und ergänzt die Integrationstheorie (Sätze von Egoroff, Lusin). Kap. III untersucht die linearen Funktionale auf dem Raum C der stetigen Funktionen und zeigt, daß das Stieltjesintegral als lineares Funktional auf C erklärt werden kann. Dieses von F. Riesz stammende grundlegende Ergebnis wird ausführlich dargestellt und die Auffassung des Integrals als lineares Funktional und seine Fortsetzung mittels des Satzes von Hahn-Banach als allgemeines Prinzip ausdrücklich betont. Der erste Teil schließt mit der Untersuchung des Integrals von Daniell und dem Satz von Radon-Nikodym. — Der zweite Teil beginnt in Kap. IV mit einer Darstellung der Theorie der Integralgleichungen. Volterra'sche Integralgleichungen, die Neumannsche Reihe, die Approximation quadratisch integrierbarer Kerne durch Kerne endlichen Ranges bilden den Anfang. Die Alternative von Fredholm wird auf zwei Wegen abgeleitet, einmal nach E. Schmidt durch Approximation durch Kerne endlichen Ranges, dann nach der Methode von F. Riesz, der die Zerlegung von L^2 in zwei komplementäre Teilräume bewies, in deren einem $(1-T)^n f = 0$ gilt, im anderen $f = (1-T)^n g$ für ein festes geeignetes n , T ein vollstetiger Operator. Auch die Methode der Fredholmschen Determinanten wird kurz auseinandergesetzt. Anwendungen auf das Dirichletsche und das Neumannsche Problem der Potentialtheorie. Kap. V bringt die axiomatische Einführung des Hilbertschen Raumes, die Theorie der vollstetigen Operatoren in abstrakter Form, zuerst im Hilbertschen Raum, dann die Übertragung auf beliebige Banachsche Räume und als Beispiel zur Theorie der Banachschen Räume die Bestimmung aller linearen Operatoren des Raumes C als Integraltransformationen und die Charakterisierung der vollstetigen unter ihnen (im wesentlichen nach Radon). Kap. VI bringt die Theorie der symmetrischen vollstetigen Operatoren des Hilbertschen Raumes, die Existenz der Eigenwerte und Eigenfunktionen und deren Vollständigkeit nach den Methoden von F. Riesz und O. Kellogg. Diese Theorie wird angewandt auf die symmetrischen und hermiteschen Kerne, der Satz von Mercer wird bewiesen, die schwingende Saite nach Sz.-Nagy behandelt und der Hauptsatz der Theorie der fastperiodischen Funktionen nach H. Weyl und F. Rellich abgeleitet. Kap. VII bringt die Spektralzerlegung für beschränkte symmetrische, unitäre und normale Operatoren nach F. Riesz im wesentlichen, als Beispiele die Fourier-Plancherelsche und die Watsonschen Abbildungen. Kap. VIII enthält die Spektraltheorie der selbstadjungierten Operatoren, die Fortsetzung symmetrischer Operatoren zu maximalen Operatoren und die Theorie der halbbeschränkten Operatoren nach K. Friedrichs und M. Krejn. Kap. IX enthält den Operatorenkalkül der Funktionen $u(A)$ eines selbstadjungierten Operators A , speziell den Satz, daß jeder lineare abgeschlossene Operator, der mit allen mit A vertauschbaren beschränkten Operatoren vertauschbar ist, eine Funktion von A ist. Es schließt sich eine Darstellung der Hauptergebnisse der Störungstheorie von F. Rellich und Sz.-Nagy an. Kap. X behandelt den Satz von Stone über einparametrische Gruppen unitärer Transformationen sowie den entsprechenden Satz von Sz.-Nagy und Hille über einparametrische Halbgruppen beschränkter selbstadjungierter Operatoren; einige Sätze über Halbgruppen allgemeiner beschränkter Operatoren von Hille u. a., den statistischen Ergodensatz von J. v. Neumann und Verallgemeinerungen davon. Kap. XI bringt kurz die Grundbegriffe der allgemeinen Spektraltheorie in Banachschen Räumen von F. Riesz, Dunford und Lorch, vor allem die Zerlegung eines Operators nach den isolierten Bestandteilen seines Spektrums. Als Anwendung wird der Satz von Wiener über absolut konvergente trigonometrische Reihen bewiesen. Das Buch schließt mit einer kurzen Darstellung der Theorie der Spektralmaßen, die kürzlich J. v. Neumann gab. — [Die Verf. haben die Schriftleitung gebeten, die folgende Ungenauigkeit im Buche richtigzustellen: Auf S. 33 wird behauptet, daß jede Funktion $f(x)$, die zugleich mit $-f(x)$ in die Klasse C_1 gehört, Riemann-integrierbar ist. Das ist so unrichtig, da ja die Funktionen der Klasse C_1 nur bis auf eine Nullmenge definiert sind. Es gilt aber, daß jede solche Funktion $f(x)$ fast überall gleich einer Riemann-integrierbaren Funktion ist.]

Dieudonné, Jean: Complex structures on real Banach spaces. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 162—164 (1952).

A topological vector space over the real field can be regarded, in a natural sense, as a topological vector space over the complex field if and only if there exists a (continuous) automorphism u with $u^2(x) = -x$. The author uses an example of R. C. James (this Zbl. **39**, 122) to prove that there are Banach spaces of infinite dimension over the real field with no such automorphism. *F. F. Bonsall.*

Nikodým, Otton Martin: Sur la clôture faible des ensembles convexes dans l'espace réel où aucune topologie n'est admise. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1727—1728 (1952).

L sei ein linearer reeller Raum unendlicher Dimension (ohne Topologie). Ist E eine konvexe Teilmenge von L , so besteht $\text{lin } E$ aus allen $x \in L$, zu denen ein $y \in E$ existiert, so daß das halboffene Intervall $\langle y, x \rangle$ in E liegt. Ist α eine Ordnungszahl $< \Omega$, so sei $\text{lin}^1 E = \text{lin } E$, $\text{lin}^\alpha E = \text{lin } \text{lin}^{\alpha-1} E$ bzw. $\bigcup \text{lin}^\alpha E$. Es wird die Konstruktion eines E skizziert, für das $\text{lin}^{\alpha+1} E \neq \text{lin}^\alpha E$ gilt für gegebenes $\alpha < \Omega$. *G. Köthe.*

Nikodým, Otton Martin: Sur les clôtures faible et forte des ensembles convexes dans les espaces linéaires réels abstraits. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1831—1833 (1952).

L sei ein reeller linearer Raum unendlicher Dimension ohne Topologie. Ist E eine konvexe Teilmenge, so ist stets $\text{lin}^\Omega E = \text{lin}^{\Omega+1} E$. Besitzt L abzählbare Dimension, so gibt es stets ein $\alpha < \Omega$ mit $\text{lin}^\alpha E = \text{lin}^{\alpha+1} E$; ist L von nichtabzählbarer Dimension, so gibt es stets ein $E \subset L$ mit $\text{lin}^\alpha E \neq \text{lin}^\beta E$ für beliebige $\alpha < \beta < \Omega$. *G. Köthe.*

Rådström, Hans: An embedding theorem for spaces of convex sets. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 165—169 (1952).

In der Menge M der konvexen Mengen A, B, \dots eines reellen linearen topologischen Raumes L werden in der üblichen Weise die Addition $A + B$ und die Multiplikation λA mit reellen Zahlen definiert, welche Operationen aus M nicht herausführen. Die Mengen aus M bilden überdies eine kommutative Halbgruppe hinsichtlich der Addition, in der das zweite Distributivgesetz $(\lambda_1 + \lambda_2) A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$ für $\text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2$, insbesondere also für $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ gilt. Verf. untersucht die Frage, ob sich die Halbgruppe M in eine Gruppe N einbetten und sich die Multiplikation mit beliebigen reellen Zahlen in dieser sodann in solcher Weise erweitern läßt, daß N zu einem linearen Vektorraum wird. — Es werden Einbettungstheoreme für einen normierten linearen Raum L angegeben, wobei eine Beschränkung auf gewisse Unterklassen von M , insbesondere die der kompakten konvexen Mengen erfolgt. Der so gewonnene lineare Vektorraum kann sodann durch Erweiterung der Hausdorffschen Metrik für die konvexen Mengen aus L normiert werden. *R. Inzinger.*

Tagamkij, Ja. A.: Eine Verallgemeinerung eines Satzes von Minkowski. Uspechi mat. Nauk **7**, Nr. 2 (48), 180—183 (1952) [Russisch].

Sei H ein Hilbertscher Raum mit reellem Skalarprodukt. K sei eine Menge aus H mit folgenden Eigenschaften: 1. Mit $a \in K, b \in K, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, (\alpha, \beta \text{ reelle Zahlen})$ ist auch $\alpha a + \beta b \in K$. 2. Der Grenzwert jeder stark konvergenten Folge von Elementen aus K gehört zu K . R sei die Menge der $r \in H$ mit $(r, k) \geq 0$ für alle $k \in K$. Die Menge K heiße Kegel in H und R der zu K konjugierte Kegel. Dann wird gezeigt: Der konjugierte Kegel zu R ist wieder K . Als Anwendung wird ein Approximationssatz [vom Wienerischen Typus für den Raum $L^2(-\infty, \infty)$] bewiesen. *K. Prachar.*

Lehto, Olli: Some remarks on the kernel function in Hilbert function space. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **109**, 6 S. (1952).

Considérons un espace de Hilbert de fonctions réelles f dans un domaine D , possédant une fonction-noyau. L'A. montre par des exemples que ce noyau peut n'être pas borné sur tout compact de D et peut être discontinu même si toutes les f sont continues.

M. Brelot.

Vinokurov, V. G.: Über biorthogonale Systeme, die durch vorgegebene Unterräume hindurchgehen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 685—687 (1952) [Russisch].

P und Q seien abgeschlossene Unterräume in einem separablen Banachraum E ; $P \cap Q = \theta$; $P \cup Q$ eine Grundmenge in E ; $z_{2i-1} = x_i$, $z_{2i} = y_i$ Elemente von E . Satz 1: Es gibt ein Biorthogonalsystem (BOGS) $\{z_i, F_i\}$ in E , so daß die x_i bzw. y_i zu P bzw. Q gehören und dort eine Grundmenge bilden. Satz 2 bringt eine ähnliche Aussage für Basen statt BOGS. Weitere Bemerkungen schließen sich an die Tatsache an, daß mit $\{x_i\} \cup \{y_i\}$ auch $\{x_i\} \cup \{\alpha_i x_i + y_i\}$ eine Grundmenge in E ist. In Satz 4 ist ein Versehen unterlaufen.

K. Zeller.

Edwards, R. E.: On functions whose translates are independent. Ann. Inst. Fourier 3, 31—72 (1952).

Soient G un groupe abélien localement compact, E un espace localement convexe invariant par translation de fonctions définies sur G ; pour $f \in E$ et $A \subset G$, soit $I(f, A)$ le sous-espace vectoriel fermé de E engendré par les fonctions $f_a(x) = f(x + a)$, $a \in A$. Problème: quand f a-t-elle ses translates indépendantes, i. e. quand a-t-on $f_a \notin I(f, A)$ toutes les fois que A est fermé et $a \notin A$? Soit $E'(f)$ l'espace des fonctions de la forme $\varphi(x) = \langle f_x, f' \rangle$, où $f' \in E'$ (le dual de E). Alors, pour que f ait ses translates indépendantes, il faut et il suffit qu'il existe des fonctions $\varphi(x)$ de support arbitrairement petit telles que $\varphi(0) \neq 0$ (moyennant l'hypothèse que $f \rightarrow f_a$ est un endomorphisme continu de E). Dans les cas usuels, les fonctions de $E'(f)$ sont de la forme $f * f'$, où f' est une fonction, une mesure, ou une distribution; la solution de $f * f' = \varphi$ équivaut à celle de $F \cdot F' = \Phi$ presque partout sur le dual \hat{G} de G (les lettres capitales désignant les transformées de Fourier). Ainsi, il faut exprimer que Φ/F , pour les φ envisagées plus haut, est la transformée de Fourier d'une fonction d'une certaine classe. Ces idées conduisent à une solution plus ou moins complète du problème notamment dans les cas suivants: G discret, $E = L^2 G$; $G =$ le tore T , $E = L^2 T$ ou l'espace des distributions; $G =$ la droite R , $E = L^2 R$, ou $L^1 R$, ou l'espace des distributions sphériques, ou l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence compacte. Il y a des connections avec la théorie des fonctions quasi-analytiques. Finalement, l'A. indique une utilisation (assez compliquée) de la théorie des anneaux normés réguliers de Šilov, et signale quelques extensions possibles.

J. Dixmier.

Edwards, R. E.: Note on the mean-independence of translates of functions. J. London math. Soc. 27, 249—253 (1952).

Les notations étant les mêmes que dans la revue précédente, soit $I'(f, A)$ l'enveloppe convexe fermée équilibrée des fonctions f_a , $a \in A$. Problème: quand a-t-on $f_a \notin I'(f, A)$ toutes les fois que A est fermé et $a \notin A$? Le problème est résolu complètement pour $E = L^2 G$: Les seules fonctions ne possédant pas cette propriété sont des fonctions évidentes possédant des caractères de périodicité; l'ensemble de ces fonctions se réduit à $\{0\}$ lorsque \hat{G} est connexe.

J. Dixmier.

Bearman, Jacob E.: Rotations in the product of two Wiener spaces. Proc. Amer. math. Soc. 3, 129—137 (1952).

Désignons par $W(E)$ la mesure de Wiener [Acta math. 55, 117—258 (1930)] définie pour une classe de sous-ensembles de l'espace C des fonctions $x = x(t)$ continues dans $[0, 1]$ et s'annulant pour $t = 0$. Cette mesure est complètement additive et $W(C) = 1$. Soit $\iint_{C \times C} F(x, y) dW \times W$ l'intégrale de la fonctionnelle $F(x, y)$ définie dans $C \times C$, l'intégration étant effectuée par rapport au carré Cartésien de la mesure W . L'A. appelle la rotation une transformation de l'espace $C \times C$ définie par les formules

$$(*) \quad \begin{aligned} \xi(t) &= \int_0^t \cos \vartheta(s) dx(s) - \int_0^t \sin \vartheta(s) dy(s), \\ \eta(t) &= \int_0^t \sin \vartheta(s) dx(s) + \int_0^t \cos \vartheta(s) dy(s), \end{aligned}$$

$(x(t), y(t))$ étant un élément de $C \times C$ et $\vartheta(s)$ — une fonction à variation bornée. L'A. démontre que l'intégrale $\int_C \int_C F(x, y) dW \times W$ est invariante par rapport aux rotations c.-à-d. que $\int_C \int_C F(x, y) dW \times W = \int_C \int_C F(\xi, \eta) dW \times W$, les fonctions (x, y) et (ξ, η) étant liées par les formules (*).

A. Alexiewicz.

Gál, I. S.: Sur la méthode de résonance et sur un théorème concernant les espaces de type (B). Ann. Inst. Fourier 3, 23—30 (1952).

Given are two normed (not necessarily complete) vector spaces E and E' . A sequence $\{u_n(x)\}$ of bounded and real-homogeneous transformations from E into E' , with norms $|u_n|$, is called asymptotically sub-additive if

$$(i) \quad ||u_n(x+y)|| \leq ||u_n(x)|| + O(|u_n| \cdot ||y||)$$

uniformly for all $x, y \in E$; and if

$$(ii) \quad \inf_{||y|| \leq 1} \{ ||u_n(x+y)|| + ||u_n(x)|| - ||u_n(y)|| \} \geq o(|u_n|)$$

for each fixed $x \in E$. The following generalization of the Banach-Steinhaus theorem is proved: Theorem: Suppose that E is complete and that $\{u_n(x)\}$ is asymptotically sub-additive. If then $\lim_{n \rightarrow \infty} ||u_n(x)|| < \infty$ for every $x \in E$, then the

norms $|u_n|$ are uniformly bounded. — It is interesting to note that the proof, which is indirect, does not make use of the notion of category. There exists a sequence $\{x_n\} \in E$ with $||x_n|| = 1$ and $\frac{1}{2}|u_n| \leq ||u_n(x_n)|| \leq |u_n|$; such points are said to be in resonance with u_n . Assuming now that $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \infty$, a point $x = \sum a_k x_{n_k}$ is inductively constructed, by the classical condensation method of Lebesgue, such that $||u_{n_k}(x)|| \rightarrow \infty$.

W. W. Rogosinski.

Dixmier, J.: Applications \dagger dans les anneaux d'opérateurs. Compositio math. 20, 1—55 (1952).

In einer früheren Arbeit (1) (dies. Zbl. 36, 358) hat Verf. die \dagger -Abbildungen der Operatorenringe endlicher Klasse untersucht, in einer anderen Arbeit (2) (dies. Zbl. 43, 327) die Struktur beliebiger Operatorenringe \mathbf{M} (mit Einselement). Ziel der vorliegenden Arbeit ist das Studium der \dagger -Abbildungen beliebiger Operatorenringe. Die Definition der \dagger -Abbildungen muß gegenüber (1) abgeändert werden: \mathfrak{m} sei ein zweiseitiges Ideal aus \mathbf{M} , \mathfrak{m}^+ die Menge der selbstadjungierten $A \geq 0$ aus \mathfrak{m} ; eine lineare Abbildung $\varphi(A)$ von \mathfrak{m} in das Zentrum \mathbf{M}^1 von \mathbf{M} heißt eine \dagger -Abbildung, wenn $\varphi(A B) = \varphi(B A)$ für alle $A \in \mathfrak{m}$, $B \in \mathbf{M}$ gilt, ferner aus $A \in \mathfrak{m}^+$ folgt, daß $\varphi(A) \in \mathbf{M}^{++}$, schließlich $\varphi(A B) = A \varphi(B)$ für $A \in \mathbf{M}^+$ und $B \in \mathfrak{m}$ gilt. φ heißt treu, wenn aus $A \in \mathfrak{m}^+$, $\varphi(A) = 0$, stets $A = 0$ folgt; φ heißt normal, wenn für eine wachsend filternde Menge $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{m}$ mit der oberen Grenze $A \in \mathfrak{m}$ gilt, daß $\varphi(A)$ die obere Grenze von $\varphi(\mathfrak{F})$ ist. Es wird die Frage untersucht, für welche \mathbf{M} es solche \dagger -Abbildungen gibt unter der zusätzlichen Forderung, daß die stark abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{m}}$ von \mathfrak{m} gleich \mathbf{M} ist. Die normierte $*$ -Algebra \mathbf{M}^1 ist nach Gelfand isomorph der Algebra $C(\Omega)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum Ω , \mathbf{M}^{++} ist damit eingebettet in die Menge \mathbf{Z} der positiven endlich- oder unendlichwertigen Funktionen auf Ω . Es wird nun zu jeder normalen \dagger -Abbildung φ von \mathfrak{m} eine eindeutig bestimmte normale Pseudo- \dagger -Abbildung φ_* von ganz \mathbf{M}^+ in \mathbf{Z} konstruiert, die auf \mathfrak{m}^+ mit φ übereinstimmt und die Eigenschaften hat: Aus $A, A_1 \in \mathbf{M}^+$ folgt $\varphi_*(A + A_1) = \varphi_*(A) + \varphi_*(A_1)$; aus $A \in \mathbf{M}^+$, $\lambda \geq 0$ folgt $\varphi_*(\lambda A) = \lambda \varphi_*(A)$; aus $A \in \mathbf{M}^+$, $U \in \mathbf{M}_v$ folgt $\varphi_*(U A U^{-1}) = \varphi_*(A)$; aus $A \in \mathbf{M}^{++}$, $B \in \mathbf{M}^+$ folgt $\varphi_*(A B) = A \varphi_*(B)$; die Normalität ist entsprechend wie bei \dagger -Abbildungen zu erklären. φ ist treu, wenn φ_* es ist, d. h. aus $A \in \mathbf{M}^+$, $A \neq 0$ stets $\varphi_*(A) \neq 0$ folgt; φ_* heißt wesentlich, wenn $\overline{\mathfrak{m}'} = \mathbf{M}$ ist, \mathfrak{m}' das durch alle $A \in \mathbf{M}^+$ mit beschränktem $\varphi_*(A)$ erzeugte Ideal. Umgekehrt existiert zu jeder normalen Pseudo- \dagger -Abbildung φ eine und nur eine normale \dagger -Abbildung φ_* , die auf dem eben eingeführten Ideal \mathfrak{m}' erklärt ist und auf \mathfrak{m}^+ mit φ zusammenfällt. Es ist stets $(\varphi_*)^* = \varphi$. Umgekehrt gilt für eine normale \dagger -Abbildung $\varphi = (\varphi_*)^*$, wenn φ maximal ist, d. h. keine Fortsetzung von \mathfrak{m} auf ein $\mathfrak{m}' \subset \overline{\mathfrak{m}}$ besitzt. Damit ist die Untersuchung der maximalen normalen \dagger -Abbildungen auf die der normalen Pseudo- \dagger -Abbildungen zurückgeführt. Der Existenzsatz besagt nun, daß normale, treue und wesentliche Pseudo- \dagger -Abbildungen dann und nur dann existieren, wenn $H^{\text{pt}} = 0$ ist, d. h. wenn \mathbf{M} keine rein unendlichen Projektionen besitzt [vgl. (2)]. Ist φ_0 eine solche Pseudo- \dagger -Abbildung, so erhält man alle normalen Pseudo- \dagger -Abbildungen in der Gestalt $\varphi(B) = \varphi_0(B) K$, $K \in \mathbf{Z}$; φ ist dann und nur dann treu bzw. wesentlich, wenn $K(x) > 0$ bzw. $K(x) < +\infty$

auf einer offenen, in Ω überall dichten Teilmenge gilt. Genau entsprechende Resultate gelten für die normalen Spuren auf \mathfrak{m} , d. h. linearen komplexwertigen Funktionen auf \mathfrak{m} mit analogen Eigenschaften wie die \mathfrak{f} -Abbildungen, mit denen sie folgendermaßen zusammenhängen: Es sei $H^{\mathfrak{f}} = 0$, $\Phi(A) = A^{\mathfrak{f}}$ eine normale, treue und wesentliche Pseudo- \mathfrak{f} -Abbildung, ψ ein Pseudomaß auf Ω ; durchläuft $g(\chi)$ alle Funktionen aus \mathbf{Z} , so erhält man alle normalen Pseudospuren auf \mathbf{M}^+ in der Form $\varphi(A) = \int_{\Omega} g(\chi) A^{\mathfrak{f}}(\chi) d\psi(\chi)$. Setzt man für die zu \mathbf{M} gehörigen invarianten

linearen Teilräume $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ $D(\mathfrak{M}) = \varphi(P_{\mathfrak{M}})$, $P_{\mathfrak{M}}$ die zu \mathfrak{M} gehörige Projektion, so erhält man eine normale Pseudo- w -Funktion auf $\widetilde{\mathbf{M}}$ mit den Eigenschaften: $0 \leq D(\mathfrak{M}) \leq +\infty$; ist $U \in \mathbf{M}_G$, so ist $D(U(\mathfrak{M})) = D(\mathfrak{M})$; sind die \mathfrak{M}_i paarweise orthogonal, so gilt $D(\oplus \mathfrak{M}_i) = \Sigma D(\mathfrak{M}_i)$. Diese Pseudo- w -Funktionen stehen im selben Zusammenhang mit den maximalen normalen w -Funktionen (Gewichtsfunktionen von v. Neumann), wie die Pseudo- \mathfrak{f} -Abbildungen mit den \mathfrak{f} -Abbildungen; für eine normale w -Funktion wird schärfer $D(\mathfrak{M}) < +\infty$ verlangt, dafür braucht sie auch nur auf einem Ideal in $\widetilde{\mathbf{M}}$ erklärt zu sein.

G. Köthe.

Vermes, P.: Non-associative rings of infinite matrices. Indagationes math. 14, 245—252 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 245—252 (1952).

Im Anschluß an zwei Beispiele von M. Tropper (dies. Zbl. 43, 111) bzw. dem Ref. (dies. Zbl. 43, 324) werden weitere Beispiele unendlicher Matrizen mit unendlich vielen zweiseitigen Reziproken angegeben, ferner wird ein nichtassoziativer Ring unendlicher Matrizen gebildet, in dem die bei der Produktbildung auftretenden

Summen $\sum_{n=0}^{\infty} a_{in} b_{nk}$ stets absolut konvergieren.

G. Köthe.

Wintner, Aurel: On the logarithms of bounded matrices. Amer. J. Math. 74, 360—364 (1952).

A sei eine beschränkte unendliche Matrix, $\text{sp}(A)$ die Menge aller λ , für die $\lambda I - A$ keine beiderseitige beschränkte Reziproke besitzt. $A_n, n = 0, 1, 2, \dots$, seien die Komponenten des offenen Komplements von $\text{sp}(A)$. Zu jedem A_n existiert eine beschränkte, nichtsinguläre, mit A vertauschbare Matrix C_n , so daß für alle $\lambda \in A_n$ gilt $\lambda I - A = C_n \exp A_{\lambda}$, A_{λ} beschränkt, mit A vertauschbar und stetig von λ abhängig. Für die λ der unbeschränkten Komponente A_0 besitzt $\lambda I - A$ sogar einen beschränkten Logarithmus, d. h. es gibt stets ein C_{λ} mit $\lambda I - A = \exp C_{\lambda}$. Speziell hat jedes vollstetige A einen beschränkten vollstetigen Logarithmus für jedes λ , das nicht in $\text{sp}(A)$ liegt.

G. Köthe.

Zeller, K.: Verallgemeinerte Matrixtransformationen. Math. Z. 56, 18—20 (1952).

The A_{nk} are continuous linear operators on a B -space \mathfrak{E} into a B -space \mathfrak{F} , and a sequence $z_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} x_k$ of linear transformations is considered, where $x_k \in \mathfrak{E}$ and $z_n \in \mathfrak{F}$. Convergence is convergence with respect to the norm of the space. A. Robinson (this Zbl. 39, 62) and H. Melvin-Melvin (this Zbl. 42, 125) have generalized, for such z_n , the classical result of Toeplitz for ordinary matrix transformations. The author obtains their results by a simple application of two standard theorems of Banach on linear continuous operators [S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932, this Zbl. 5, 209; Chapter V, Theorems 3 and 5 of the book].

W. W. Rogosinski.

Fuglede, Bent and Richard V. Kadison: Determinant theory in finite factors. Ann. of Math., II. Ser. 55, 520—530 (1952).

Démonstrations détaillées de résultats annoncés antérieurement, et résumés au Zbl. 43, 328. Dans ce résumé, le lemme suivant, qui semble digne d'intérêt, n'a pas été mentionné: soient M un facteur de type II_1 , $f(\lambda)$ une fonction holomorphe dans un domaine \mathcal{A} , $t \rightarrow X(t)$ une application différentiable de $[0, 1]$ dans M , telle que le spectre de chaque $X(t)$ soit contenu dans \mathcal{A} . Alors, $f[X(t)]$ est différentiable en t , et $\text{Tr} \{df[X(t)]/dt\} = \text{Tr} \{g[X(t)] \cdot X'(t)\}$, où $g(\lambda) = df(\lambda)/d\lambda$ (moyennant quelques hypothèses de régularité à la frontière de \mathcal{A}).

J. Dixmier.

Block, H. D.: Linear transformations on or onto a Banach space. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 126—128 (1952).

The following theorem states a simple property of (not necessarily bounded) linear transformations whose domain is a Banach space. Theorem. Let T be a linear transformation from a Banach space X onto a normed vector space Y . Then there is a number $m > 0$ such that for any $x \in X$ there exists a sequence $x_n \rightarrow x$ with $\|T(x_n)\| \leq m \|x\|$ and such that $T(x_n)$ is a Cauchy-sequence. The closed graph theorem is an immediate corollary. — A similar theorem holds for linear transformations T from a normed vector space X onto a Banach space Y .

W. W. Rogosinski.

Heinz, Erhard: Ein v. Neumannscher Satz über beschränkte Operatoren im Hilbertschen Raum, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. **1952**, 5—6 (1952).

Soient A un opérateur linéaire borné d'un espace de Hilbert H , avec $\|A\| < 1$, $f(z)$ une fonction analytique de partie réelle non-négative: $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$, pour $|z| < 1$. En utilisant l'intégrale de Poisson, l'A. démontre l'inégalité $\operatorname{Re}(f(A)\varphi, \varphi) \geq 0$ pour tout $\varphi \in H$. Il en déduit le résultat de J. v. Neumann (cf. Zbl. **42**, 123): Si $f(z)$ est une fonction analytique et telle que $|f(z)| \leq 1$ pour $|z| < 1$, alors $\|f(A)\| \leq 1$ pour tout opérateur linéaire borné telle que $\|A\| < 1$.

A. Pereira Gomes.

Smith, Kennan-T.: Sur le théorème spectral. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1024—1025 (1952).

Variante des démonstrations classiques du théorème spectral. Pour un opérateur auto-adjoint borné T dans un espace de Hilbert H , on pose $u(p) = p(T)$ pour tout polynôme p , et l'application linéaire u du sous-espace des polynômes [dans l'espace $C(R)$ des fonctions continues sur les réels, muni de la topologie de la convergence compacte], dans l'espace $L(H)$ des opérateurs muni de la topologie uniforme, est continue, donc se prolonge à $C(R)$ tout entier. Si en outre on munit $L(H)$ de la topologie faible, u est a fortiori continue, et sa bitransposée u'' [définie dans le bidual C'' de $C(R)$] applique C'' dans $L(H)$; ceci donne aussitôt la décomposition spectrale de T , en considérant les valeurs de u'' pour les fonctions caractéristiques d'intervalles, qui sont dans C'' . — Si maintenant T est auto-adjoint non borné, en utilisant la décomposition spectrale de l'opérateur borné $S = 1/(1 + T^2)$, on montre qu'il existe une suite croissante (H_n) de sous-espaces fermés de H , dont chacun est stable par T , et dont la réunion E est dense dans H . On peut alors recommencer le raisonnement précédent en remplaçant $L(H)$ par $L(E)$, l'espace E étant considéré comme limite inductive de la suite (H_n) .

J. Dieudonné.

Wermer, John: On invariant subspaces of normal operators. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 270—277 (1952).

L'A. pose le problème suivant: A quelles conditions tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel topologique B , invariant pour un opérateur linéaire borné T possédant un ensemble fondamental de vecteurs propres, contient-il un ensemble de vecteurs propres qui l'engendre? La propriété sera dite de „synthèse spectrale“ (propriété (S)). Après avoir remarqué que si B est à un nombre fini de dimensions, (S) a lieu pour tous les opérateurs dont les vecteurs propres engendrent B , l'A. étudie le cas des opérateurs normaux d'un espace de Hilbert et montre: (Th. 1) que (S) est équivalente à chacune des trois conditions suivantes: (i) Tout sous-espace fermé invariant contient au moins un vecteur propre. (ii) Tout sous-espace fermé invariant est aussi invariant pour T^* . (iii) Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots$ sont les valeurs propres distinctes

de T , alors $0 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n \omega_i$, $n \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i| < \infty$ entraînent $\omega_i = 0$, $i = 1, 2, \dots$. Il en déduit que: (Th. 2) Si on se donne la suite de nombres réels $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_i < \dots < r$ et si Γ_i est le cercle $|z| = r_i$ dans le plan complexe, il existe un opérateur normal ayant ses valeurs propres sur les Γ_i et ne possédant pas (S) . (Th. 3) (S) a lieu si toutes les valeurs propres se trouvent sur une courbe de Jordan du plan complexe. (Th. 4) (S) a lieu s'il n'existe aucune sous-suite λ_{n_i} de valeurs propres telle que $|\lambda_{n_1}| < |\lambda_{n_2}| < \dots < |\lambda_{n_i}| < \dots$. (Th. 5) S'il existe une suite de polynômes P_n , telle que $P_n(T)$ converge faiblement vers T^* , alors (S) a lieu. La

réci-proque est fausse en général, mais on a: Si un opérateur unitaire U possède un ensemble fondamental de vecteurs propres, il existe une suite de polynômes P_n telle que $P_n(U)$ converge fortement vers U^* . — Pour des opérateurs normaux quelconques, l'A. définit la propriété (P): „Tout sous-espace fermé invariant pour T , l'est aussi pour T^* “ [(S) et (P) sont équivalentes si T a un ensemble fondamental de vecteurs propres (Th. 1)]. Il démontre: Si le spectre de T ne sépare pas le plan et n'a pas d'intérieur, (P) a lieu. Enfin, introduisant la définition suivante: m étant une fonction d'ensemble définie sur les boréliens S du plan, $E(S)$ le projecteur associé à S par la représentation spectrale de T , on écrira $m \lesssim T$, si $E(S) = 0$ pour un S , entraîne $m(S) = 0$, l'A. établit les théorèmes suivants: 1. Soit d un disque circulaire contenu dans le spectre de T et m la mesure qui attribue à tout S la mesure de Lebesgue de $S \cap d$; si $m \gtrsim T$, alors (P) n'a pas lieu. 2. Si le spectre de T est situé sur une courbe fermée rectifiable Γ limitant un domaine simplement connexe et si m est la mesure qui est nulle hors de Γ et attribue sa longueur à chaque arc de Γ , alors P n'a pas lieu si et seulement si $m \gtrsim T$. A. Revuz.

Vajnberg, M. M.: Über freibleibende Richtungen einiger vollstetiger Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 785—788 (1952) [Russisch].

L'A. donne une nouvelle démonstration de l'existence des éléments propres pour les opérateurs complètement continus non linéaires. Il établit le théorème suivant: Soit $F(x)$ un opérateur complètement continu défini sur la frontière ω' d'un ensemble ω , ouvert, borné et convexe dans un espace de Banach à un nombre infini de dimensions ($0 \in \omega'$). Si $\|F(x)\| \geq a > 0$ sur ω' , alors l'équation $F(x) = \lambda x$ a au moins une solution $x_0 \in \omega'$, correspondant à une valeur positive de λ . L'idée de la démonstration est l'extension de F sur $\bar{\omega} = \omega \cup \omega'$. — Les conditions imposées à l'opérateur $F(x)$ sont élargies de la manière suivante: on suppose que $F(x)$ est limite uniforme sur ω' d'une suite d'opérateurs $\{F_n(x)\}$, qui remplissent les conditions: $\|F_n(x)\| \geq a_n > 0$ sur ω' ; $\|F_n(x_n)\| \geq m > 0$ où x_n désigne un élément à direction invariante de F_n (dont l'existence est assurée par le théorème précédent) et m est indépendant de n . — Ces résultats sont appliqués aux équations intégrales de la forme

$$\lambda u(x) = F(u) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \int \cdots \int K_i(x, y_1, \dots, y_i) g_i[u(y_1), \dots, u(y_i); y_1, \dots, y_n] dy_1 \cdots dy_n.$$

G. Marinescu.

Vajnberg, M. M.: Über einige Variationsprinzipie in der Theorie der Operatorgleichungen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 2 (48), 197—200 (1952) [Russisch].

On établit deux conséquences du théorème suivant de L. A. Lusternik (ce Zbl. 11, 74). Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctionnelles réelles définies sur un espace de Banach E et différentiables au point x_0 . Alors, si $f(x)$ atteint au point x_0 son extremum relativement à la variété $\varphi(x) = \varphi(x_0) = C$, on a

$$\text{grad } f(x_0) = \mu \text{ grad } \varphi(x_0) \quad (\text{si } \|\text{grad } \varphi(x_0)\| > 0),$$

où μ est un nombre réel. La première conséquence est le théorème suivant: Si $F(x)$ est un opérateur potentiel compact dans la sphère $\|x\| \leq r$ d'un espace hilbertien réel, alors il existe dans cette sphère au moins deux solutions de l'équation $\mu x = F(x)$ (μ réel). (Voir aussi E. Rothe, ce Zbl. 31, 216.) A l'aide de ce théorème on démontre un théorème de M. Golomb (ce Zbl. 9, 312). Si dans l'espace hilbertien réel H sont définis l'opérateur $F(x) = \text{grad } f(x)$ et l'opérateur complètement continu et self-adjoint Ax , alors l'équation $x = A^2 F(x)$ admet dans chaque sphère $\|x\| \leq r$ de H au moins deux solutions (μ réel).

G. Marinescu.

Chalilov, Z. I.: Das Cauchysche Problem für eine Operatorgleichung mit partiellen Ableitungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 959—962 (1952) [Russisch].

Chalilov, Z. I.: Das Cauchysche Problem für ein unendliches System von partiellen Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 229—232 (1952) [Russisch].

The equation considered is (1) $du/dt = \sum A_\lambda(t) D_\lambda u + f$ where the sum is finite, D_λ a derivation with respect to certain real variables x_1, \dots, x_n , $u = u(t, x)$

and $f = f(t, x)$ are elements of a Banach space B and defined for all x and $0 \leq t \leq T$, and $A_\lambda(t)$ are linear operators on B depending on t . By means of a Fourier transformation, Cauchy's problem for (1) is reduced to the problem of finding a linear operator $V = V(t, \alpha)$ satisfying (2) $dV/dt = \sum A_\lambda(t) \lambda(i\alpha) V$ and $V(0, \alpha) = 1$ [$\lambda(i\alpha) = (i\alpha_1)^{k_1} \cdots$ if $D_\lambda = (\partial/\partial x_1^{k_1}) \cdots$]. A boundedness condition for (2) then gives a necessary and sufficient condition that Cauchy's problem for (1) be correctly set. When B is finite dimensional, the theory is due to I. G. Petrowsky (this Zbl. 24, 37). Another extension of this theory has been given by L. Schwartz (this Zbl. 42, 331).

L. Gårding.

Zaanen, A. C.: Integral transformations and their resolvents in Orlicz and Lebesgue spaces. *Compositio math.* **10**, 56—94 (1952).

Von den Banachschen Räumen L_p, L_q ($p^{-1} + q^{-1} = 1$) gelangt man zu allgemeineren Orliczschen Räumen, wenn man die Funktion u^p bzw. u^q durch gewisse monoton steigende nach oben konvexe Funktionen $\varphi(u), \psi(u)$ ersetzt. Auch eine Norm $\|f\|_\varphi$ bzw. $\|f\|_\psi$ läßt sich definieren, durch welche die Räume zu vollständigen Banachschen Räumen werden. Sei Δ ein gewisser linearer Bereich. Dann betrachtet Verf. Transformationen $\int_\Delta T(x, y) f(y) dy$, wo $T(x, y)$ meßbar und $T(x, y) f(y) g(x)$ über $\Delta \times \Delta$ summierbar ist für alle $f \in L_\varphi$ und $g \in L_\psi$. Es wird gezeigt, daß die $T(x, y)$ einen vollständigen Banachraum $L_{\varphi\psi}$ bilden mit der Norm $\|T\|_{\varphi\psi} = \text{ob. Grenze von } \int_{\Delta \times \Delta} |T(x, y) f(y) g(x)| dx dy \text{ für } \int_\Delta \varphi(|f|) dy \leq 1 \text{ und } \int_\Delta \psi(|g|) dx \leq 1$.

Weiterhin wird noch die Norm $\|T\|_\varphi$ eingeführt durch $\|T\|_\varphi = \|t(x)\|_\varphi, t(x) = \|T(x, y)\|_\psi = \|T_x(y)\|_\psi$. Es ist $\|T\|_{\varphi\psi} \leq \|T\|_\varphi$. Die Transformation T ist beschränkt als Transformation von L_φ in L_ψ . Beschränktheit der größeren Norm $\|T\|_\varphi$ zieht sogar Vollstetigkeit von T oder T^2 nach sich, falls $\varphi(2u) \leq M\varphi(u)$. Bezeichnet H_λ den lösenden Kern der Integralgleichung $f - \mu T f = g$, d. h. gilt $f = g + \mu H_\lambda g$, falls $\lambda \neq 0$ ist und nicht zum Punktspektrum gehört, so kann bislang $H_\lambda \in L_{\varphi\psi}$ nur für große $|\lambda|$ behauptet werden. Ist aber $\|T^n\|_\varphi < \infty$ und $\varphi(2u) \leq M\varphi(u)$, so gilt $H_\lambda = T + \mu T^2 + \cdots + \mu^{n-2} T^{n-1} + \mu^{n-1} K_\lambda$, wo $\|K_\lambda\|_\varphi < \infty$. Schließlich kann die klassische Darstellung von H_λ als Quotient zweier ganzer Funktionen behauptet werden, wenn außer $\|T\|_\varphi < \infty$ noch $\|T^*\|_\varphi < \infty$ gilt, wo T^* die Transponierte von T ist.

G. L. Tautz.

Lišić, M. S.: Über die Reduktion linearer nicht-selbstadjungierter Operatoren auf Dreiecksform. *Uspechi mat. Nauk* **7**, Nr. 3, 110—112 (1952) [Russisch].

Lišić, M. S.: Über die Reduktion linearer nicht-Hermitescher Operatoren auf die „Dreiecksform“. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **84**, 873—876 (1952) [Russisch].

Lišić, M. S.: Über die Resolvente eines linearen asymmetrischen Operators. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **84**, 1131—1134 (1952) [Russisch].

L'A. considère un espace H construit de la manière suivante: Si \mathfrak{H}_r est l'espace euclidien à r dimensions pour $r < \infty$ et l'espace l^2 pour $r = \infty$, on désigne par H_I (resp. H_{II}) l'espace des fonctions („de carré sommable“) $f(k)$ ($k = 1, 2, \dots$), (resp. $f(x)$ ($0 \leq x \leq l$)) avec les valeurs dans \mathfrak{H}_r ; H est la somme directe $H = H_I \oplus H_{II}$ avec le produit scalaire

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f(k), g^*(k)) + \int_0^l (f(x), g^*(x)) dx.$$

Dans H on définit un opérateur $A f = g$ par

$$g(k) = f(k) [\alpha(k) + \frac{1}{2} i \beta(k) J \beta(k)] + i \sum_{j=k+1}^{\infty} f(j) \beta(j) J \beta(k) + i \int_0^l f(t) \beta(t) J \beta(k) dt,$$

$$g(x) = \alpha(x) f(x) + i \int_x^l f(t) \beta(t) J \beta(x) dt,$$

où $\alpha(k), \alpha(x)$ sont des fonctions réelles, $\beta(k), \beta(x)$ des matrices d'ordre r , satisfaisant à certaines conditions et $J = (\pm \delta_{kj})$. Soit maintenant \bar{A} un opérateur linéaire défini dans un espace hilbertien \mathfrak{H} . \bar{A} est dit de la classe (i, Ω) si sa partie imaginaire $\text{Im } \bar{A} = \frac{1}{2i} (\bar{A} - \bar{A}^*)$ est complètement continue et si la somme des modules des valeurs propres de $\text{Im } \bar{A}$ est convergente.

Le résultat principal énoncé par l'auteur est le suivant: Pour tout opérateur \bar{A} de la classe $(i\Omega)$ il existe un „modèle“ A de la forme décrite ci-dessus et un opérateur unitaire U , tels que $A = U\bar{A}U^*$. — Le nombre r qui intervient dans la construction de l'espace H correspondant est le nombre des dimensions de l'espace $\text{Im } \bar{A}(5)$. On en déduit que pour tout opérateur de la classe $(i\Omega)$ il existe un système d'équations aux différences finies et différentielles dont la solution permet de construire la résolvante de l'opérateur \bar{A} . *G. Marinescu.*

Pastidès, Nicolas: Sur une généralisation de l'équation fonctionnelle de Schroeder-Koenigs. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2417—2418 (1952).

L'équation fonctionnelle considérée ici s'écrit

$$F[f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)] = s F(x_1, \dots, x_n),$$

où F est la fonction inconnue et les fonctions données f_1, \dots, f_n sont supposées analytiques et nulles à l'origine. L'A. démontre l'existence d'une solution analytique à l'origine sans aucune restriction sur le module $|s|$ mais en supposant la normalité de la famille formée des fonctions itérées

$$f_i^n(x_1, \dots, x_n) = f_i^{n-1}(f_1, \dots, f_n) \quad [n = 1, 2, \dots; f_i^0 = x_i].$$

M. Hukuhara.

Temple, G.: La théorie de la convergence généralisée et des fonctions généralisées et leurs applications à la physique mathématique. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **11**, 111—122 (1952).

L'A. expose quelques éléments de la théorie des distributions de Schwartz en donnant un nom nouveau à quelques notions; puis il en fait des applications d'ailleurs aussi à peu près connues. Il introduit essentiellement sous le nom de convergence généralisée d'une suite de fonctions bornées sommables ce qui est la convergence au sens des distributions; et il se sert de dérivations et intégrations généralisées analogues. Applications signalées à la transformation de Fourier, au potentiel, au potentiel de vitesse supersonique. *M. Brelot.*

Kurth, Rudolf: Zum Ergodenproblem. Z. angew. Math. Phys. **3**, 232—235 (1952).

The following remark is given to Birkhoff's ergodic theorem. Let J be an measurable invariant set with finite measure of the phase space of a given mechanical system, and let the point $x \in J$ be transferred to the point $x(t)$ at the time moment t . Let $f(x)$ be square integrable in J and put $f^*(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t f(x(t)) dt$, $f = \int_J f(x) dx$. Then $\overline{f^*} = \overline{f}$, $\overline{(f^* - \overline{f^*})^2} \geq \overline{(f - \overline{f})^2}$ and the equality holds at least for time independent $f(x)$. *K. Yosida.*

Praktische Analysis:

Michkovitch, V. V.: Résolution des systèmes d'équations linéaires algébriques à l'aide des cracoviens. Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova, mat. Inst. **18**, Nr. 2, 53—70 und französ. Zusammenfassg. 70 (1952) [Serbisch].

Après un exposé des définitions et règles fondamentales du calcul avec des cracoviens, on a développé la méthode de résolution d'un système d'équations linéaires à l'aide des cracoviens et appliqué cette dernière à un exemple numérique. *Autoreferat.*

Angelitch, Tatimir: Résolution des systèmes d'équations linéaires algébriques par la méthode de Banachiewicz. Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova, mat. Inst. **18**, Nr. 2, 71—92 und französ. Zusammenfassg. 92 (1952) [Serbisch].

Ce travail est un exposé des résultats les plus récents concernant la théorie et la pratique de la résolution des systèmes d'équations linéaires algébriques par la méthode des matrices en utilisant le schéma de Banachiewicz. On y montre comment on peut, d'après Zurmühl (ce Zbl. **31**, 315), développer et appliquer les résultats obtenus par Banachiewicz sans recours aux cracoviens. — Enfin, dans le cas d'un système d'équations dont la matrice des coefficients est symétrique, décomposable en deux matrices triangulaires d'après la formule $(a_{ik}) - (c_{ik})(b_{ik})$, où $c_{ik} = 0$ pour $i < k$, $b_{ik} = 0$ pour $i > k$, $b_{ii} = -1$, on donne une nouvelle démonstration très simple du fait qu'on a toujours $b_{ij} = -c_{ji}/c_{ii}$. *Autoreferat.*

Kašanin, R.: *Interprétation géométrique du schéma de Banachiewicz.* Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova, mat. Inst. 18, Nr. 2, 93—95 und französ. Zusammenfassg. 96 (1952) [Serbisch].

On donne du schéma de Banachiewicz pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires l'interprétation géométrique sous forme de deux transformations successives de coordonnées, dans trois systèmes de coordonnées. *Autoreferat.*

Forsythe, George E.: *Alternative derivations of Fox's escalator formulae for latent roots.* Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 191—195 (1952).

Verf. ergänzt und vereinfacht die Matrizenherleitungen von Fox (dies. Zbl. 46, 128), ohne direkt die praktische Arbeit des Rechners abzukürzen. Die Fox-schen Formeln erweisen sich als Spezialfälle gewisser Sätze über die Untermatrizen einer Matrix, wobei statt $\sum_{r=1}^m \frac{x_r y'_r}{\mu_r - \lambda}$ der Ausdruck $(A_{11} - \lambda B_{11}) - 1$ verwendet wird. *R. Ludwig.*

Rostovcev, N. A.: *Über die Lösung durch Iteration von Gleichungen ungeraden Grades mit positiven Koeffizienten.* Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 3 (49), 135—138 (1952) [Russisch].

Verf. betrachtet Iterationen der Gestalt $x_{v+1} = \left[\sum_{i=0}^n a_i x_v^{2(n-i)} \right] / \left[\sum_{i=0}^n b_i x_v^{2(n-i)} \right]$ mit positiven a_i, b_i , die den Bedingungen $1 \geq a_0/b_0 > a_1/b_1 > \dots > a_n/b_n$ genügen, und zeigt, daß die Folge der x_v konvergiert, und zwar: monoton ansteigend für $x_0 = 0$, monoton fallend für $x_0 = 1$. Demgemäß wird die Gleichung ungeraden Grades $\sum_{i=0}^{2n+1} A_i z^{2n+1-i} = 0$ ($A_0 = 1$)

mit den positiven Koeffizienten A_i , die den Bedingungen $A_1 > A_3/A_2 > \dots > A_{2n+1}/A_{2n}$ genügen, gelöst durch $z = -A_1 \lim_{v \rightarrow \infty} x_v$, wobei

$$x_{v+1} = \left[\sum_{i=0}^n a_{2i+1} x_v^{2(n-i)} \right] / \left[\sum_{i=0}^n a_{2i} x_v^{2(n-i)} \right], \quad a_0 = a_1 = 1, \quad a_k = \frac{A_k}{A_1^k} \quad (k > 1)$$

zu setzen ist. Dies ist eine Verallgemeinerung eines Resultates von Teodorčik für Gleichungen dritten Grades [Akad. Nauk SSSR, Žurn. techn. Fiz. 19, 231—234 (1949)]. *H. Schwerdtfeger.*

Stiefel, Eduard: *Über einige Methoden der Relaxationsrechnung.* Z. angew. Math. Phys. 3, 1—33 (1952).

Der Grundgedanke des intuitiven Relaxierens wird an Hand eines linearen Gleichungssystems erläutert, das sich aus der Dirichletschen Randwertaufgabe der Differenzenrechnung für ein quadratisches Grundgebiet ergibt. Hauptsächlich im Hinblick auf das Rechnen mit programmgesteuerten Ziffernmaschinen werden sodann Verfahren entwickelt, bei denen die Relaxationskorrekturen zwangsläufig innerhalb gegebener Vektormannigfaltigkeiten erfolgen und durch Minimieren quadratischer Formen bestimmt werden. Das Phänomen des Käfigs wird erläutert; Methoden zu seiner Auflösung, wie Block- und Scheibenrelaxation, werden beschrieben. Im Hinblick auf das Maschinenrechnen erfährt die Methode des stärksten Abstiegs besondere Beachtung. Bei ihr erfolgen die Korrekturen in Richtung vorgegebener Vektoren, wobei der neue Residuenvektor orthogonal zum alten steht. Ein „n-Schritt-Verfahren“, bei welchem die gesuchte Lösung nach endlich vielen Schritten erreicht wird, und Fehlerbetrachtungen, die eine Beziehung zum Rayleighschen Quotienten herstellen, schließen die Arbeit ab. Mit ihr werden tieferliegende Ergebnisse des Relaxierens zum erstenmal in deutscher Sprache dargestellt. Damit ist ein wichtiger Schritt zur Verbreitung des Relaxierens getan. *H. Bückner.*

Weissinger, Johannes: *Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens.* Math. Nachr. 8, 193—212 (1952).

Für den Fixpunktsatz in der Theorie des Iterationsverfahrens wird unter Zugrundelegung eines allgemeinen Betragsbegriffes eine für die verschiedenartigsten Anwendungen sehr geeignete

Formulierung gegeben. Es wird so ein abstrakter Satz aufgestellt, der einerseits leicht beweisbar, andererseits aber so allgemein ist, daß sein Beweis geeignet erscheint, eine Reihe bisher üblicher Beweise für klassische Sätze ersetzen zu können. Gegeben sei ein metrischer Raum Ω mit Elementen ξ, η, ζ, \dots , für die ein Abstand $|\xi, \eta|$ mit den üblichen Abstandseigenschaften definiert ist; $\xi - \lim_{\nu \rightarrow \infty} \xi_\nu$ soll gleichbedeutend mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\xi, \xi_\nu| = 0$ sein, und Ω soll vollständig

sein, d. h. $\lim_{\nu, \mu \rightarrow \infty} |\xi_\nu, \xi_\mu| = 0$ für eine Punktfolge ξ_ν soll gleichbedeutend mit der Existenz eines

Grenzpunktes $\xi = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \xi_\nu$ sein. T sei eine Abbildung von Ω in sich. $\{T\}$ sei die von T erzeugte

Halbgruppe der Potenzen T_ν ($\nu = 1, 2, \dots$). Es heißt $|T|$ ein Betrag von T , falls $|T\xi, T\eta| \leq |T| |\xi, \eta|$ für beliebige ξ, η gilt. Ist für alle Potenzen T, T^2, \dots ein Betrag gegeben, so wird gesagt, auf $\{T\}$ sei ein Betrag definiert. Dann gilt der allgemeine Fixpunktsatz: Ist auf $\{T\}$

ein Betrag so definiert, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} |T^\nu|$ konvergiert, so konvergiert die Punktfolge $\xi_\nu = T^\nu \xi_0$

($\nu = 1, 2, \dots$) unabhängig von dem beliebig wählbaren Anfangspunkt ξ_0 stets gegen den gleichen Punkt ξ . Dieser ist die einzige Lösung von $\xi = T\xi$, und es gilt die Fehlerabschätzung

$$|\xi, \xi_\nu| \leq s_{\nu-k} |\xi_{k+1}, \xi_k| \quad \text{mit} \quad s_\nu = \sum_{q=\nu}^{\infty} |T^q|, \quad 0 \leq k < \nu.$$

Dieser Fixpunktsatz wird in § 2 bis § 7 auf verschiedene Fälle angewendet. In § 2 ergeben sich bei linearen Gleichungssystemen zunächst für das Iterationsverfahren in Gesamtschritten je nach Zugrundelegung geeigneter Betragsdefinitionen verschiedene bekannte hinreichende Konvergenzkriterien (Zeilen-, Spaltensummen-, E. Schmidtsches Kriterium) mit zugehörigen Fehlerabschätzungen und nach einigen Zwischenrechnungen auch für das Einzelschritt-

verfahren. § 3 behandelt Integralgleichungen $\varphi(x) = f(x) + \int_0^1 K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi \equiv T\varphi$; alle vor-

kommenden Funktionen seien stetig (aber auch quadratisch integrierbar f und K sind erfaßbar). Das Gesamtschrittverfahren liefert die Neumannsche Reihe; Weinsteinsches und E. Schmidtsches Kriterium ergeben sich zwanglos; auch die Sätze über das Einzelschrittverfahren lassen sich übertragen. In § 4 wird das alternierende Verfahren von H. A. Schwarz zur Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie der hier gegebenen Theorie eingeordnet. Bei einem nichtlinearen Gleichungssystem in § 5 $y_j = f_j(y_1, \dots, y_n)$ (für $j = 1, \dots, n$) oder kurz in Vektorform $\eta = f(\eta)$ genüge f im Bereich $B: |\eta, \eta_0| \leq b$ einer Lipschitzbedingung $|f(\eta), f(\eta^*)| \leq K |\eta, \eta^*|$ mit $K < 1$; ist $|f(\eta_0), \eta_0| \leq (1-K)b$, so hat $\eta = f(\eta)$ in B genau eine Lösung η , die durch Iteration $\eta_{\nu+1} = f(\eta_\nu)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) berechnet werden kann (mit Angabe einer Fehlerabschätzung). In § 6 wird der klassische Hauptsatz über implizite Funktionen aus dem allgemeinen Fixpunktsatz hergeleitet; § 7 bringt einen sehr einfachen Beweis des Picard-Lindelöfschen Existenz- und Eindeigkeitssatzes für die Lösung der Anfangswertaufgabe für Systeme von Differentialgleichungen $y'_j = f_j(x, y_1, \dots, y_n)$, ($j = 1, 2, \dots, n$) oder kurz $\eta' = f(x, \eta)$ und $\eta(x_0) = \eta_0$. Durch Betrachtung des allgemeineren Systems $\eta' = f(x, \eta, \eta')$ können auch implizite Differentialgleichungen unmittelbar ohne Zurückführung auf explizite Gleichungen behandelt werden.

L. Collatz.

Odqvist, F. K. G.: An expansion of frequency determinants with application to the normal frequencies of a spring mounted rigid body (resilient foundation). Quart. appl. Math. 9, 441—448 (1952).

Verf. stellt ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer Säkulargleichung $\det(A - E x) = 0$ auf und demonstriert dieses am Beispiel der Eigenschwingungen eines auf Federn elastisch gebetteten Fundamentes. Die Wurzeln der Säkulargleichung werden als Potenzreihen eines Hilfsparameters erhalten und für die numerische Rechnung nach den quadratischen Gliedern abgebrochen. Da der Konvergenzkreis dieser Reihen nicht bestimmt wurde, stehen die genauen Voraussetzungen für die Brauchbarkeit dieses Verfahrens noch aus. Die vom Verf. angegebenen Voraussetzungen (lauter verschiedene Eigenwerte und Überwiegen der Diagonalglieder in A) sind nur hinreichend und nicht auch notwendig, wie er selbst an einfachen Beispielen festgestellt hat.

H. Bilharz.

• **Kantorovič, L. V. und V. I. Krylov: Näherungsmethoden der höheren Analysis.** 4. Aufl. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 695 S. R. 17.— [Russisch].

Leider ist auch diese 4. Aufl. ein fast unveränderter Abdruck der 3. Aufl. (dies. Zbl. 40, 215). Im einzelnen gliedert sich das Buch in folgende Kapitel: I. Methoden, denen ein Lösungs-

ansatz in Form einer unendlichen Reihe zugrunde liegt (99 S.); II. Näherungslösungen von Fredholmschen Integralgleichungen (69 S.); III. Gittermethode (79 S.); IV. Variationsmethode (116 S.); V. Konforme Abbildung von Bereichen (190 S.); VI. Verwendung einer konformen Abbildung zur Lösung der Grundaufgaben für kanonische Bereiche (73 S.); VII. Methode von Schwarz (58 S.). — Mit Ausnahme von Kap. V und VI, die eng zusammenhängen, sind alle übrigen Kapitel voneinander unabhängig.

K. Borkmann.

Brock, P. and F. J. Murray: The use of exponential sums in step by step integration. Math. Tables Aids Comput. **6**, 63—78 (1952).

Bei den üblichen Extrapolationsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen ersetzt man ein Integral $\int_t^{t+h} F(\tau) d\tau$ näherungsweise durch $\sum_{k=0}^{n-1} a_k F_k$ [$F_k = F(t - kh)$], wobei die Konstanten a_k so bestimmt sind, daß der Fehler

$$e(t; F) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k F_k - \int_t^{t+h} F(\tau) d\tau$$

für die Funktionen $F(t) = t^v$ ($v = 0, 1, \dots, n-1$) identisch verschwindet. Hier dagegen werden die a_k so gewählt, daß $e(t; e^{v_0 t}) = 0$ ist für n paarweise verschiedene (komplexe) Zahlen v_i ($i = 1, \dots, n$). Setzt man mit beliebigem v_0

$$y_i = e^{-v_i h} - 1 \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad S_{k,n+1} = \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k} y_0^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}$$

und ist $Y = \max_{0 \leq i \leq n} |y_i| < 1$, so gilt

$$e(t; e^{v_0 t}) = h e^{v_0 t} \sum_{k=0}^{\infty} A_{n+k} S_{k,n+1} \prod_{i=1}^n (y_0 - y_i)$$

mit

$$A_m = \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^1 r(r+1) \dots (r+m-1) dr,$$

woraus insbesondere die Fehlerschranke

$$|e(t; e^{v_0 t})| \leq h |e^{v_0 t}| \cdot |A_n| (1-Y)^{-n-1} \prod_{i=1}^n |y_0 - y_i|$$

folgt. Auch für beliebiges stetiges $\sigma(t)$ wird eine Fehlerdarstellung hergeleitet, aus der sich

$$|e(t; \sigma)| \leq h \left\{ 2^n + \frac{(Y+1)^n - 1}{(1-Y)^n} (2^n - 1) \right\} \max |\sigma(t)|$$

ergibt. Ähnliche Formeln werden für die Methode der „geschlossenen“ Integration (entsprechend den Interpolationsverfahren) aufgestellt. Auch die nötigen Modifikationen bei nichtverschiedenen v_i werden angegeben, wodurch die übliche Integrationsmethode mit Hilfe von Polynomen als ein Spezialfall mit umfaßt wird. — Die besprochenen Integrationsformeln werden zur Lösung eines Systems von Differentialgleichungen $\dot{z}_i = f_i(z_1, \dots, z_n, t)$ ($i = 1, \dots, n$) vor allem dann empfohlen, wenn die rechten Seiten nach Einsetzen der Lösung sich in der Form $f_i = \sum_j c_{ij} e^{\lambda_j t} + \sigma_i(t)$

mit kleinem $|\sigma_i(t)|$ darstellen lassen. Die obigen v_j wird man dann möglichst in der Nähe der (i. a. zunächst unbekannten) λ_j wählen.

J. Weissinger.

Novožilov, V. V.: Über eine Näherungsmethode zur Lösung von Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen. Priklad. Mat. Mech. **16**, 305—318 (1952) [Russisch].

Il s'agit de résoudre l'équation (*) $L(y) + f(x, y) = F(x)$ dans (a, b) sous des conditions aux limites linéaires, L étant un opérateur différentiel linéaire; on suppose que (*) possède une solution (non nécessairement unique) sous les conditions indiquées et que de plus on sait intégrer exactement l'équation (**) $L(y) = F(x)$. Ceci conduit à chercher des approximations successives par (***) $L(y_k) = F(x) - f(x, y_{k-1})$; en général, on peut s'attendre à ce qu'une des approximations est bonne si elle diffère peu de la précédente; dès lors, prenant pour première approximation une combinaison linéaire de fonctions arbitrairement choisies $y_1 = \sum a_i \varphi_i(x)$, l'A. détermine y_2 par (***) en fonction de x et des a_i , puis il calcule les a_i en imposant une condition de minimum à la différence $y_1 - y_2$, par exemple en imposant que

$\int_a^b [y_1^{(k)} - y_2^{(k)}]^2 dx$ soit minimum pour un k entier positif ou nul. — Cas de la

troisième approximation y_3 . — Cas où on obtient les a_i en posant $y_1 = y_2$ en quelques points de (a, b) . — Trois exemples, où la méthode proposée donne de très bons résultats. *Ch. Blanc.*

Rapoport, I. M.: Eine neue Methode der angenäherten Integration gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 955—958 (1952) [Russisch].

Il s'agit d'une méthode d'itération pour un système différentiel linéaire du premier ordre (*) $X'(t) = A(t)X(t)$, où $A(t)$ est une matrice donnée d'ordre n et $X(t)$ une matrice inconnue définissant un système fondamental d'intégrales avec $X(0) = B$ (dét $B \neq 0$). Les approximations successives sont données à partir de $X_0(t)$ avec $X_0(0) = B$, par

$$(**) \quad X_m(t) = X_0(t) \prod_{k=1}^{k=m} [I + Y_k(t)], \quad \text{avec} \quad Y_{m+1}(t) = \int_0^t \Delta_m(t) dt$$

$\Delta_{m+1}(t) = [I + Y_{m+1}(t)]^{-1} \Delta_m(t) Y_{m+1}(t)$, $\Delta_0(t) = X_0^{-1}(t) [A(t) X_0(t) - X'_0(t)]$; sous certaines conditions de régularité pour A et X_0 , et si les termes de Δ_0 sont suffisamment petits dans $(0, T)$, la suite (**) converge uniformément dans cet intervalle vers la solution de (*) satisfaisant aux conditions initiales. *Ch. Blanc.*

Dungen, F. H. van den: Formules pour l'intégration numérique de l'équation des ondes. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 39—49 (1952).

Für die Anfangswertaufgabe der Wellengleichung

$$\Delta u \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad u = f(x_1, \dots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g(x_1, \dots, x_n) \quad \text{für} \quad t = 0$$

wird in einem Gitter mit der Maschenweite h in allen x_i -Richtungen und der Maschenweite h/c in der t -Richtung ein erweitertes Differenzenverfahren aufgestellt, indem $u(x_1, \dots, x_n, k \cdot h/c)$ in der k -ten Ebene $t = k \cdot h/c$ in eine Taylorsche Reihe bezüglich des Argumentes t entwickelt, diese Reihe nach dem Gliede mit t^{k+1} abgebrochen und die Ableitungen $\partial^{2e} u / \partial t^{2e}$ und $\partial^{2e+1} u / \partial t^{2e+1}$ durch $\Delta^e \cdot f$ und $\Delta^e \cdot g$ ausgedrückt werden. Für $k=1$ und $k=2$ werden die Formeln in den Fällen $n=1$ und $n=2$ explizit angegeben und gezeigt, daß die Näherungen für $h \rightarrow 0$ in die exakten Lösungen übergehen. *L. Collatz.*

Collatz, Lothar: Zur numerischen Bestimmung periodischer Lösungen bei nichtlinearen Schwingungen. Z. angew. Math. Phys. 3, 193—205 (1952).

Bei der nichtlinearen Randwertaufgabe der Bestimmung periodischer Lösungen nichtlinearer Schwingungen führt ein Näherungsansatz mit freien Parametern auf nichtlineare Gleichungssysteme, deren Lösung man iterativ, insbesondere auf dem Wege der Relaxation (systematische Fehlerverkleinerung) durchführen kann. Um die Rechenarbeit in erträglichen Grenzen zu halten, werden gerade hier möglichst genaue Näherungsverfahren gebraucht, die mit einer kleinen Parameterzahl auskommen. Dazu wird insbesondere eine Modifikation des Mehrstellenverfahrens angegeben, die für den Fall $L[x] = N[x^{(l)}, t]$ anwendbar ist, wo L ein linearer Differentialausdruck in x mit konstanten Koeffizienten und N eine beliebige nichtlineare Funktion von t und einer festen Ableitung $x^{(l)}$ ist. Für einige praktisch wichtige Ausdrücke L werden fertige Formeln verschiedener Genauigkeit angegeben und an Zahlenbeispielen erläutert. *R. Zurmühl.*

Collatz, L.: Fehlerabschätzung bei der ersten Randwertaufgabe bei elliptischen Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 32, 202—211 (1952).

Sei \mathfrak{B} ein offenes, beschränktes n -dimensionales Gebiet, dessen Rand Γ eine abgeschlossene, zusammenhängende, stückweise glatte Hyperfläche ist. In $\mathfrak{B} + \Gamma$ seien $a_{jk} = a_{kj}$, b_j , c und r stetige Funktionen von x_1, \dots, x_n , die Matrix (a_{jk}) sei positiv definit und $c \geq 0$. Sei

$$L[u] = - \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c u.$$

Ist dann w eine nichtkonstante, zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion mit dem Maximum M in $\mathfrak{B} + \Gamma$, und ist $L[w] \leq 0$, so wird M (im Fall $c > 0$ unter der zusätzlichen Voraussetzung $M \geq 0$) nur auf Γ angenommen. Ein Analogon gilt für das Minimum. Dieser Satz liefert bequeme und scharfe Fehlerabschätzungen, z. B.: Ist u die exakte Lösung des ersten Randwertproblems $L[u] = r$ in \mathfrak{B} , $u = u$ auf Γ und ist v eine die Differentialgleichung $L[v] = r$ befriedigende Funktion mit Randwerten $v = \bar{v}$, so gilt für die Fehlerfunktion $w = v - u$ in \mathfrak{B} die Abschätzung $\bar{w}_{\min} \leq w \leq \bar{w}_{\max}$, falls die (bekannten) Randwerte $\bar{w} = \bar{v} - \bar{u}$ den Wert 0 annehmen, während andernfalls $|w| \leq |\bar{w}|_{\max}$, $\operatorname{sgn} w = \operatorname{sgn} \bar{w}$ ist. Auch wenn die Näherung die Randbedingungen exakt, die Differentialgleichung nur angenähert befriedigt, läßt sich eine nur wenig kompliziertere Abschätzung angeben, was insbesondere für die Trefftzsche Modifikation des Ritzschen Verfahrens genauer ausgeführt wird. Schließlich wird ein auf eine Idee von v. Mises zurückgehendes, auf sehr allgemeine Randwertprobleme anwendbares Näherungsverfahren, bei dem Differentialgleichung und Randbedingungen gleichzeitig im Sinne einer Methode der kleinsten Quadrate möglichst gut erfüllt werden, geschildert und für den elliptischen Fall eine Fehlerabschätzung mittels des obigen Hilfssatzes gegeben, — die praktische Durchführung der Fehlerabschätzungen wird an Zahlenbeispielen erläutert.

J. Weissinger.

Batschelet, Eduard: Über die numerische Auflösung von Randwertproblemen bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Phys. 3, 165—193 (1952).

Zur Festlegung einer Funktion $v(x, y)$ sei eine elliptische Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + c v = g$$

und auf einer mit stetiger Tangente versehenen doppelpunktfreien Randkurve C die Randbedingung $k(s) \frac{\partial v}{\partial n} - h(s) v = f(s)$ gegeben; s bedeutet die Bogenlänge auf der Randkurve, n die innere Normale; es seien a, b, c, g, k, h, f beschränkte Funktionen und so beschaffen, daß die Randwertaufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, die mit ihren Ableitungen bis zur 4. Ordnung einschließlich innerhalb und auf C stetig ist; ferner sei $c \leq 0$. Der Rand C bestehe aus zwei Teilen C_1 und C_2 , die je endlich viele Teilbögen enthalten können. Es sei $k(s) = 1$, $h(s) \geq 0$ auf C_1 und $k(s) = 0$, $h(s) = 1$ auf C_2 . Ist C_2 leer und $c = 0$, so soll auf wenigstens einem Teilbogen $h(s) > 0$ sein. Zur näherungsweise Lösung mit dem gewöhnlichen Differenzenverfahren wird ein quadratisches Gitter der Maschenweite H verwandt, der Randkurve C ein Gitterrand C' , jedem Randpunkt von C ein Punkt von C' (bei genügend kleinem H) und der Randbedingung eine Gleichung zugeordnet, die die Näherungswerte u in drei inneren Gitterpunkten benutzt. Es wird die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems für die u -Werte bewiesen und nach dem Muster von Gerschgorin [Z. angew. Math. Mech. 10, 373—382 (1930)] der Unterschied $\delta = v - u$ abgeschätzt durch $|\delta(x, y)| \leq H \cdot t(x, y)$, wobei in t Schranken für die Ableitungen von v eingehen. Die Fehlerabschätzung liefert zugleich die Konvergenz des Näherungsverfahrens für $H \rightarrow 0$. Die Lösung des Gleichungssystems für die u -Werte kann oft bequem mit Hilfe der Relaxationsmethode erfolgen, wobei die Residuen (die Abweichungen, welche bei Einsetzen der Näherungen in die Gleichungen überbleiben) jeweils herabgedrückt werden. Es gibt eine Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so daß bei N -maliger Anwendung eines vollen Iterationsschrittes der Betrag aller Residuen sich auf mindestens das θ^N -fache verkleinert hat; die Residuen streben daher gegen Null. Schließlich wird gezeigt, daß das Differenzenverfahren im Sinne von Ostrowski (dies. Zbl. 18, 324) abrundungsfest ist. L. Collatz.

Wagner, Carl: On the numerical evaluation of Fredholm integral equations with the aid of the Liouville-Neumann series. J. Math. Physics 30, 232—234 (1952).

Die Integralgleichung $y(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) y(t) dt + f(s)$ wird nach dem klassischen

Iterationsverfahren behandelt. Die Lösung wird in der Form $y(s) = \sum_{i=0}^{n+1} K_i(s) + R_{n+1}(s)$ mit $K_0(s) = f(s)$ und $K_n(s) = \int_a^b K^{(n)}(s, t) K_{n-1}(t) dt$ dargestellt.

Das Restglied R_{n+1} wird für den Fall, daß die Schwankung von $K(s, t)$ mit Bezug auf t relativ gering ist, näherungsweise gleich

$$\int_a^b K_{n+1}(x) dx \int_a^b K(x, t) dt \left/ \left(b - a - \int_a^b \int_a^b K(s, t) ds dt \right) \right. \approx R_{n+1}$$

gesetzt und zur Korrektur nach dem letzten Iterationsschritt benutzt. Die Methode wird an einem numerischen Beispiel erläutert. H. Bückner.

Štykan, A. B.: Graphische Lösung von Differentialgleichungen mit abweichendem Argument. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 2 (48), 184—191 (1952) [Russisch].

Des équations différentielles à argument retardé ou avancé peuvent facilement s'intégrer graphiquement si la donnée de l'équation ne comporte que des fonctions d'une seule variable, fonctions représentées par des courbes données. Par exemple, les courbes intégrales de $g(x) y'(x) = f[y(x - h(x))]$ se construisent aisément si l'on a tracé au préalable les courbes représentatives des fonctions $g(x)$, $h(x)$ et $f(y)$. Ch. Blanc.

Flügge, S.: Zur numerischen und graphischen Integration von Schwingungsgleichungen. Z. Phys. 133, 449—450 (1952).

Matthieu, P.: Über die Fehlerabschätzung beim Extrapolationsverfahren von Adams. Z. angew. Math. Mech. 32, 235 (1952).

● **Hoelscher, R. P., J. N. Arnold and S. H. Pierce: Graphic aids in engineering computation.** New York: McGraw-Hill Book Company 1952. VIII, 197 p. \$ 4.50.

Nejšuler, L. Ja.: Über die dreigliedrige Separation der Variablen in einer Gleichung mit vier Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 189—192 (1952) [Russisch].

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Gleichung (1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ in die Form (2) $x_q = \varphi_2(\varphi_1(x_i, x_j), x_p)$ (i, j, p, q ist hier wie im folgenden irgendeine Permutation der Indizes 1, 2, 3, 4) gebracht werden kann, wurden von Goursat [Bull. Soc. math. France 27 (1899)] angegeben. Die Funktion (1) ist also äquivalent einem System von zwei Funktionen mit drei Veränderlichen. Verf. nennt die Ersetzung von (1) durch (2) eine zweigliedrige Separation der Variablen. Entsprechend wird eine dreigliedrige Separation der Variablen vorliegen, wenn man (1) durch ein äquivalentes System dreier Gleichungen ersetzt, von denen jede Gleichung drei Veränderliche hat. — Verf. leitet den Satz her: Damit die Gleichung (1) einer gewissen Gleichung $f_2[f_1(x_i, x_j), f_2(x_i, x_p), x_q] = 0$ äquivalent ist, ist notwendig und hinreichend, daß vier Differentialgleichungen 4. Ordnung befriedigt werden:

$$\partial A / \partial x_p = 0, \quad \partial A / \partial x_q = 0, \quad \partial B / \partial x_j = 0, \quad \partial B / \partial x_q = 0,$$

wobei:

$$A = \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} : A_{ijp} \right) \left/ \frac{\partial^2 \ln(A_{ijp})}{\partial x_j \partial x_p} \right., \quad B = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_p} : A_{pji} \right) \left/ \frac{\partial^2 \ln(A_{pji})}{\partial x_j \partial x_p} \right., \quad A_{mn} = \frac{\partial f}{\partial x_m} : \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Bei der zweigliedrigen Separation der Variablen einer Gleichung mit vier Variablen ist es möglich, zusammengesetzte Nomogramme und Tabellen mit doppeltem Eingang zu bilden und (1) nach einer beliebigen der vier Veränderlichen zu lösen. Bei der dreigliedrigen Separation der Gleichung mit vier Variablen, kann man (1) nur nach denjenigen Veränderlichen auflösen, die in der entsprechenden Darstellung für $f(x_1, \dots, x_4)$ nicht unter Zeichen verschiedener Funktionen wiederkehren. Rudolf Ludwig.

Unger, Heinz: Lagrange-Hermiteische Interpolation im Komplexen. Z. angew. Math. Phys. 3, 51—65 (1952).

Will man allzu engmaschige Vertafelungen vermeiden, so benötigt man zur Berechnung einzelner Zwischenwerte von analytischen Funktionen $g(z)$ im Komplexen hochgradige Interpolationsformeln und benutzt am besten die Hermiteische Erweiterung der Lagrangeschen Formeln, zumal die benötigten Ableitungen von $g(z)$ häufig aus Rekursionsformeln oder Differentialgleichungen leicht berechnet werden können. Sind die Werte $g_\mu^{(p)}$ ($p = 0, 1, \dots, q; \mu = 1, 2, \dots, n$) von $g(z)$ und den ersten q Ableitungen an den n verschiedenen Stützstellen z_μ bekannt, so lautet das Hermiteische Interpolationspolynom $P(z) = \sum_{\mu=1}^n \sum_{p=0}^q L_{\mu,p}(z) g_\mu^{(p)}$, wobei die Polynome $L_{\mu,p}(z)$ vom Grade $n(q+1) - 1$ sind und mittels verallgemeinerter

Vandermond'scher Determinanten dargestellt werden können. Man wählt die z_μ zweckmäßig als Ecken eines regulären Polygons der Seitenlänge 1 mit 0 als Mittelpunkt; dann wird

$$L_{\mu,p}(z) = L_{1,p}(z^{(\mu)}) e^{ip(2\pi/n)(\mu-1)}, \quad z^{(\mu)} = z e^{i(2\pi/n)(1-\mu)}, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n),$$

so daß man nur die $q+1$ Funktionen $L_{1,p}(z)$ für n Argumente im Polygon benötigt. Mittels einer Schranke $K_{n(q+1)}$ für die $n(q+1)$ -te Ableitung von $g(z)$ auf dem Polygonrand läßt sich der Interpolationsfehler durch

$$\left[\frac{(\cos \pi/n)^n + 1}{(2 \sin \pi/n)^n} \right]^{q+1} \frac{K_{n(q+1)}}{[n(q+1)]!}$$

abschätzen, z. B. durch $0,7 \cdot 10^{-10} K_{12}$ für $n = 4$ (Quadrat) und $q = 2$. Auch für den Fall, daß der Polygonmittelpunkt als Stützstelle hinzugenommen oder ein Eckpunkt als Nullpunkt gewählt wird, werden Formeln angegeben. Für $q = 0, 1, 2$ und quadratisches Gitter wählt man die Koeffizienten $L_{1,p}$ mit einer Maschenweite von $1/100$ zur Zeit vertafelt.

J. Weissinger.

Aitken, A. C.: Studies in practical mathematics. VII. On the theory of methods of factorizing polynomials by iterated division. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 63, 326—335 (1952).

Teilt man das Polynom $f_n(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + \dots + (-)^n a_n$ durch den Teiler $d_m(x) = x^m - b_1 x^{m-1} + \dots + (-)^m b_m$ vom Grade $m < n$, dann erhält man den Quotienten $q_{n-m}(x) = x^{n-m} - c_1 x^{n-m-1} + \dots + (-)^{n-m} c_{n-m}$ als Ergebnis der Division. Praktisch tritt nun oft der Fall auf, daß man nicht durch $d_m(x)$, sondern durch das Polynom $t_m(x) = x^m - (b_1 + \varepsilon_1) x^{m-1} + \dots + (-)^m (b_m + \varepsilon_m)$ zu teilen hat, das in den Koeffizienten kleine Fehler gegenüber $d_m(x)$ aufweist. Dadurch werden bei der Division Fehler in den aufeinander folgenden Resten erzeugt, womit sich vorliegende Arbeit beschäftigt. Bei Linearisierung der Fehlerbetrachtung zeigt sich, daß die Fehlerfortpflanzung durch die zu $d_m(x)$ gehörige Begleitmatrix \mathfrak{B} beschrieben und bestimmt werden kann. Nach Besprechung einiger bekannter Methoden und ihrer Konvergenzverhältnisse wird besonders auf den Fall der Fehlerbestimmung im letzten Rest eingegangen und gezeigt, daß man — bei Vernachlässigung von Gliedern höherer als erster Ordnung — auch die Koeffizienten von $t_m(x)$ verbessern kann. Für $m = 1$ erhält man die Methode von Newton-Raphson, für $m = 2$ diejenige von Bairstow. Drei Beispiele, ausgehend von dem Laguerre-Polynom $x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$, beschließen die Arbeit.

H. Unger.

Silva, Giovanni: Sulla determinazione pratica dei coefficienti di un polinomio di funzioni sferiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 643—649 (1952).

Die in der Geodäsie auftretende Aufgabe, eine punktweise gegebene Funktion l einer Raumrichtung, bestimmt durch die Winkel φ und λ eines sphärischen Koordinatensystems, durch passende Ausgleichsfunktionen darzustellen, wird folgendermaßen behandelt: Man setzt

$$l(\varphi, \lambda) = S_0 + S_1 + \dots + S_k,$$

wobei $S_n = \sum_{i=0}^n P_n^i(\sin \varphi) [a'_{ni} \cos i \lambda + a''_{ni} \sin i \lambda]$ die Laplacesche Kugelfunktion n -ten Grades ist. Sind N Meßpunkte l_r bekannt, so werden die unbekannten Koeffizienten a'_{ni} und a''_{ni} nach der Methode der kleinsten Quadrate gemäß $\sum_{r=1}^N [l_r - l(\varphi_r, \lambda_r)]^2 = \text{Min.}$ ermittelt. Dazu werden die S_n in geeignete Form gebracht und $l(\varphi_r, \lambda_r)$ in einer Art Doppelreihe bis zu den a_{44} explizit angegeben. — Die zweite Frage ist die nach passender Verteilung der N Meßpunkte über die Oberfläche der Einheitskugel. Hierfür wird ein Verfahren der Zoneneinteilung entwickelt. Das System der Normalgleichungen erscheint bei bestimmter Wahl der φ_r wesentlich vereinfacht.

H. Wundt.

Beaulclair, W. de: Der Sonderschieber für Häufigkeitsrechnung. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 112—120 (1952).

Der vom Verf. erdachte Sonderrechenschieber ist ein sehr vielseitiges Instrument. Als Ausgangspunkt diente das von dem Ref. 1947 veröffentlichte „Gaußnetz“, in dem jede Reihe normal verteilter Beobachtungswerte nach einer gewissen Vorbereitung als eine um eine Gerade streuende Reihe von Punkten erscheint. Der Schieber ist zwecks Erzielung einer vielseitigen Verwendbarkeit einigermaßen kompliziert, enthält 12 Skalen, zwei schräg gestellte Zungen und einen breiten, mit eingeritzten Kurven versehenen Läufer. Mittels der Kurven können der Einstellung des Läufers mehrere Funktionswerte auf den Körperleitern zugeordnet werden, wodurch eine sonst nur von Nomogrammen oder Netztafeln erreichbare Mannigfaltigkeit der Ablesemöglichkeiten erzielt wird. — Der Sonderrechenschieber ersetzt dank dieser Eigenschaften für viele Aufgaben der mathematischen Statistik das (im Handel noch nicht zu habende) Gaußnetz und das von Beckel in Deutschland bekanntgemachte Hazensche Netz (Wahrscheinlichkeitspapier). An einer Reihe von Beispielen zeigt Verf. die vielfache Verwendbarkeit des Sonderrechenschiebers. Grundsätzliche Schwierigkeiten dürfte seine Benutzung dem Ingenieur, der gewohnt ist, mit Rechenschiebern zu arbeiten, nicht bieten, sofern er die erforderlichen Kenntnisse in mathematischer Statistik besitzt. Im Interesse der Verbreitung dieser für die Erzeugung so wichtigen Methoden ist zu wünschen, daß sich bald eine Firma findet, die bereit ist, den Sonderrechenschieber herzustellen.

P. Lorenz.

Speiser, A. P.: Analogierechengengeräte mit linearen Potentiometern. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 245—246 (1952).

Donan, John F.: The serial-memory digital differential analyzer. *Math. Tables Aids. Comput.* **6**, 102—113 (1952).

Beschrieben wird ein digitaler Differential-Analysator mit einer magnetischen Trommel als Gedächtnis, das in Serie arbeitet. Der Analysator ist bemerkenswert durch seine Leistungsfähigkeit bei geringer Größe und seine einfache Konstruktion. Die erste Maschine dieser Art wurde im Januar 1950 in Betrieb genommen und enthält 22 Integratoren, je mit einer Kapazität von 22 Binärziffern. Das Rechenwerk besteht aus 44 Röhren und 700 Dioden. — In bekannter Weise werden die Informationen in einzelnen Kanälen auf der magnetischen Trommel registriert bzw. wieder abgenommen, wobei die Impulse durch Verstärker und Begrenzerschaltungen in eine geeignete Form und Größe erhalten. Ein ebenfalls auf der Trommel registrierter Zeitkanal liefert die Zeitimpulse, durch die die ganze Maschine zeitlich gesteuert wird. — Bei den einzelnen Integratoren werden die dy und dx durch die an zwei Eingängen ankommenden Impulsraten dargestellt. Durch Summierung der Impulse des dy -Eingangs ergibt sich Y und bei jedem Impuls des dx -Eingangs wird Y zum Inhalt R eines Registers addiert, das die Impulsrate dz/dt an dem Ausgang des Integrators liefert. Dieses Ergebnis wird in einem besonderen Kanal des Gedächtnisses registriert und kann daraus wieder entnommen und in andere Integratoren gegeben werden. An Hand eines einfachen Beispiels wird die Durchführung einer Rechenoperation beschrieben. — Geplant ist der Bau eines dezimalen, digitalen Differential-Analysators (DDDA), der 60 Integratoren, jeder mit einer Kapazität von 6 Dezimalstellen und einer Stelle für das Vorzeichen, enthalten soll. Zur Niederschrift der Ergebnisse ist eine elektrische Schreibmaschine vorgesehen.

W. Breittling.

Mitrović, D. and R. Tomović: Solution of the partial differential equation of the heat-flow on the a. c. network analyser. *Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova. mat. Inst.* **18**, Nr. 2, 181—186 und engl. Zusammenfassg. 186 (1952) [Serbisch].

In order to examine the possibilities of the a. c. network analyser applied to the solutions of some types of the partial differential equations, the case of the heat flow in one dimension through homogeneous medium with the given boundary condition, was worked out. The results obtained on the a. c. network analyser are compared with the analytic solutions of the same equation. The agreement between the analog and calculated solutions has been found satisfactory for most practical purposes and the analog method can be expanded without restrictions to the more complex cases. At the end, it is shown that a continuous solution of the given equation can be approximated from the set of the analyser records when using the interpolation polynomials in two variables.

Autoreferat.

Mitrovic, Dusan: Sur un principe nouveau de construction des machines électriques servant pour la recherche des racines des équations algébriques. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 2519—2521 (1952).

In dem elektrischen Netzwerk mit den Generatoren $G_0 \dots G_n$, deren Spannungen regelbar sind, den konstanten und unter sich gleichen Impedanzen \square und den gleichzeitig regelbaren Impedanzen \square wird der Real- und Imaginärteil von \square so geregelt, daß der Strom $I_0 = 0$ wird, was beispielsweise mit dem Spannungsmesser V mit vernachlässigbarem Eigenverbrauch festgestellt werden kann. (Schaltbild siehe Originalaufsatz.) Dann ist μ/λ die Wurzel der alge-

braischen Gleichung

$$\psi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \equiv \begin{vmatrix} E_0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ E_1 & 2 + (\mu/\lambda) & -1 & \dots & 0 \\ E_2 & -1 & 2 + (\mu/\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_n & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 + (\mu/\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Vergleich mit der algebraischen Gleichung mit komplexen Koeffizienten

$$\psi(z) = \sum_{p=0}^n a_p z^{n-p} = 0$$

findet man, daß jede Wurzel dieser Gleichung gegeben ist durch $z = k \cdot \mu/\lambda$, wobei k eine willkürliche reelle Zahl ist, wenn man an dem analogen Netzwerk die durch folgende Beziehungen definierten Spannungen anlegt:

$$k^{n-p} \frac{\psi^{n-p}(-2k)}{(n-p)!} = E_p - E_{p-2}(n-p+1) + E_{p-4} \sum_{v=p}^n (v-p+1) - E_{p-6} \sum_{\alpha=p}^n \sum_{v=p}^{\alpha} (v-p+1) + E_{p-8} \sum_{\beta=p}^n \sum_{\alpha=p}^{\beta} \sum_{v=p}^{\alpha} (v-p+1); \quad (p=0, 1, \dots, n).$$

Die E_i sind lineare und homogene Funktionen der a_i , deren Koeffizienten ein für allemal berechnet werden können. Je nach der Art der Koeffizienten der zu lösenden algebraischen Gleichungen ergeben sich verschiedene Typen von Maschinen, die sich zum Teil durch ihre Genauigkeit bei geringem Herstellungspreis auszeichnen.

W. Breitling.

Nardin, J.: Une méthode de calcul des réserves mathématiques et de confection de l'inventaire au moyen de cartes perforées. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français **63**, 119—136 (1952).

Fränz, Kurt: Theorie der linearen Servomechanismen von hoher Präzision. Revista Un. mat. Argentina **15**, 128—148 (1952) [Spanisch].

Im Hinblick auf die servomechanische Verfolgung von Zielen durch Radargeräte werden Formeln für die Fehler von Servomechanismen entwickelt. Bedeuten $x(t)$ die z. B. als Zielkoordinaten zu interpretierende Erregung und $X(t)$ die Antwort des Servomechanismus, so werden die durch $X(t) = \int_0^\infty x(t-s) K(s) ds$ definierte Übergangsfunktion $K(s)$ und die durch $X(t) = T(p) \cdot \exp pt$ bestimmte Übertragungsfunktion $T(p)$ betrachtet. Sowohl der systematische Fehler $X(t) - x(t)$ als auch der mittlere quadratische Fehler von $X(t)$, hervorgerufen durch statistische Fehler, die sich $x(t)$ überlagern, werden in Abhängigkeit von den Parametern des Servomechanismus betrachtet; mit wachsender Trägheit des Servomechanismus steigt der systematische und fällt der mittlere quadratische Fehler. Es wird das Minimum des quadratischen Mittelwerts beider Fehler gesucht, wobei $T(p)$ als rational in p vorausgesetzt wird.

H. Bückner.

Schuler, M. und H. Gebelein: Bericht über ein in Bearbeitung befindliches Tabellenwerk für elliptische und verwandte Funktionen. Z. angew. Math. Mech. **32**, 234—235 (1952).

Ling, Chih-Bing: Tables of values of the integrals $\int_0^\infty (x^m/\sinh px) dx$ and $\int_0^\infty (x^m/\cosh px) dx$. J. Math. Physics **31**, 58—62 (1952).

Die beiden Integrale

$$\frac{p^{m+1}}{2^p (m!)} \int_0^\infty \frac{x^m dx}{\sinh px} \quad (m \geq p \geq 1) \quad \text{und} \quad \frac{p^{m+1}}{2^p (m!)} \int_0^\infty \frac{x^m dx}{\cosh px} \quad (m \geq 0, p \geq 1)$$

werden für $p = 1(1)8$ und $m = p(1)15$ bzw. für $p = 1(1)8$ und $m = 0(1)15$ mit 5 Dezimalen mitgeteilt. Weiter ist der Faktor $2^p (m!)/p^{m+1}$ für alle vorkommenden p - und m -Werte tabelliert. Den Berechnungen liegen Rekursionsformeln und Reihenentwicklungen, in denen von J. W. L. Glaisher 1912 bzw. 1914 berechnete Koeffizienten auftreten, zugrunde.

H. Unger.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Matschinski, Mathias: Sur la probabilité de l'hypothèse de périodicité. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 14—17 (1952).

Matschinski, Mathias: Sur la probabilité des hypothèses. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1428—1430 (1952).

Verf. skizziert ein Beispiel, bei dem sein früher aufgestelltes Prinzip „de l'uniformité“ (dies. Zbl. **38**, 287) zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Hypothesen angewendet werden kann. W. Saxer.

Perfect, Hazel: On positive stochastic matrices with real characteristic roots. Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 271—276 (1952).

The paper is intended to prove and to sharpen partially Suleimanova's results which were published without proofs (this Zbl. **35**, 209). A non-negative square matrix whose row sums are equal to unity is called a stochastic matrix. It is called simple if its Jordan normal form is diagonal. By a geometrical consideration, a necessary and sufficient condition is given for a set of real numbers $1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ to be characteristic roots of an $(n+1) \times (n+1)$ positive, simple, stochastic matrix. The condition is, under the hypothesis $|\lambda_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), reduced to the positivity of $1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ when $n = 2$ or 3 . K. Yosida.

Castro, Gustavo de: Einige Betrachtungen über die Normalverteilung. Revista Economia **5**, 22—25 (1952) [Portugiesisch].

Cadwell, J. H.: An approximation to the symmetrical incomplete beta function. Biometrika **39**, 204—207 (1952).

Aus der bekannten Tatsache, daß die Verteilung

$$\{F(x) \cdot [1 - F(x)]\}^{p-1} dF(x) \cdot \Gamma(2p)/\Gamma^2(p)$$

der Mediane x einer $(2p-1)$ -gliedrigen Stichprobe aus einer Gesamtheit mit kumulativer Verteilungsfunktion $F(x)$ bei normaler Ausgangsverteilung schon für kleine p (erst recht für $p \rightarrow \infty$) annähernd normal ist, folgert Verf. Approximation der unvollständigen Betafunktion

$$I_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt,$$

zunächst für $q = p$, durch

$$I_x(p, p) = \frac{1}{2} + L(p) \cdot \{\Phi(\zeta) - \Psi(\zeta) \cdot 2(p-1)(2p+1)/(4p-1)^4\}$$

mit

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\pi/3} \cdot \Phi(\zeta \sqrt{3/(4p-1)}),$$

wo

$$\Phi(\zeta) = \int_0^\zeta e^{-t^2/2} dt / \sqrt{2\pi}, \quad \Psi(\zeta) = \int_0^\zeta (1 - t^3/15) e^{-t^2/2} dt / \sqrt{2\pi}.$$

Tabellen für $L(p)$ und $\Psi(\zeta)$, ferner Hinweise auf Anwendbarkeit des Resultats auf Pearson-Kurven Typ II und VII, insbesondere Student-Verteilung.

M.-P. Geppert.

Rufener, E.: Über eine spezielle Klasse von Frequenzfunktionen. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **52**, 97—120 (1952).

Verf. untersucht solche Verteilungsfunktionen, die sich durch Faltung von Rechteckverteilungen ergeben und gibt ihre explizite Darstellung samt einigen Eigenschaften und Grenzwertfällen. Sommerfeld hat bereits den Fall von gleich breiten Rechteckverteilungen zur Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes benutzt. W. Saxer.

Gnedenko, B. V. und E. L. Rvačeva: Über ein Problem des Vergleichs zweier empirischer Verteilungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **82**, 513—516 (1952). [Russisch].

Gegeben seien zwei Reihen von Beobachtungen voneinander unabhängiger zufälliger Größen x_1, x_2, \dots, x_n und y_1, y_2, \dots, y_n , die einem und demselben Verteilungsgesetz unterliegen. Verff. bilden die Ausdrücke $F_1(x) = k_1(x)/n$ und $F_2(x) = k_2(x)/n$, wobei $k_1(x)$ die Zahl der Beobachtungen der ersten Reihe ist, die kleiner als x sind, und $k_2(x)$ die Zahl der Beobachtungen der zweiten Reihe, die kleiner als x sind, ferner die Ausdrücke $D_n^- = \max_{-\infty < x < \infty} \{F_2(x) - F_1(x)\}$ und $D_n^+ = \max_{-\infty < x < \infty} \{F_1(x) - F_2(x)\}$ und stellen sich die Aufgabe, die gemeinsame

Verteilungsfunktion der Größen D_n^- und D_n^+ zu bestimmen. — Der Gang der Untersuchungen lehnt sich eng an eine vor kurzem erschienene Arbeit von Gnedenko und Koroljuk an (dies. Zbl. 44, 136). Das Ergebnis ist eine einigermaßen umständliche Formel.

P. Lorenz.

Gnedenko, B. V.: Einige Resultate über die maximale Divergenz zwischen zwei empirischen Verteilungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 661—663 (1952) [Russisch].

Verschärfung der Resultate einer früheren Arbeit des Verf. (zusammen mit W. S. Koroljuk) über den gleichen Gegenstand [dies. Zbl. 44, 136. Problemstellung und Bezeichnungen siehe dort]. Zusätzlich eingeführt sind: $D_n = \sup \{F_2(x) - F_1(x)\}$ und $\Phi_n(x, y) = P\{\sqrt{n/2} D_n^- < x, \sqrt{n/2} D_n^+ < y\}$. Neben die für $n \rightarrow \infty$ asymptotischen Beziehungen $\Phi_n^+(x) \rightarrow 1 - e^{-2x^2}$ und $\Phi_n(x) \rightarrow K(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-2k^2 x^2}$ bei $x > 0$ tritt noch:

$$\Phi_n(x, y) \rightarrow S(x, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-2k^2(x+y)^2} - \sum_1^{\infty} [e^{-2(kx+(k-1)y)^2} + e^{-2(ky+(k-1)x)^2}]$$

bei $x > 0$ nebst $y > 0$. Des weiteren folgt aus dem asymptotischen Verhalten der Binomialkoeffizienten in der exakten Formel:

$$\sqrt{2n} \cdot P \left\{ D_n^+ = \frac{[x\sqrt{2n}]}{n} \right\} - 4x e^{-2x^2} \rightarrow 0, \quad \sqrt{2n} \cdot P \left\{ D_n = \frac{[x\sqrt{2n}]}{n} \right\} - \frac{dK(x)}{dx} \rightarrow 0$$

und $2n \cdot P \left\{ D_n^- = \frac{[x\sqrt{2n}]}{n}, D_n^+ = \frac{[y\sqrt{2n}]}{n} \right\} - \frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial x \partial y} \rightarrow 0$. — Schließlich wird das asymptotische Verhalten von $\Phi_n^+(x)$, $\Phi_n(x)$ und $\Phi_n(x, y)$ durch Mitnahme höherer Glieder in der Grenzbetrachtung bis auf Glieder der Ordnung $o(1/n)$ präzisiert. — Zusammenfassende Darstellung ohne Beweise.

H. Richter.

Gnedenko, B. V. und V. S. Michalevič: Über die Verteilung der Anzahl der Stellen, an denen eine empirische Verteilungsfunktion eine andere übertrifft. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 841—843 (1952) [Russisch].

Folgendes Theorem wird bewiesen. Wenn zwei Folgen von je n unabhängigen Beobachtungen über zufällige Veränderliche mit einer und derselben stetigen Verteilungsfunktion $F(x)$ vorliegen, und man bezeichnet mit $S_n(x)$ und $T_n(x)$ die entsprechenden empirischen Verteilungen und mit C_n die Zahl der „positiven“ Sprünge der Funktion $S_n(x)$ in bezug auf $T_n(x)$, dann ist die zufällige Größe C_n gleichmäßig verteilt. Das heißt, es gilt $P\{C_n = k\} = 1/(n+1)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). Den Beweis führt Verf. dadurch, daß er aus den beiden Beobachtungsreihen eine herstellt, in der die Glieder monoton wachsen, und Glieder aus der ersten Reihe durch $+1$, aus der zweiten durch -1 ersetzt. Dadurch ergeben sich gewisse Abzählmöglichkeiten.

P. Lorenz.

Donsker, Monroe D.: Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems. Ann. math. Statistics 23, 277—281 (1952).

Es seien x_1, x_2, \dots unabhängige stochastische Variable mit der gleichen Verteilungsfunktion $F(\lambda)$. Doob begründete die Sätze von Kolmogorov-Smirnov betreffend das asymptotische Verhalten der Differenz zwischen einer Stichprobe dieser Verteilung und ihr selbst mit dem heuristischen Ansatz, daß die x_n durch

eine bestimmte Normalverteilung mit einem Parameter ersetzt werden können (vgl. dies. Zbl. 35, 89). Verf. beweist die Gültigkeit der Doobschen Annahme.

W. Saxer.

Gichman, I. I.: Über die empirische Verteilungsfunktion im Falle der Gruppierung der Daten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 837—840 (1952) [Russisch].

Die Theoreme von Kolmogoroff und Smirnow über die maximalen Abweichungen der empirischen Verteilung einer Stichprobe von der einer anderen aus derselben Gesamtheit oder von der theoretischen Verteilungsfunktion verlangen bei der praktischen Anwendung umfangreiches Beobachtungsmaterial. Zur Erleichterung der Rechnungen ist es zweckmäßig, die Beobachtungswerte in Gruppen zusammenzufassen. Verf. untersucht den Einfluß der Gruppierung auf die Grenzfälle der Theoreme von Kolmogoroff (K.) und Smirnow (S.) und gelangt dabei auch zu einigen neuen Grenzsätzen bei vollständiger Ausnutzung des Beobachtungsmaterials. Den Ausgangspunkt bildet eine stetige Verteilungsfunktion. Die vom Verf. gefundenen Theoreme 1) und 2) enthalten die Theoreme von K. und S. und von zwei weiteren Autoren als Sonderfälle und gestatten den Schluß, daß Gruppenbildung auf die Grenzverteilungen von K. und S. keinen Einfluß hat, wenn die Gruppenbreiten beim Grenzprozeß nach Null streben. Vier weitere Theoreme bringen formelmäßige Vereinfachungen und gewisse Vervollständigungen bekannter Ergebnisse.

P. Lorenz.

Rosenblatt, M.: On the oscillation of sums of random variables. Trans. Amer. math. Soc. 72, 165—178 (1952).

Let X_1, X_2, \dots be independent, identically distributed random variables. The sequence $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ is said to oscillate, if both the probability that $S_n > 0$ for an infinite set of n and that of $S_n \leq 0$ for an infinite set of n equal unity. Using results due to Chung and Fuchs (this Zbl. 42, 375) the author shows that, if $E(|x|) < \infty$ and the probability of $X \neq 0$ is positive, then S_n oscillates if and only if $E(x) = 0$. He also shows that a necessary and sufficient condition for S_n to oscillate is $\sum_{j=1}^{\infty} P\{S_j > 0, S_{j+1} \leq 0\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{S_j \leq 0, S_{j+1} > 0\} = \infty$. He uses these results to characterise a class of random variables, which generate oscillatory S_n and also a class of random variables each of which generate S_n satisfying simultaneously

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| = \infty\right\} = P\left\{\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty\right\} = P\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty\right\} = 1$$

$$\text{and } \lim_{n \rightarrow \infty} P\{S_n > 0\} = 0.$$

St. Vajda.

Chung, K. L. and P. Erdős: On the application of the Borel-Cantelli lemma. Trans. Amer. math. Soc. 72, 179—186 (1952).

Let a sequence of events E_k be given and define $\limsup E_k$ by $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$. The authors state conditions for the probability of $\limsup E_k$ to be unity. Their assumptions do not include independence of the events (as the Borel-Cantelli lemma does) and they are weaker than Borel's condition $\sum P(E_k | E_1, \dots, E_{k-1}) = \infty$. The result is applied to independent random variables which take the values ± 1 with probabilities $\frac{1}{2}$.

St. Vajda.

Dugué, Daniel: Sur la convergence presque certaine au sens de Cesaro de variables aléatoires et sur certaines inégalités concernant les fonctions caractéristiques. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1837—1840 (1952).

Let $\{X_n\}$ be independent random variables subject to the same probability law

$F(x)$. It is proved (Th. 1) that it is necessary that $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$ exists and equals a in order that $Y_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n \rightarrow a$ almost certainly and it is stated (Th. 2) without proof that it is necessary that $E(X)$ exists and equals a in order that $Y_{n_p} \rightarrow a$ almost certainly for a sequence $\{n_p\}$ such that $n_{2p} - n_{2p-1}$ be a fixed number and that $n_{2p} = O(p)$. Th. 1 is the inverse of a wellknown theorem due to Kolmogorov and is proved as follows. Since $Y_n \rightarrow a$ almost certainly, $X_n/n = Y_n - (n-1)Y_{n-1}/n \rightarrow 0$ almost certainly. $\{X_n\}$ being independent,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr \{|X_n| > 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} F(-n) + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - F(n))$$

is convergent by virtue of a theorem due to E. Borel. Thus it holds

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F(-n) + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - F(n)) < \infty,$$

which proves Th. 1. Making use of the similar idea, the author shows that it is necessary and sufficient for $E(X)$ to exist that $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \Re \left(1 - \varphi\left(\frac{t}{n}\right) \right) dt$ is convergent, $\varphi(t)$ being the characteristic function of X . As a special case of this fact one may obtain at once (Th. 3) that, if $f(x)$ is a continuous even function such that $f(x) \sim \sum_n a_n \cos(nx)$, then the convergence of $\sum_n n a_n$ is equivalent to that of

$$\sum_n \int_0^1 \left(f(0) - f\left(\frac{x}{n}\right) \right) dx. \quad K. Itô.$$

Prochorov, Ju. V.: Das lokale Theorem für Dichten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 797—800 (1952) [Russisch].

Bei den unabhängigen zufälligen Größen ξ_1, ξ_2, \dots mit derselben Verteilungsfunktion $F(x)$ sei $F_n(x)$ die Verteilungsfunktion für die normierte Summe $\eta_n = \sum_{j=1}^n \xi_j / \sqrt{n}$. Setzt man

$F_n(x) = a_n R_n(x) + b_n S_n(x)$ mit absolut stetiger Verteilungsfunktion $R_n(x) = \int_{-\infty}^x \varrho_n(x) dx$ und der treppenförmigen Verteilungsfunktion $S_n(x)$ mit Sprungstellen auf einer Menge vom Lebesgueschen Maße Null, so heißt $a_n \cdot \varrho_n(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_n(x)$ zu η_n . Bekanntlich gilt $F_n(x) \rightarrow \Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp(-z^2/2) dz$ genau unter der Bedingung (A): $\bar{\xi} = 0$ nebst

$\text{Var } \xi = 1$. Diese Konvergenz wird verschärft zu Theorem 1: $\int_{-\infty}^{+\infty} |p_n(x) - \varphi(x)| dx \rightarrow 0$ mit

$\varphi(x) = d\Phi/dx$ genau dann, wenn außer (A) noch erfüllt ist (B): Es gibt ein n mit $a_n > 0$. -- Allgemeiner gilt Theorem 2: Strebt die zu $\eta_n = (\sum \xi_n - A_n)/B_n$ mit Konstanten $A_n > 0$ und $B_n > 0$ gehörige Verteilungsfunktion gegen die stationäre Verteilungsfunktion $G(x)$ mit der

Dichte $\gamma(x)$, so ist (B) notwendig und hinreichend für $\int_{-\infty}^{+\infty} |p_n(x) - \gamma(x)| dx \rightarrow 0$. -- Mit Hilfe

der von B. W. Gnedenko und A. N. Kolmogorov (Grenzwertsätze für Summen unabhängiger zufälliger Größen, 1949 [Russisch]) für die Verschärfung von $F_n \rightarrow \Phi$ eingeführten nächsten Entwicklungsglieder $P_j(-\varphi)n^{-j/2}$ läßt sich auch die lokale Konvergenz des Theorems 1 ver-

schärfen zu $\int_{-\infty}^{+\infty} |p_n(x) - \varphi(x) - \sum_{j=1}^{k-2} P_j(-\varphi)n^{-j/2}| dx = o(\sqrt{\ln n}/n^{(k-2)/2})$, falls ξ das Moment

der Ordnung k besitzt. -- Der nur für Theorem 1 angegebene Beweis schätzt die entstehenden Faltungsintegrale unter Verwendung von Hilfssätzen von Kolmogorov ab und liefert zunächst $\text{Var}(F_n - \Phi) \rightarrow 0$, was mit der Behauptung von Theorem 1 und mit $\sup |P_n(A) - \Phi(A)|$

$\rightarrow 0$ gleichwertig ist, wenn für meßbare Mengen A definiert wird: $P_n(A) = \text{Prob}\{\eta_n \in A\}$,
 $\Phi(A) = \int_A \varphi(x) dx.$ H. Richter.

Buchner, P.: Bemerkungen zum Satz von Bernoulli. *Elemente Math.* 7, 8—11 (1952).

Buchner, P.: Beispiel zum Grenzwertsatz. *Elemente Math.* 7, 53—56 (1952).
Mittelst Überlagerung einer Gleichverteilung illustriert Verf. den Grenzwertsatz und kontrolliert numerisch die Schnelligkeit der Konvergenz. *W. Saxer.*

Siraždinov, S. Ch.: Eine Verschärfung der Grenzwertsätze für homogene Markoffsche Ketten. *Uspechi mat. Nauk* 7, Nr. 4, 141 (1952) [Russisch].

Dobrušin, R. L.: Ein gleichmäßiger lokaler Grenzwertsatz für eine homogene Markoffsche Kette aus zwei Zuständen. *Uspechi mat. Nauk.* 7, Nr. 4, 143—144 (1952) [Russisch].

Girshick, M. A. and Herman Rubin: A Bayes approach to a quality control model. *Ann. math. Statistics* 23, 114—125 (1952).

The following model is considered: a machine in state $i = 1, 2$ produces items of quality x with probability $f_i(x) dx$. In state $j = 3, 4$ the machine is in repair (having previously been in state $j - 2$) for a time of length n_j , at the end of which it is again in state 1. The transition probability from state 1 into state 2 is known. It is required to find a quality control rule, based on observations on x , to decide when to bring the machine into a state of repair. — The author considers the case of 100% inspection, and also a rule which takes account of cost of inspection and specifies which items should be inspected. — The model leads to a Markov process and the author derives the integral equations from which the optimum quality control rules can be derived. *St. Vajda.*

Sirao, Tunekiti and Tosio Nisida: On some asymptotic properties concerning Brownian motion. *Nagoya math. J.* 4, 97—101 (1952).

The authors prove Kolmogoroff's following theorem which is stated without proof in P. Lévy's book „Processus stochastiques et mouvement brownien“ (Paris 1948; this Zbl. 34, 226): $X(t)$ being Wiener's brownian motion and $\Phi(t)$ being a non-negative monotone-increasing function of t satisfying $\Phi_2(t)/t \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$, the set of t such that $X(t) > \sqrt{t} \Phi(t)$ is bounded or unbounded for almost all sample processes of $X(t)$ according as the integral

$$\int_0^\infty \Phi(t) \exp\left(-\frac{\Phi^2(t)}{2}\right) \frac{dt}{t}$$

converges or diverges. Their proof is based upon the similar theorem concerning the sum of independent random variables discussed by W. Feller [*Ann. of Math.*, II. Ser. 47, 631—638 (1946)]. Furthermore the authors prove an analogous theorem concerning the behavior of $X(t)$ in the neighborhood of $t = 0$ by applying Lévy's principle of projective invariance to this theorem of Kolmogoroff. *Kiyosi Itô.*

Yosida, Kôzaku: On Brownian motion in a homogeneous Riemannian space. *Pacific J. Math.* 2, 263—270 (1952).

Let R be any n -dimensional, orientable, infinitely differentiable Riemannian space on which a group of isometric transformations G^* is specified such that G^* is a Lie group transitive on R , where $d(x, y)$ denotes the distance of two points $x, y \in R$. Consider a temporally homogeneous Markov process in R whose transition probability will be denoted by $P(t, x, E)$. It is assumed further that the process is spatially homogeneous with respect to G^* so that

$$P(t, x, E) = P(t, S^*x, S^*E) \text{ for every } S^* \in G^*.$$

The author proves the following fact in making use of his theory on one parameter semi-group (this Zbl. 37, 353) and defines a natural extension of Brownian motions. Assume that the totality of elements of S^* which preserves a fixed point $x_0 \in R$ invariant be compact and further that the continuity condition:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \int_{d(x, y) > \varepsilon} P(t, x, dy) = 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

be fulfilled. Then (Th. 1) the condition of Lindeberg's type:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \int_R \frac{d(x, y)^2}{1 + d(x, y)^2} P(t, x, dy) < \infty$$

is derived, and (Th. 2) the finite limits ($x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$)

$$a^i(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_{d(x, y) \leq \varepsilon} (y^i - x^i) P(t, x, dy),$$

$$2b^{ij}(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \int_{d(x, y) \leq \varepsilon} (y^i - x^i)(y^j - x^j) P(t, x, dy)$$

exist independently of the sufficiently small $\varepsilon > 0$, and for any real-valued function defined on R ; $f_0(x)$ uniformly continuous and bounded with partial derivatives up to the second order (continued to the next sheet) having the same property, it holds

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \left[\int_R f_0(y) P(t, x, dy) - f_0(x) \right] = a^i(x) \frac{\partial f_0}{\partial x^i} + b^{ij}(x) \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^i \partial x^j}.$$

This result gives a foundation to the approaches of Fokker-Planck equations in the sense that it assures that in the spatially homogeneous case we may eliminate the conditions, e. g. the existence of the limit $a^i(x)$, $b^{ij}(x)$ which the previous authors have assumed at the starting point.

K. Itô.

Lindley, D. V.: The theory of queues with a single server. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 277—289 (1952).

Verf. entwickelt die mathematische Theorie der Schlangenbildung für den Sonderfall einer einzigen Schlange und eines einzigen Bedienenden. Vorausgesetzt wird für das Zeitintervall t_r zwischen der Ankunft des r -ten und des $(r+1)$ -ten Kunden und für die Bedienungszeit s_r des r -ten Kunden, daß alle t_r der gleichen Verteilung folgen, ebenso daß alle s_r der gleichen Verteilung folgen, daß $E(t_r)$ und $E(s_r)$ endlich sind, und daß alle t_r und alle s_r untereinander unabhängig sind. Die kumulative Verteilungsfunktion $F_r(x)$ der Wartezeit w_r des r -ten Kunden genügt der Rekursionsformel

$$F_{r+1}(x) = \int_{u_r \leq x} F_r(x - u_r) dG(u_r),$$

wo $G(u_r)$ die kumulative Verteilungsfunktion aller $u_r = s_r - t_r$ ist. Das Problem läßt sich auf mehrfache Weise mit dem des Zufallsganges (random walk) in Beziehung setzen. Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer nicht ausgearteten Grenzverteilung $F(x)$ für $r \rightarrow \infty$ ergibt sich $E(u) < 0$. Im kontinuierlichen Falle ist $F(x)$ Lösung der aus der obigen Rekursionsformel resultierenden Integralgleichung vom Wiener-Hopf-Typ:

$$F(x) = \int_0^\infty F(y) \cdot g(x - y) dy;$$

aus dieser bestimmt Verf. für den Fall, daß die Variablen t_r einer Γ -Verteilung folgen, mittels Fourierscher Transformation die Wahrscheinlichkeit der Wartezeit 0 zu $C = 1 - E(s)/E(t)$. Eingehend behandelt Verf. den durch $G(y) = G_1(y+1)$ charakterisierten Fall eines festen Ankunftszeitintervalls, indem er die Verteilung $dG_1(y)$ der s_r als Γ -Verteilung mit $n+1$ Freiheitsgraden von $\lambda y = y/E(t)$ und die Lösung in der Form

$$F(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} c_i \cdot e^{z_i x}$$

ansetzt.

M.-P. Geppert.

Bellman, Richard and Theodore Harris: On age-dependent binary branching processes. Ann. of Math., II. Ser. 55, 280—295 (1952).

An ihre Voranzeige (dies. Zbl. 41, 456) anschließend, beschäftigen sich die Verff. mit einem stochastischen Zerlegungsprozeß, worin jedes Teilchen sich nach einer gewissen Lebensdauer in $n (\geq 0)$ gleichartige Teilchen transformiert mit einer respektiven Wahrscheinlichkeit q_n . Die Lebensdauer t sowie die Anzahl n sind beide zufällige Veränderliche. Sowohl die kumulative Verteilung $G(t)$ der Lebensdauer als auch die Wahrscheinlichkeit q_n sind als von der Geburtszeit jedes Teilchens sowie von der Anzahl der anderen vorhandenen Teilchen unabhängig vorausgesetzt. Die Gesamtzahl der zur Zeit t vorhandenen Teilchen werde mit $Z(t)$ bezeichnet, vorausgesetzt wird $Z(0) = 1$. Es wird hauptsächlich der Fall der binären Spaltung, d. h. der Fall von $q_2 = 1$ und $q_n = 0 (n \neq 2)$, behandelt unter der Annahme $G(0+) = 0$, $G(\infty) = 1$. Ausgangspunkt ist die Tatsache, daß die erzeugende Funktion von $Z(t)$, d. h.

$$F(s, t) - E\{s^{Z(t)}\} = \sum_{r=1}^{\infty} p_r(t) s^r, \quad p_r(t) = \Pr\{Z(t) = r\},$$

derjenigen nichtlinearen Integralgleichung

$$F(s, t) = \int_0^t F(s, t-y) dG(y) + s(1-G(t)), \quad t \geq 0, |s| \leq 1,$$

genügt, welche umgekehrt die erzeugende Funktion selbst charakterisiert, insofern die Beschränktheit in bezug auf t vorausgesetzt wird. Somit folgt, daß jedes Moment $m_k(t) = E\{Z(t)^k\} = \sum_{r=1}^{\infty} r^k p_r(t)$ einer linearen Integralgleichung des Erneuerungstypus genügt. Auf Grund einer Arbeit von W. Feller [Ann. math. Statistics **12**, 243—267 (1941)] über solche Gleichungen läßt sich das asymptotische Verhalten der Momente für $t \rightarrow \infty$ herleiten. — Die zufällige Veränderliche $Z(t)/m_1(t)$ konvergiert im Quadratmittel gegen eine zufällige Veränderliche w , abgesehen von einem speziellen Falle, wo $G(t)$ eine Treppenfunktion ist, deren Sprünge alle an den ganzen Vielfachen einer gewissen Einheit liegen; im letzten Ausnahmefalle modifiziert sich das Resultat dementsprechend. Die erzeugende Funktion $\Phi(s)$ von w genügt der Gleichung

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} \Phi(s e^{-ay})^2 dG(y), \quad \Re s \leq 0,$$

mit einer bestimmten positiven Konstante a . Es gibt eine einzige Funktion, die sich um $s = 0$ analytisch verhält und für $\Re s \leq 0$ die letztgenannte Gleichung erfüllt, unter den Bedingungen $\Phi(0) = \Phi'(0) = 1$. Das asymptotische Verhalten der charakteristischen Funktion $\Phi(it)$ für $t \rightarrow \infty$ wird dann untersucht. — Es zeigt sich, daß die Verteilung von w : $K(u) = \Pr\{w \leq u\}$ stetig ist, und daß sie sogar totalstetig ist, nämlich eine Dichtefunktion besitzt, wenn eine weitere Voraussetzung $1 - G(y) = O(e^{-cy})$ mit einem $c > 0$ gemacht ist. — Die gewonnenen allgemeinen Resultate werden durch ein Beispiel erläutert. Zum Schluß sind einige Bemerkungen über die Fälle mit den allgemeinen g_n bzw. $G(0+) > 0$ erwähnt. Y. Komatu.

● Solodovnikov, V. V.: Einführung in die statistische Dynamik der automatischen Regulierungssysteme. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 367 S. R. 11,45 [Russisch].

Verf. behandelt die Frage, wie bei Übertragungssystemen die zufällig auftretenden Signale beschaffen sind. Er setzt voraus, daß der Leser mit den Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie der Laplace- und Fouriertransformation vertraut ist, bringt aber trotzdem in den ersten beiden Kapiteln zunächst eine kurze Darstellung der Frequenz-Charakteristiken dynamischer Systeme (71 S.) und der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (24 S.). — Dann geht er zur eigentlichen Fragestellung über, wobei er die Begriffe und Methoden der mathematischen Statistik heranzieht, die Kolmogorow (dies. Zbl. **38**, 292), Chintschin (vgl. z. B. dies. Zbl. **19**, 224) und Wiener (dies. Zbl. **36**, 97) entwickelt haben. Nach Schilderung der Grundbegriffe aus der Theorie der stationären Zufallsvorgänge bringt er eine Genauigkeitsanalyse, die auf dem Kriterium vom Mittelwert der Fehlerquadrate beruht (46 S.). An zwei Beispielen zeigt er, daß die Methode sowohl bei linearen als auch bei nichtlinearen Systemen anwendbar ist (48 S.). Kurz behandelt er dann die Annäherung von Kurven der Spektraldichte durch gebrochenrationale Funktionen (16 S.). Dann leitet er eine allgemeine Formel her, nach der man aus den Charakteristiken des Signals und der Spektraldichte der Störung die Übertragungsfunktion des Systems berechnen kann, aufgebaut auf dem Minimum des Mittelwertes der Fehlerquadrate (20 S.). Für den Fall, daß die Angaben experimentell gewonnen sind, gibt er ein graphoanalytisches Verfahren an (50 S.). Das letzte Kapitel (28 S.) bringt eine Verallgemeinerung für den Fall, daß sich das zu übertragende Signal aus einer gegebenen und einer zufälligen Zeitfunktion zusammensetzt. — Im Anhang bringt er ausführliche Tabellen von $\sin x/x$, $\cos x/x$ sowie der Laguerreschen Polynome L_0 bis L_5 sowie einige andere Angaben, die in seinen Formeln vorkommen.

Borkmann.

Greenberg, L. H. and W. W. Happ: Design and operation of a „mean deviation meter“. Canadian J. Phys. **30**, 317—328 (1952).

An electronic instrument is described which measures the average rate and the „instantaneous“ rate (i. e. that within a short interval) of the arrival of pulses and the mean difference between these rates. Assuming the successive counts to follow a Poisson distribution, any deviation from the theoretical distribution of the mean difference will give information on dead time (interval after each count during which no further count will be accepted) and other defects of the counting mechanism.

St. Vajda.

Keeping, E. S. and W. W. Happ: Statistics of the mean deviation meter. Canadian J. Phys. **30**, 329—341 (1952).

This paper contains the analysis of statistical problems connected with the instrument which was described in a paper by Greenberg and Happ (see preceding review). The main topic is the distribution of the results on a single counter and of the difference between two counters with different decay constants. Approximations to the mean difference are also given.

St. Vajda.

Craemer, H.: Die Abhängigkeit der Festigkeit von der Größe der Versuchskörper, betrachtet auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 145—157 (1952).

Norton, Kenneth A., Edna L. Shultz and Helen Yarbrough: The probability distribution of the phase of the resultant vector sum of a constant vector plus a Rayleigh distributed vector. J. appl. Phys. 23, 137—141 (1952).

Mandelbrot, Benoît: Sur la notion générale d'information et la durée intrinsèque d'une stratégie. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1345—1347 (1952).

Statistik:

● Chambers, E. G.: Statistical calculations for beginners. 2nd ed. Cambridge: At the University Press 1952. X, 169 p. 12 s. 6 d.

● Meltzer, Hans: Wahrheit und Wahrscheinlichkeit in der Statistik. (Schriftenreihe der Wirtschaftshochschule Mannheim. Heft 3.) Mannheim: Wirtschaftshochschule 1952. 39 S.

Bartlett, M. S.: A sampling test of the χ^2 theory for probability chains. Biometrika 39, 118—121 (1952).

Ivanović, B.: Précision de la déviation standard pour une répartition quelconque. Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova, mat. Inst. 18, Nr. 2, 173—179 und französ. Zusammenfassg. 180 (1952) [Serbisch].

L'A. montre qu'il existe des cas où l'on peut à l'aide de la déviation standard, arriver à un résultat plus précis qu'à l'aide de moments d'ordres supérieurs et donne l'analyse de ces cas. Autoreferat.

Massey jr., Frank J.: Distribution table for the deviation between two sample cumulatives. Ann. math. Statistics 23, 435—441 (1952).

Cadwell, J. H.: The distribution of quantiles of small samples. Biometrika 39, 207—211 (1952).

Verf. leitet Approximationen für den Quotienten c_n der Streuungen der Mediane und des Mittelwertes in n -gliedrigen Stichproben und für die Kurtosis (normiertes 4-tes Moment) der Mediane n -gliedriger Stichproben her, die bereits für kleine n wesentlich genauer sind als die asymptotisch für $n \rightarrow \infty$ geltenden Formeln von T. Hojo (dies. Zbl. 4, 359). Desgleichen werden für die Stichprobenverteilung des p -ten Quantils Erwartungswert und Varianz approximiert. M.-P. Geppert.

Banerjee, D. P.: On the distribution of the range of variation of the ordered variates in samples of n from normal universe. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 35, 24—26 (1952).

The author derives the distribution of t , the range of variation (= difference between the extreme sample values) and of $\frac{1}{2} s$, the deviation between the sample mean and the mean of the extremes, from the joint distribution of $u = \frac{1}{2} (t + s)$ and $v = \frac{1}{2} (t - s)$. The expression contains functions $B_r(x)$ defined by
$$\int_0^x \exp \left\{ - \frac{t^2}{[2 \sigma^2 r (r + 1)]} \right\} B_{r-1}(t) dt, \quad B_0(x) = 1.$$
 A number of misprints disfigure the paper. St. Vajda.

Wishart, John: Moment coefficients of the k -statistics in samples from a finite population. Biometrika 39, 1—13 (1952).

Extending work done by Tukey (this Zbl. 40, 363), the author presents formulae for the moment coefficients of the distributions of sample moment statistics (or k -statistics) from finite populations. Formulae up to the 6th order and some basic results for the 7th and 8th order are given. Typical formulae are, for instance, $k_i k_1 = k_{i+1} / [n + k_{i1}]$ for $i = 1, 2, \dots$. Here the k_{rs} are Tukey's generalised k -statistics which are unbiased estimates of the products of cumulants $k_r k_s$. The author makes use of various short-cuts and refers, for the justification of one of them, to M. G. Kendall (see following review). St. Vajda.

Kendall, M. G.: Moment-statistics in samples from a finite population. *Biometrika* 39, 14—15 (1952).

The purpose of this paper is to prove the validity of the combinatorial method developed by Fisher and used by Wishart in „Moment coefficients of the k -statistics in samples from a finite population“ (see preceding review), to derive the moment statistics of sample moment statistics. The methods of the author can also be used to find an unbiased estimator of a function of moments or cumulants. *St. Vajda.*

Nair, K. R.: Tables of percentage points of the „studentized“ extreme deviate from the sample mean. *Biometrika* 39, 189—191 (1952).

May, Joyce M.: Extended and corrected tables of the upper percentage points of the „studentized“ range. *Biometrika* 39, 192—193 (1952).

Pillai, K. C. S.: On the distribution of „studentized“ range. *Biometrika* 39, 194—195 (1952).

van der Heiden, J. A.: On a correction term in the method of paired comparisons. *Biometrika* 39, 211—212 (1952).

James, G. S.: Notes on a theorem of Cochran. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 48, 443—446 (1952).

After introductory remarks about theorems by Cochran (this *Zbl.* 9, 120, Theorem II of the paper) and by Fisher [*Metron* 5, Nr. 3, 90—104, 109—120 (1925)], the author mentions that Kendall's proof of a modification of the former (The advanced theory of statistics, vol. 2, London 1948) should be amended to make it fully conclusive. He then proves three theorems which may be stated as follows: Let q_j ($j = 1, \dots, k$) be real quadratic forms of n independently distributed standard normal deviates x_i , with ranks n_j and such that $\sum_j q_j = \sum_i x_i^2$. Then each of the following statements implies the other two: (i) $\sum_j n_j = n$; (ii) each q_j is a χ^2 variable; (iii) the q_j are distributed independently. Moreover, (iv) in every case q_j has n_j degrees of freedom. [Cochran has proved that (i) is a necessary and sufficient condition for (ii), (iii) and (iv)]. *St. Vajda.*

Daniels, H. E.: The covering circle of a sample from a circular normal distribution. *Biometrika* 39, 137—143 (1952).

The author defines the covering circle of a sample of size n from a circular normal distribution as the smallest circle containing on or within it all sample points. He first derives the joint distribution of the radius r of this circle and the distance ρ between its centre and the parent mean and hence the distributions of r and ρ separately. A table is given to illustrate the former. The variables r and ρ are, of course, bivariate analogues of the half-range and the midrange-point of a univariate sample and r may be used as a measure of dispersion. *St. Vajda.*

Harris, Lee, B.: On a limiting case for the distribution of exceedances, with an application to life-testing. *Ann. math. Statistics* 23, 295—298 (1952).

Nach der von Gumbel und v. Schelling (dies. *Zbl.* 38, 90) allgemein für den m -größten Wert aufgestellten Formel ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, daß in einer weiteren Stichprobe vom Umfang N der größte Wert, der in einer vorausgehenden Stichprobe von n Beobachtungen aufgetreten ist, höchstens x -mal überschritten wird,

$$W(n, 1, N, x) = 1 - \left[\binom{N}{x+1} / \binom{N+n}{x+1} \right].$$

Hieraus gewinnt Verf. für den Grenzfall, daß $x = kN$ mit N gegen unendlich geht, (1)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W(n, 1, N, kN) = 1 - (1 - k)^n$$

bzw. die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(k) = n(1 - k)^{n-1}$. Da (1) zugleich auch, durch die Symmetrie des Problems bedingt, die Wahrscheinlichkeit dafür darstellt, daß in einer großen Stichprobe höchstens ein Bruchteil k der Beobachtungen

kleiner als die kleinste Beobachtung in der ursprünglichen (vorausgehenden) Stichprobe von n Beobachtungen ausfallen wird, kann eine Prüfung der Lebensdauer von n Einheiten abgebrochen werden, sobald eine Einheit ausfällt. Formel (1) liefert dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß höchstens 100 $k\%$ der Einheiten in einer Zeitspanne ausscheiden werden, die kürzer ist als die Dauer der so angestellten Prüfung.

G. Friede.

Ehrenberg, A. S. C.: On sampling from a population of rankers. *Biometrika* **39**, 82—87 (1952).

Consider n objects ranked by m observers. As a measure of agreement among the m rankings, the author proposes

$$u = 1 - 2 \binom{m}{2}^{-1} \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i < j}^n r_{ij} (m - r_{ij}),$$

where r_{ij} is the number of observers according to which object i ranks higher than object j . The statistic u is the average of Kendall's τ taken for all pairs of rankings; it is also identical with a statistic proposed by Kendall as a measure of agreement among paired comparisons performed by different observers. For the null case that all rankings are random and independent, the author gives the four first moments of u and an approximate distribution of Pearson's type III. A few results concerning the non-null case are also given.

G. Elfving.

Buchman, E. N.: Berechnung des Umfangs einer Stichprobe bei Bestimmung der Mittelwerte der statistischen Charakteristika auf rechnerischem Wege. *Priklad. Mat. Mech.* **16**, 79—84 (1952) [Russisch].

Wenn eine gesuchte Größe y nicht selbst beobachtet, sondern nur aus einer Reihe anderer, beobachtbarer Größen x_i errechnet werden kann, taucht die Frage auf, wieviele von jeder dieser Größen benötigt werden, damit der Fehler der gesuchten Größe mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit einen gegebenen Wert nicht überschreitet. Die Aufgabe ist zunächst unbestimmt, weil bei Änderung der Zahl der Beobachtungen für ein x_i sich die erforderlichen Zahlen für die anderen x_i ändern. Sie wird erst durch die Hinzunahme ergänzender Bedingungen bestimmt. Verf. leitet zunächst aus der Abhängigkeit, die zwischen der Streuung von y und den Streuungen der x_i unter gewissen Voraussetzungen besteht, eine Bedingung für die Mindestzahl jedes der x_i ab unter der Voraussetzung, daß die Beobachtungszahlen der anderen x_i ins Unendliche streben. Dann führt er als ergänzende Bedingung ein, daß die Fehlaufwendung an Beobachtungsarbeit möglichst klein wird. Die gewonnenen Ergebnisse wendet er auf ein Beispiel aus der Fernsprechtechnik an.

P. Lorenz.

Jones, Howard L.: Formulas for the group sequential sampling of attributes. *Ann. math. Statistics* **23**, 72—87 (1952).

The author considers inspection plans where an initial sample of size $v_0 \geq 0$ is followed by further samples all of the same size $v = 1/s > v_0$, as long as $n s - h_1 < d < n s + h_2$ holds, where d is the number of defective items, n is the number of items inspected and $1/s$, h_1/s , h_2/s and $h_1 + h_2$ are suitably selected positive integers. He deduces formulae for the average value of n , dependent on the fraction defective p and on the probability L_p of accepting the lot (because of $d \leq n s - h_1$). He remarks on the estimation of p and of L_p . When $n s - h_1$ is an integer, his results are equivalent to those obtained by Bartky [*Ann. math. Statistics* **14**, 363—377 (1942)].

St. Vajda.

Pinel, Jacques: Sur la définition et sur quelques moyens de calcul de l'efficacité d'une méthode de classification et de recherche. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 2141—2143 (1952).

Verf. betrachtet Einteilungen von Gesamtheiten, die ein möglichst schnelles Aufsuchen bestimmter Elemente gestatten. Er definiert als Effizienz k einer Einteilung

das Verhältnis der Anzahl der Elemente der Gesamtheit zur mittleren Anzahl der Vergleiche, die notwendig sind, um ein Element aufzufinden. Ist die Gesamtheit nach der Größe eines stetigen Merkmals x mit der Verteilung $y(x)$ eingeteilt und ist es nötig, beim Aufsuchen eines Elementes x alle Elemente aus dem Intervall $[x - a, x + b]$ (a, b Sicherheitsgrenzen) heranzuziehen, so ist $k^{-1} = \int Y y dx$ mit

$$Y = \int_{x-a}^{x+b} y dx. \quad k \text{ wird für ein gaußverteiltes Merkmal berechnet. In ähnlicher}$$

Weise werden Untersuchungen über die Effizienz für Einteilungen nach mehreren gaußverteilten Merkmalen durchgeführt. *E. Walter.*

Sitgreaves, Rosedith: On the distribution of two random matrices used in classification procedures. *Ann. math. Statistics* **23**, 263—270 (1952).

The classification problem referred to in the title is that of attributing a p -dimensional chance vector, known to consist of observations from either population π_1 or π_2 , when N_1 and N_2 earlier observations of such chance vectors are known to belong to π_1 and π_2 respectively. Extending investigations by Wald [*Ann. math. Statistics* **15**, 283—296 (1944)] and T. W. Anderson [*Psychometrika* **16**, 31—50 (1951)] the author derives the distributions of $Y' B^{-1} Y$ and of $Y' A^{-1} Y$ where $Y = (Y_1, Y_2)$, with Y_1 and Y_2 being p -dimensional normal variables, A is a $p \times p$ symmetrical matrix with a Wishart distribution involving n degrees of freedom and $B = A + Y Y'$. It is assumed that the vectors of expected values of Y_1 and Y_2 are proportional. *St. Vajda.*

Paulson, Edward: On the comparison of several experimental categories with a control. *Ann. math. Statistics* **23**, 239—246 (1952).

Verf. entwickelt ein statistisches Verfahren, das bei Vergleich von $k - 1$ experimentellen Klassen mit einer Standardklasse der geeigneten Auswahl der „besten“ unter k Klassen dient auf Grund einer Stichprobe von je n aus jeder der k Klassen. Unter der Annahme, daß alle k Klassen Π_i Normalverteilung mit gleicher Streuung σ um die Klassenmittel m_i aufweisen, wird, je nachdem, ob

$$\bar{x}^* - \bar{x}_1 \geq \text{oder} < \lambda \sigma \sqrt{2/n}$$

ist, Π^* oder Π_1 als beste entschieden; hierbei ist \bar{x}_i der Mittelwert der n Proben aus Π_i , $\bar{x}^* = \text{Max}(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_k)$. Verf. bestimmt λ und n zunächst exakt, sodann approximativ aus den Irrtumswahrscheinlichkeiten α, β 1. und 2. Art dafür, Π_1 auszuwählen, obwohl nicht $m_1 > m_i$ ($i = 2, \dots, k$) gilt, bzw. nicht Π_k auszuwählen, obwohl $m_k > m_i$ ($i = 1, \dots, k - 1$). Bei unbekanntem σ , das aus den $n k$ Probenwerten geschätzt wird, komplizieren sich die Rechnungen. Analog wird unter Heranziehung der Arcsinus-Transformation der binomische Fall behandelt, in welchem für die „Güte“ einer Klasse Π_i nicht ein Mittelwert m_i , sondern eine Erfolgswahrscheinlichkeit P_i maßgebend ist. *M.-P. Geppert.*

Williams, R. M.: Experimental designs for serially correlated observations. *Biometrika* **39**, 151—167 (1952).

Let there be a number of treatments and n observations y_i which can be represented by $y_i = x_i + a_{[i]}$, where $a_{[i]}$ is the effect of the treatment applied to the i -th plot and x_i is an error component. The latter is assumed to satisfy a normal stationary Markoff process of the form (i) $x_i = \rho x_{i-1} + \varepsilon$ or (ii) $x_i + d_1 x_{i-1} + d_2 x_{i-2} = \varepsilon$. Equations for the calculation of the treatment effects and formulae for the efficiency of designs relative to a randomized block design are given. Designs which are particularly considered are those in which each treatment occurs equally often adjacent [and for (ii) also adjacent but one] to every other treatment [or, for (i) every treatment including itself]. The effect of certain forms of deviation from the autoregressive types given above is discussed and applications to experimental data are made. *St. Vajda.*

Patterson, H. D.: The construction of balanced designs for experiments involving sequences of treatments. *Biometrika* **39**, 32—48 (1952).

Connor jr., W. S.: On the structure of balanced incomplete block designs. *Ann. math. Statistics* **23**, 57—71 (1952).

Eine „ausgewogene unvollständige Blockanordnung“ wird durch eine rechteckige Matrix, die „Inzidenzmatrix“ N , mit v Zeilen und b Kolonnen beschrieben, in der die Zeilensummen $= r$, die Spaltensummen $= k$ und die Produktsummen zweier verschiedener Zeilen $= \lambda$ sind. Von den die notwendigen Bedingungen $b k = v r$, $r(k-1) = \lambda(v-1)$ und $v \leq b$ erfüllenden Wertekombinationen v, b, r, k, λ mit $r \leq 10$ blieben bisher 4, für die weder eine Anordnung noch die Unmöglichkeit einer solchen gezeigt werden konnte. Vorliegende Arbeit beweist die Unmöglichkeit der Anordnungen (21, 28, 8, 6, 2) und (36, 45, 10, 8, 2), so daß nur noch (46, 69, 9, 6, 1) und (51, 85, 10, 6, 1) ungeklärt bleiben. — Das wesentliche Hilfsmittel ist das folgende Theorem: Ergänzt man N durch t weitere Zeilen der Gestalt $(I_t, 0)$ wo I_t die t -reihige Einheitsmatrix ist, zu der Matrix N_1 , so ist

$$|N_1 N_1'| = r^{-t+1} (r - \lambda)^{v-t-1} |C_t|,$$

wo die „charakteristische Matrix“ C_t nur von den ersten t Spalten von N abhängt. Dabei ist $|C_t| \geq 0$ bei $t < b - v$, $|C_t| = 0$ bei $t > b - v$, während bei $t = b - v$ gilt: $|N_1 N_1'|$ ist ein volles Quadrat. Hieraus folgt insbesondere für die Inzidenzzahl σ zwischen zwei Spalten die scharfe Abschätzung:

$$k + \lambda - r \leq \sigma \leq [2 \lambda k + r(r - \lambda - k)]/r.$$

Über die Struktur der Anordnungen mit $v = k(k+1)/2$, $b = (k+1)(k+2)/2$, $r = k+2$, $\lambda = 2$ werden Einzelergebnisse gewonnen, die zum Beweise der Unmöglichkeit obiger zwei Anordnungen benutzt werden zusammen mit einem schon bei Shrikhande (dies. Zbl. **40**, 362) angewendeten Theorem von Hasse.

H. Richter.

Grüneberg, Hans-Joachim: Die multiple Faktoranalyse. *Mittel.-Bl. math. Statistik* **4**, 9—31 (1952).

Expository paper, mainly based on L. L. Thurstone's approach (see Multiple-Factor Analysis, Chicago 1947; this Zbl. **29**, 222).

St. Vajda.

Green jr., Bert F.: Latent structure analysis and its relation to factor analysis. *J. Amer. statist. Assoc.* **47**, 71—76 (1952).

Let the variables y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) be given, which may have, independently, the values 0 or 1. The latent structure model, as formulated by P. F. Lazarsfeld, postulates an „attitude distribution“ $\Phi(X)$ and functions $f_i(X)$, i. e. the probability of $y_i = 1$, given X . (The latter may be a vector of variables.) Let $p_{i_1 \dots i_k} = \int f_{i_1}(X) \dots f_{i_k}(X) \Phi(X) dX$ be the proportion of those individuals in a parent population for whom $y_{i_1} = \dots = y_{i_k} = 1$, and no other $y_i = 1$, and let this proportion, and others concerning other combinations of the y_i , be observed. It is the aim of latent structure analysis to find the functions $\Phi(X)$ and $f_i(X)$, given some restrictive assumptions about these functions. — The author generalises this scheme by allowing the variables to have continuous values and he shows that linear multiple factor analysis is a special case of his extended model. The possibility and potential usefulness of a yet more general model are also discussed.

St. Vajda.

Williams, E. J.: The interpretation of interactions in factorial experiments. *Biometrika* **39**, 65—81 (1952).

Verf. behandelt Versuche mit zwei und mehr Faktoren, deren Haupteinflüsse (main effects) nicht additiv ($a_i + b_j$), sondern für den einen Faktor A von der Form $a_i c_j + b_j$ seien. Die Gewichte c_j werden auf Grund der Stichprobe so bestimmt, daß die Haupteinflüsse maximal und die Wechselwirkungen minimal

resultieren, und bestimmen sich durch die größte charakteristische Wurzel s_1 einer Matrix, die im Falle von 2 Faktoren A, B

$$t_{jk} = \sum_i (x_{ij} - x_{.j}) (x_{ik} - x_{.k})$$

lautet, wobei $x_{ij}, x_{.j}$ die Mittelwerte der beobachteten Variablen für die Zelle A_i, B_j bzw. für die ganze Spalte B_j bedeuten; die übrigen nicht verschwindenden Wurzeln s_2, s_3, \dots bestimmen dann die Wechselwirkungen. Der Gedankengang wird auf verwickelte (confounded) Versuchsanordnungen ausgedehnt. Approximative Signifikanzteste für die restlichen Wechselwirkungen und für die Eignung hypothetischer Gewichte werden insbesondere hergeleitet für den Fall, daß die charakteristische Wurzel der entsprechenden Populationsmatrix groß sei; wenn nur zwei Stichproben-Wurzeln s nicht verschwinden, wird dann deren Simultanverteilung in eine Reihe nach Bessel-Funktionen mit imaginärem Argument entwickelt. Fragestellung und Methodik sind naturgemäß engstens verwandt mit denen der Diskriminanzanalyse sowie denen der kanonischen Analyse eines Variablensatzes.

M.-P. Geppert.

Haldane, J. B. S.: Simple tests for bimodality and bitangentiality. *Ann. Eugenics* **16**, 359—364 (1952).

Walsh, John E.: Operating characteristics for tests of the stability of a normal population. *J. Amer. statist. Assoc.* **47**, 191—202 (1952).

Graf, Ulrich und Hans-Joachim Henning: Mehrdimensionale Operationscharakteristiken. *Mittel.-Bl. math. Statistik* **4**, 205—208 (1952).

Westenberg, J.: A tabulation of the median test with comments and corrections to previous papers. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **55**, 10—15; *Indagationes math.* **14**, 10—15 (1952).

Verf. greift zurück auf seine früheren Arbeiten [*Nederl. Akad. Wet., Proc.* **50**, 640—648 (1947) und dies. *Zbl.* **29**, 371; **30**, 310; **36**, 211; **39**, 146], ergänzt sie bezüglich historischer Hinweise auf ältere Autoren, diskutiert die Anwendbarkeit ein- bzw. zweiseitiger Signifikanzteste und stellt seinen früheren (vgl. dies. *Zbl.* **36**, 211) Tabellen einseitiger kritischer Grenzen für den Mediantest eine neue solche zweiseitiger Abgrenzungen gegenüber. Ferner werden Flüchtigkeitsfehler der früheren Darlegungen berichtigt.

M.-P. Geppert.

Bradley, Ralph Allan: Corrections for nonnormality in the use of the two-sample t - and F -tests at high significance levels. *Ann. math. Statistics* **23**, 103—113 (1952).

Durch geometrische Betrachtungen im Stichprobenraum leitet Verf. für den Student-Fisher-Parameter

$$t = \{(N_1 + N_2 - 2) N_1 N_2\}^{1/2} \cdot (N_1 + N_2)^{-1/2} \cdot (\bar{x} - \bar{y}) \cdot \left\{ \sum_{\alpha} (x_{\alpha} - \bar{x})^2 + \sum_{\beta} (y_{\beta} - \bar{y})^2 \right\}^{-1/2},$$

der dem Vergleich der Mittelwerte \bar{x}, \bar{y} einer N_1 - und einer N_2 -gliedrigen Stichprobe x_1, \dots, x_{N_1} bzw. y_1, \dots, y_{N_2} dient, und für den Parameter

$$F = \left\{ (k-1)^{-1} \sum_{i=1}^k N_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \right\} \left/ \left\{ (N-k)^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=1}^{N_i} (x_{\alpha i} - \bar{x}_i)^2 \right\} \right\},$$

der der Prüfung der Hypothese dient, daß k Gruppen $x_{1i}, \dots, x_{N_i i}$ ($i = 1, \dots, k$) mit Mittelwerten \bar{x}_i und Gesamtmittelwert \bar{x} ein und derselben Ausgangsgesamtheit entnommen seien, Korrekturfaktoren ab, mit denen die unter Annahme normal verteilter Ausgangsgesamtheit gewonnenen Wahrscheinlichkeiten für einen mindestens $|t|$ bzw. F betragenden Parameterwert zu multiplizieren sind, wenn die Ausgangsgesamtheit nicht normal ist. Dabei dehnt Verf. eine von H. Hotelling zur Korrektur des Student-Tests verwandte Methode auf den F -Test aus. Als Spezialfall für normale Ausgangsgesamtheit enthält der Gedankengang des Verf. eine neue Ableitung des klassischen t - bzw. F -Tests. Für eine umfassende Klasse nicht

normaler Ausgangsverteilungen wird eine Methode zur Approximation der exakten Korrekturfaktoren beschrieben.

M.-P. Geppert.

Williams, E. J.: Some exact tests in multivariate analysis. *Biometrika* **39**, 17–31 (1952).

Für die Fragestellung der Diskriminanzanalyse wird eine allgemeine Methode zur Herstellung exakter, d. h. von den Parametern der Ausgangsgesamtheit unabhängiger, Signifikanztests entwickelt. Zur Prüfung einer hypothetischen linearen Trennfunktion y , die der Unterscheidung von $q + 1$ nach den p Variablen x_1, \dots, x_p mit gleichen Varianzen und Kovarianzen, aber verschiedenen Mittelwerten, multinormal verteilten Gesamtheiten dienen soll, wird die bedingte Simultanverteilung der Θ_i und Φ_k bei gegebenem η bestimmt, wo η das y entsprechende Diskriminanzverhältnis (Verhältnis der Zwischengruppenquadratsumme zur totalen Quadratsumme), Θ_i ($i = 1, 2, \dots, p$) bei geeigneter Normierung die Zwischen-Gruppen-Quadratsummen der x_i (oder Stichproben-Wurzeln) und Φ_k ($k = 1, 2, \dots, p - 1$) die nach Eliminierung von y verbleibenden $p - 1$ Stichprobenwurzeln bedeuten. Auf Grund derselben wird die Nullhypothese geprüft, daß 1. die Gruppenmittel in einer Geraden liegen, d. h. ein einziger Trennparameter genügt, 2. der p -dimensionale Vektor y die Richtung dieser Geraden bestimmt. Für die Spezialfälle $p = 2$ und $q = 2$ führen die Tests auf Kovarianz- und Varianzanalysen.

M.-P. Geppert.

Marriott, F. H. C.: Tests of significance in canonical analysis. *Biometrika* **39**, 58–64 (1952).

Let two sets of variables x_1, \dots, x_p and y_1, \dots, y_q be given ($p \leq q$). Wilks (this Zbl. **6**, 23) has proposed $L = W/T$ as measure of the degree of association between the x 's and the y 's, when T is the dispersion matrix of the y 's and W the matrix of residuals after regression on the x 's. The p roots of $|T - W - l^2 T| = 0$ in descending order of magnitude l_1, \dots, l_p are called the first, second, \dots canonical correlations. In the main part of the paper the author derives the exact distribution of l_1 for $p = 2$, and for $p = 3, q = 4$. Significance tests and significance levels are given for other pairs of p, q . An approximate test is suggested and remarks are made about testing higher canonical correlations.

St. Vajda.

Hemelrijk, J.: A theorem on the sign test when ties are present. *Indagationes math.* **14**, 322–326 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **55**, 322–326 (1952).

Beim Zeichentest wird die Nullhypothese, daß zwei voneinander unabhängige stochastische Variablen X, Y der gleichen Verteilung folgen, geprüft auf Grund der Anzahl n_1 positiver Differenzen unter n unabhängigen Beobachtungen $x - y$. Wenn außer den n_1 positiven und den n_2 negativen Differenzen noch $n_0 = n - n_1 - n_2$ Null-Differenzen auftreten, werden diese entweder unterdrückt (1) oder je zur Hälfte n_1 und n_2 hinzugefügt (2). Verf. beweist, daß für die entsprechenden auf den Signifikanzniveaux α_1, α_2 beruhenden Potenzfunktionen (power-functions) der beiden Tests, $\beta_1(p_1, p_2)$ und $\beta_2(p_1, p_2)$, wobei $p_1, p_2 = 1 - p_1$ die wahren Wahrscheinlichkeiten für positive bzw. negative Differenzen darstellen,

$$\beta_2(p_1, p_2) \leq \beta_1(p_1, p_2), \text{ wenn } \alpha_2 \leq \alpha_1 < 1,$$

gilt.

M.-P. Geppert.

Terpstra, T. J.: The asymptotic normality and consistency of Kendall's test against trend, when ties are present in one ranking. *Indagationes math.* **14**, 327–333 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **55**, 327–333 (1952).

Es liegen $N = \sum n_i$ unabhängige, kontinuierliche Variablen X_{ih} ($i = 1, 2, \dots, l$; $h = 1, 2, \dots, n_i$) vor, von denen jeweils die n_i Variablen X_{ih} ($h = 1, \dots, n_i$) der gleichen Verteilung folgen. Auf Grund von N entsprechenden Proben x_{ih} ($i = 1, \dots, l$; $h = 1, \dots, n_i$) wird die Hypothese H_0 , daß alle l Verteilungen der X_{ih} ($i = 1, \dots, l$) gleich seien, geprüft gegen die Alternativhypothese H eines

Trends, der sich in

$$\Pr [X_{ih} < X_{jk}] = (1 + \varepsilon_{ji})/2, \quad -1 \leq \varepsilon_{ji} \leq 1,$$

mit $\varepsilon_{ji} > 0$ ausdrückt. Hierzu dient die Größe $T = \sum_{i < j} U_{ij}$, wo U_{ij} die Anzahl

der Paare $h \leq n_i$, $k \leq n_j$ mit $i < j$ und $x_{ih} < x_{jk}$ bedeutet und Paare gleicher Beobachtungen x_{ih} , x_{jk} halb zählen. Verf. beweist die Relation $2T - S = \sum_{i < j} n_i n_j$

zu Kendalls Rangzahl S , berechnet Erwartungswert und Varianz von T unter H_0 , beweist mit Hilfe der charakteristischen Funktion, daß bei wahren H_0 T asymptotisch normal ist, und umreißt die Klasse von Alternativhypothesen H , gegen welche der auf T beruhende Test konsistent ist. M.-P. Geppert.

Hemelrijk, J.: Note on Wilcoxon's two-sample test when ties are present.

Ann. math. Statistics **23**, 133—135 (1952).

The author notes that Wilcoxon's U for two samples (x_1, \dots, x_n) , (y_1, \dots, y_m) and Kendall's S for the pairs $(x_1, 0), \dots, (x_n, 0)$, $(y_1, 1), \dots, (y_m, 1)$ satisfy the relation $2U + S = mn$. Various results concerning the distribution of S in case of ties thus become applicable to U . G. Elfving.

Levene, Howard: On the power function of tests of randomness based on runs up and down. Ann. math. Statistics **23**, 34—56 (1952).

The hypothesis of randomness implies that the joint cumulative distribution function $F^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ of n observed variables is of the form $\prod_i F^{(1)}(x_i)$. The

author shows that various tests based on the number of runs up and down use statistics which have an asymptotic normal distribution not only under randomness [this was proved by Wolfowitz, Ann. math. Statistics **15**, 163—172 (1944)] but also under a number of alternatives. He shows how the concept of the likelihood ratio suggests certain tests and proves that the power of these tests depends on the covariance matrix under the hypothesis of randomness and on the expected values under the alternative hypothesis. A general method for calculating the latter is presented for certain cases. Formulae and numerical values for the covariance matrix, under the hypothesis of randomness, of runs up and runs down of given length and of given minimum length are given in an appendix. [For the covariance matrix of the sum of numbers of runs up and runs down see Levene and Wolfowitz, Ann. math. Statistics **15**, 58—69 (1944)]. St. Vajda.

Hoeffding, Wassily: The large-sample power of tests based on permutations of observations. Ann. math. Statistics **23**, 169—192 (1952).

Let x be a random variable and H a hypothesis which implies that the distribution of x is invariant under the transformations g of a finite group of order M . Let $t^{(1)}(x) \leq \dots \leq t^{(M)}(x)$ be the values $t(g(x))$ for all g of the group. Denote, for a chosen non-negative fraction α , the value of $M - [M\alpha]$ by k . A test is defined by a function $\Phi(x)$, which gives the probability of rejecting H dependent on x . Let $\Phi(x) = 1$ if $t(x) > t^{(k)}(x)$, $= 0$ if $t(x) < t^{(k)}(x)$, and $= a(x)$ if $t(x) = t^{(k)}(x)$, where $a(x)$ is such that the test is similar of size α for the test H (i. e. whenever H is true, the probability of its rejection is α .) — The author investigates the power of such tests and concludes that for increasing sample size they are asymptotically as powerful as certain related standard parametric tests. The argument rests on a study of the convergence in probability of $t^{(k)}(x)$. St. Vajda.

Tiago de Oliveira, J.: A distribution-free test for randomness in ordered sequences. Revista Economia **5**, 13—14 (1952).

Zur Prüfung einer Beobachtungsreihe $S = (x_1, \dots, x_n)$ auf Zufälligkeit wird der folgende einfache nichtparametrische Test entwickelt. Sei x_i der kleinste und x_j der größte Wert von S , dann ist bei großem n die Zufälligkeitshypothese zu verwerfen, wenn $|i - j|/n > 1 - \sqrt{\alpha}$ (α vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit). Der Test ist anwendbar, wenn ein Trend vermutet wird. E. Walter.

Cox, D. R.: Sequential tests for composite hypotheses. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 290—299 (1952).

To begin with, the author proves a fixed-sample-size theorem to the effect that when a jointly sufficient set of estimators for unknown parameters exists, and when certain conditions, too complicated to be quoted here hold, then a likelihood can be factorised in such a way that the first factor contains only one parameter and its estimator, and the second is independent of that parameter. This theorem enables him to construct a sequential likelihood ratio test. He states the conditions that these tests have a probability one to terminate and presents various applications. He says that „it is almost certain that in general these tests are not optimum“ and gives reasons for his conjecture. Finally, he shows how all his tests can be obtained by Wald's method of weight functions. *St. Vajda.*

Barnard, G. A.: The frequency justification of certain sequential tests. Biometrika 39, 144—150 (1952).

The author shows that sequential tests which generalise his sequential t -test (this Zbl. 39, 354) have a „frequency justification“, by determining the (approximate) frequencies of errors of the two kinds. He discusses the bearing of his results on the problem of „reconciling“ three theories of statistical inference, which he describes as those of Fisher, Neyman-Pearson, and Jeffreys. *St. Vajda.*

Moshman, Jack: Testing a straggler mean in a two-way classification using the range. Ann. math. Statistics 23, 126—132 (1952).

Given a two-way classification of data x_{ti} in k rows and n columns ($t = 1, 2, \dots, k$; $i = 1, 2, \dots, n$) with row-means \bar{x}_t , column means \bar{x}_i and grand mean \bar{x} we may wish to test whether the largest of (say) the row means $\bar{x}_{\max} = \max \bar{x}_t$ (the „straggler mean“) differs significantly from \bar{x} . This may be done by referring the statistic $u = \sqrt{n} (\bar{x}_{\max} - \bar{x}) / s_{\text{error}}$ to K. R. Nairs (this Zbl. 30, 309) Tables of the „studentised extreme deviate“. The author is concerned with a corresponding short cut statistic in which σ_{error} is estimated by a range statistic in place of the error mean square s_{error}^2 . Following Hartley (this Zbl. 39, 145) he forms residuals from row means $y_{ti} = x_{ti} - \bar{x}_t$, for each column computes the range w_i of the y_{ti} and uses the mean range $\bar{w} = (1/n) \sum w_i$ for estimating σ_{error} . Finally, following Patnaik (this Zbl. 37, 92) he approximates to the distribution of \bar{w}/c by a χ -distribution for fractional degrees of freedom so that approximate percentage points for $(\bar{x}_{\max} - \bar{x})/\bar{w}$ can be obtained from those of u . In the tables of percentage points provided all means are replaced by totals for computational convenience and provision is made for interchanging the roles of rows and columns. *H. O. Hartley.*

Cavé, René: Perfectionnement des méthodes modernes de contrôle statistique par mesurs. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2145—2146 (1952).

In der Qualitätskontrolle werde ein Posten abgelehnt bzw. angenommen, je nachdem der Mittelwert einer normal verteilten Meßgröße in einer n -gliedrigen Stichprobe vom Sollwert 0 übermäßig abweicht oder nicht. In der Operationscharakteristik des Verfahrens wird die Annahmewahrscheinlichkeit $P(\lambda, n)$ dargestellt als Funktion der Wahrscheinlichkeit $p(\mu, \lambda)$ für Ausschuß, d. h. dafür, daß ein Stück, das einem Posten mit wahren Mittelwert $\lambda \sigma$ entstammt, außerhalb der Toleranzgrenzen $\pm \mu \sigma$ um den Sollwert 0 falle. Verf. bestimmt mit ihrer Hilfe zu gegebenen Risiken erster (α, p_1) und zweiter Art (β, p_2) den zugehörigen Umfang n der einfachen Stichprobe; ferner, falls Schätzungen von Mittelwert und Streuung der wahren Mittelwerte aus früheren Fabrikationserfahrungen vorliegen, die optimale Stichprobenquote $q = n/N$ (N = Anzahl der Stücke zwischen zwei Stichprobenentnahmen). Schließlich wird eine Ausdehnung des Begriffs Kontrollgrenzen vorge schlagen. *M.-P. Geppert.*

Maguire, B. A., E. S. Pearson and A. H. A. Wynn: The time intervals between industrial accidents. *Biometrika* **39**, 168—180 (1952).

Jebe, Emil H.: Estimation for sub-sampling designs employing the county as a primary sampling unit. *J. Amer. statist. Assoc.* **47**, 49—70 (1952).

Lloyd, E. H.: On the estimation of variance and covariance. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A* **63**, 280—289 (1952).

Consider n independent pairs of observations X_i, Y_i with common second order moments $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho\sigma_1\sigma_2$, and with expectations $E(X_i) = \sum_j p_{ij} a_j, E(Y_i) = \sum_j q_{ij} b_j$, where the p_{ij}, q_{ij} are known and the a_j, b_j have to be estimated by least squares methods. It is always possible to treat the X_i and the Y_i separately; yet when σ_1, σ_2, ρ are known it is in general more advantageous to use the observations jointly. The author derives a necessary and sufficient condition (on the p_{ij}, q_{ij}) for the two estimation procedures to lead to the same result; the case $p_{ij} \equiv q_{ij}$ belongs to this category. He also gives an estimate of $\rho\sigma_1\sigma_2$ based on the (separate) residuals in X and Y , and derives the sampling variances of this estimate and of the usual estimates of σ_1^2, σ_2^2 . The argument is distribution-free. G. Elfving.

Lloyd, E. H.: Least-squares estimation of location and scale parameters using order statistics. *Biometrika* **39**, 88—95 (1952).

Let X_1, \dots, X_n be a sample from a population with c. d. f. $F((x - \mu)/\sigma)$, where $F(u)$ is a known distribution function and the parameters μ, σ have to be estimated. The author points out that this may be achieved by applying the least squares technique to the ordered sample Y_1, \dots, Y_n where the Y_i are the X_i taken in order of magnitude. The „ordered“ estimates $\hat{\mu}$ and $\hat{\sigma}$ are, of course, unbiased and of minimum variance among all unbiased estimates that are linear functions of the Y_i . If $\mu = E(X)$, it follows that $\text{var}(\hat{\mu}) \leq \text{var}(X)$; a necessary and sufficient condition for strict equality is given. Formulas for the estimates and their variance matrix are derived and applied to the case of a sample from a rectangular distribution. G. Elfving.

Cox, D. R.: A note on the sequential estimation of means. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **48**, 447—450 (1952).

Let z_1, \dots be observations on independent random variables with mean θ and variance $v(\theta)$. Let $Z_m = \sum_{i=1}^m z_i$ and continue to make observations until the point (m, Z_m) reaches or crosses a given boundary (m, b_m) . The sample size when this happens be denoted by n . The author proves that under plausible assumptions $t_0 - v(t_0)/n(t_0 - b'_n), t_0 = Z_n/n$ where b'_n is the slope of the boundary at (n, b_n) , is an estimate of θ with bias $O(E(n)^{-2})$. Examples illustrate the result. *St. Vajda.*

Pompilj, Giuseppe: Logica della conformità. *Archimede* **4**, 22—28 (1952).

Verf. wiederholt zunächst seine und die seit 1939 von C. Gini vertretenen Einwände gegen die Berechtigung der statistischen Signifikanzprüfungen; nach Ansicht der Ref. vermögen diese Angriffe weder die von J. Neyman und S. E. Pearson begründete Theorie der Hypothesenprüfungen und Intervallschätzungen noch die von A. Wald darauf aufgebaute umfassendere der Sequenzanalyse und der Entscheidungsfunktionen zu erschüttern, da diese gerade die vom Verf. gerügten Fehlschüsse und widerspruchsvollen Absichten und Ziele bewußt verwerfen. Anfechtbar erscheint u. a. die Behauptung des Verf., daß es sinnlos sei, die Wahrscheinlichkeit eines bereits eingetroffenen Ereignisses zu berechnen, da diese notwendig 1 sei! Sodann versucht Verf. eine skizzenhafte Deutung der Testmethodik als Grundlage für die Beurteilung der Konformität reeller Versuchsergebnisse mit einem theoretischen Modell, die sich der landläufigen, allgemein anerkannten Interpretation der statistischen Testmethodik zu nähern scheint. M.-P. Geppert.

Chernoff, Herman and Henry Scheffé: A generalization of the Neyman-Pearson fundamental lemma. *Ann. math. Statistics* **23**, 213—225 (1952).

Let $m + n$ functions $f_1(x), \dots, f_m(x); g_1(x), \dots, g_n(x)$ of one variable and a function $\Phi(z_1, \dots, z_n)$ of n variables be given. It is required to find necessary and sufficient conditions for sets S which maximise $\Phi\left(\int_S g_1 dx, \dots, \int_S g_n dx\right)$ subject to $\int_S f_i dx = c_i$ ($i = 1, \dots, m$) where the c_i are given constants, and subject to the condition that $\left(\int_S g_1 dx, \dots, \int_S g_n dx\right)$ must lie in a given subset A of the n -dimensional space $Z = (z_1, \dots, z_n)$. The case $n = 1$, $\Phi = z_1$, $A = Z$ arises in the Neyman-Pearson theory of testing hypotheses. The problem of existence and necessary conditions was solved by Dantzig and Wald (this Zbl. **42**, 143). In the present paper their results are used to solve the problem outlined in the beginning, together with the problem of existence. An example is given and remarks are made about the computation of solutions.

St. Vajda.

Féron, Robert: Information et corrélation. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 1343—1345 (1952).

Verf. bezeichnet als Maß der Ungenauigkeit (imprécision) einer Zufallsvariablen Y mit der Verteilungsfunktion $F(y)$ ein Funktional $\mathfrak{F} = \Phi(F(y))$ von $F(y)$, das die Bedingungen 1. $\Phi(F(y)) = \Phi(F(y - a))$ für jedes a , 2. $\Phi(F(\lambda y)) \geq \Phi(F(y))$ für $\lambda \geq 1$ und 3. $\Phi(F(y)) \geq \int \Phi(F_x(y)) dG(x)$ für alle $F_x(y)$ und $G(x)$ mit $F(y) = \int F_x(y) dG(x)$ erfüllt. Zu diesem allgemeinen Ungenauigkeitsmaß für eine Zufallsvariable betrachtet Verf. zwei entsprechende Maße für die Beziehung zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y . Er definiert als Korrelationsindex das Verhältnis $C = \Delta \mathfrak{F} / \max \Delta \mathfrak{F}$, der durch Ausnutzung der Kenntnis von x und $F_x(y)$ erzielten Verminderung $\Delta \mathfrak{F} = \Phi(F(y)) - \Phi(F_x(y))$ der Ungenauigkeit von Y zur maximalen möglichen Verminderung und als harten (dure) Korrelationsindex das Verhältnis $C_D = D / \max \Delta \mathfrak{F}$, wobei $D = \Phi(F(y)) - \Phi(F_x^*(y))$ die Verminderung der Ungenauigkeit von Y durch Ausnutzung der Kenntnis von x und einer Funktion $\varphi(x)$ mit $F_x^*(y) = \psi(y - \varphi(x))$ und $\psi(y) = \int F_x(y + \varphi(x)) dG(x)$ bedeutet.

E. Walter.

Féron, Robert: De la régression. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 2143—2145 (1952).

Verf. definiert in Ergänzung der vorstehend referierten Arbeit als „neue“ Regressionslinie jede Funktion $\varphi(x)$, für die D ein Maximum annimmt, und als „neue“ Regressionsgeraden die Geraden $\varphi(x) = a^* x + c$, für die $D(a^*) = \max_a D(a)$ gilt (c willkürliche Konstante).

E. Walter.

Gebelein, Hans: Maximalkorrelation und Korrelationsspektrum. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 9—19 (1952).

Die vom Verf. in einer früheren Arbeit [dies. Zbl. **26**, 334] eingeführte Maximalkorrelation K zwischen zwei aleatorischen Variablen ist zwar invariant gegen Merkmalstransformationen, kann jedoch den Wert Eins auch in Fällen liefern, wo kein funktionaler Zusammenhang besteht. Verf. empfiehlt daher, zur Charakterisierung des Korrelationszusammenhanges neben K auch alle anderen Eigenwerte desjenigen Variationsproblems zu verwenden, aus dem K als der extreme Eigenwert berechnet wurde: „Korrelationsspektrum“ $K_1 = K, K_2, \dots$. Es werden die folgenden Fragen gestellt: a) Gibt es Verteilungen mit beliebig vorgeschriebenem Spektrum? b) Mit welcher Streuung werden die K_v bei Stichproben reproduziert? c) Läßt sich funktionaler Zusammenhang durch das Spektrum eindeutig charakterisieren? d) Wann haben Verteilungen das gleiche Spektrum? — Recht teilweise Antworten hierauf liefern die folgenden Ergebnisse: 1) Bei der Gaußschen Verteilung mit Korrelationskoeffizient r besteht das Spektrum aus den Potenzen von r . 2) Bei genannter Verteilung wächst die Streuung der Stichproben- K_v mit wachsendem v sehr rasch an. 3) Es wird in Abhängigkeit vom Korrelationskoeffizienten, resp. vom Spektrum, die Gesamtheit aller zwei-, resp. dreireihigen quadratischen Korrelationsmatrizen aufgestellt, für die die Marginalien Gleichverteilungen sind. Die Forderung der Nichtnegativität der Koeffizienten liefert für das Spektrum zulässige Variabilitätsbereiche, deren

Sinn jedoch nicht voll klar ist, da sie von einem Winkelparameter abhängen, dessen statistische Bedeutung nicht geklärt wird. — Die Arbeit schließt mit der Diskussion sehr spezieller vierreihiger Korrelationsmatrizen und mit dem Nachweis, daß das zur Konstruktion der Matrizen verwendete Verfahren bei (k, l) -Matrizen tatsächlich $kl - 1$ freie Parameter benutzt. — Trotz der fragmentarischen Behandlung hält Ref. den Grundgedanken für wesentlich. *H. Richter.*

West, Vincent I.: Replacing variables in correlation problems. *J. Amer. statist. Assoc.* **47**, 185—190 (1952).

Tocher, K. D.: On the concurrence of a set of regression lines. *Biometrika* **39**, 109—117 (1952).

Consider m two-variate samples $(x_{i1}, y_{i1}; \dots; x_{in_i}, y_{in_i})$ ($i = 1, \dots, m$), where the x_{ij} are known numbers and the y_{ij} independent and normally distributed random variables with means $\alpha_i + \beta_i x_{ij}$ and variance σ^2 . The parameters $\alpha_i, \beta_i, \sigma$ are unknown. It is required to test the hypothesis H_0 that the m regression lines have a common intercept on the x -axis, i. e., that $-\alpha_i/\beta_i = x_0$, where x_0 is an unknown number. The author presents a test procedure admitting a statement of type „the probability of wrongly rejecting H_0 is at most α , no matter what the value of x_0 may be“. In the case that H_0 is true, the same method leads to confidence sets X_α for x_0 , in the sense that the inequality $\Pr \{X_\alpha \text{ covers } x_0\} \geq 1 - \alpha$ holds true for all x_0 . Numerical procedures are worked out and exemplified.

G. Elfving.

Stange, K.: Über das Ausgleichen einer fehlerhaften linearen Punktreihe bei korrelativer Verknüpfung der Meßfehler. *Mittel.-Bl. math. Statistik* **4**, 48—70 (1952).

Dieses in der geodätischen Fachliteratur vielfach diskutierte Problem wird vom Verf. unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gelöst. Während bei den geodätischen Anwendungen das Ergebnis einer derartigen Ausgleichung wegen der Kleinheit der Meßfehler praktisch unabhängig ist von den Annahmen, die über die Fehlerhaftigkeit der X - und Y -Werte gemacht werden, ist das bei den großen Streuungen, die in der Statistik auftreten, nicht der Fall. Verf. untersucht zunächst die Frage, welcher Punkt der ausgleichenden Geraden bei zweidimensionaler Streuung einem gemessenen Punkt zuzuordnen ist. Es wird eine „Vorzugsrichtung“ festgelegt, in welcher der zugehörige „wahre“ bzw. ausgeglichene Punkt mit größter Wahrscheinlichkeit zu suchen ist. Dazu muß die mit dem Meßverfahren verbundene ebene Streumatrix bekannt sein, wobei es vielfach genügt, diese Matrix für einen Punkt der Reihe durch wiederholte Messung zu ermitteln. Der Ansatz, daß die Wahrscheinlichkeit der gemessenen Punktreihe bezogen auf die gesuchte ausgeglichene Punktreihe möglichst groß sein soll, führt im allgemeinen Fall auf ein System von Normalgleichungen für die unbekannten Parameter der ausgleichenden Geraden, das im Gegensatz zu dem üblichen Verfahren vermittelnder Beobachtungen nicht linear ist und iterativ gelöst werden muß. Die erhaltenen Formeln werden spezialisiert für den praktisch wichtigen Sonderfall, daß die Streumatrix längs der Geraden konstant ist. Es zeigt sich, daß die bisher bekannten Methoden Sonderfälle der hier gegebenen allgemeinen Lösung sind und daß ein eindeutiges Ausgleichungsergebnis nur mit Hilfe der Streumatrix erzielt werden kann. Die bei der Ausgleichung linearer Punktreihen vielfach benutzte sog. mittlere Regressionsgerade gibt, wie Verf. nachweist, nur unter ganz bestimmten Voraussetzungen richtige Ergebnisse. Die allgemeine Lösung wird trotz größeren Rechenaufwands auch bei verhältnismäßig genauen Messungen zu empfehlen sein, wenn man eine geringe systematische Verfälschung des Ausgleichungsergebnisses nicht in Kauf nehmen will.

W. Hofmann.

Joseph, A. W.: The Whittaker-Henderson method of graduation. *J. Inst. Actuaries* **78**, 99—114 (1952).

Verf. berichtet über die Whittakersche Methode in der Form, wie sie von Aitken und Henderson angegeben wurde. Für eine Folge von Werten u''_x ($a \leq x \leq b$) sollen geglättete Werte u_x ($a \leq x \leq b$) so bestimmt werden, daß der Ausdruck

$$\sum_{x=a}^{b-3} (\Delta^3 u_x)^2 + \varepsilon \sum_{x=a}^b (u_x - u''_x)^2$$

zu einem Minimum wird. Dabei stellt die erste Summe ein Maß für die Rauigkeit der geglätteten Werte und die zweite Summe ein Maß für die durch die Glättung hervorgerufenen Veränderungen der gegebenen Werte dar und ε ist eine Konstante,

die ein gewisses Gleichgewicht zwischen den beiden Summen herstellen soll. Man erhält Formeln von der Form: $u_x - u''_x = \frac{1}{\varepsilon} \Delta^6 u_{x-3}$ ($a + 3 \leq x \leq b - 3$) und je drei weitere Gleichungen für die beiden Ränder des Bereiches. Durch die Ränder wird eine kompliziertere Rechnung nötig. Die erste exakte Lösung stammt von Aitken. Verf. ergänzt die am häufigsten gebrauchten Formeln durch einige Zahlentafeln und ein Beispiel aus der Sterblichkeitsstatistik. *R. Ludwig.*

Grant, Alison M.: Some properties of runs in smoothed random series. *Biometrika* **39**, 198—204 (1952).

When a random series $\{x_t\}$ is smoothed into the series $\{z_t\}$ of moving averages $z_t = \frac{1}{a}(x_t + \dots + x_{t+a-1})$, the distributions of run length and run amplitude change. The author derives the former and a formula for computing the latter. It is found that the smoothing procedure suppresses the runs of short length both in number and in amplitude, whereas the runs of length a are increased in number.

G. Elfving.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Richards, Paul-I.: Étude statistique de la transmission d'un caractère héréditaire. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 505—506 (1952).

In a previous Note (this Zbl. **43**, 341) E. Borel formulated the problem of the extinction of family names in the following way: Consider n married men (n small) each having the same family name; each family has two children (probability equal to $\frac{1}{2}$ of a child being male) attaining age of marriage. We want to determine the probability $p_m(k)$ that after m generations there are k persons having the name in question. In the present note the generating function G_m of p_m is found and in particular for the probability of extinction of the name i. e. for $G_m(0)$ a simple approximation is indicated, namely

$$G_m(0) \sim \left[1 - \frac{4}{m+4} + \frac{4 \lg(1+m/4)}{(m+4)^2} \right]^n.$$

H. Geiringer.

Méric, Jean: Sur la transmission d'un caractère héréditaire dans les générations successives d'une population stationnaire. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 802—804 (1952).

In a previous note M. E. Borel has discussed the problem of the survival of family names, first aborded by F. Galton. The central question is to find the probability that, starting with n married men of the same family name there are in the m -th generation still k men carrying that name. In particular one is interested in the probability of an extinction of the line. This is a particularly simple chain process. Borel called attention to the apparition of the factor „5“ in some of these probabilities, and the present author gives the desired explanation, this fact being due to the factor $(1 + p q)^{2n-k} = (5/4)^{2n-k}$ for $p = q = 1/2$ and $k < 2n$. It might be worthwhile to check whether these and other quoted results are contained in A. Lotka's books, in particular in „Théorie analytique des associations biologiques“ (Actual. scient. industr. Nr. 781, Paris 1939, this Zbl. **21**, 340).

H. Geiringer.

Moran, P. A. P.: The estimation of death-rates from capture-mark-recapture sampling. *Biometrika* **39**, 181—188 (1952).

A consideration of the problem of estimating size and birth and death rates of natural populations by the method of mark release and recapture. The point of view especially examined is whether death rates are considered in a deterministic way (as constant death rates) or in a probabilistic way (as probability of death per individual). Only the former approach (similar to the one employed

by Fisher and Ford. Leslie and Chitty) seems manageable (see also this Zbl. 44, 345). L. Cavalli.

Baker, G. A.: Uniformity field trials when differences in fertility levels of subplots are not included in experimental error. *Ann. math. Statistics* 23, 289—293 (1952).

The author considers the model $v_{ij} = g + b_i + \varepsilon_{ij}$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$) where v_{ij} is the yield of the j -th variety in the i -th block and compares the effects of random and systematic assignment of varieties to the subplots. St. Vajda.

Kendall, David G.: On the choice of a mathematical model to represent normal bacterial growth. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* 14, 41—44 (1952).

● **Dubourdieu, J.:** *Théorie mathématique des assurances. Fasc. I.: Théorie mathématique du risque dans les assurances de répartition.* (Monographies des probabilités, Fasc. 8.) Paris: Libr. Gauthier-Villars 1952. XX, 306 p. fr. 3500.

Von den beiden, durch den Zufallscharakter des Schadensereignisses bedingten Problemkreisen der Versicherungsmathematik hat die Prämienskalkulation im Laufe der Zeit bereits mehrmals eine umfassende Darstellung erfahren, während die Risikotheorie eine entsprechende Behandlung bisher nicht gefunden hat. Mit dem vorliegenden Werk über die mathematische Theorie des Risikos für reine Risikoversicherungen, wie sie in erster Linie in den Schadensversicherungs Zweigen auftreten, will Verf. zur Ausfüllung dieser Lücke beitragen. — Nach einer kurzen Einführung in die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen der Versicherungsmathematik, von denen die klassische Risikotheorie ausgeht (Kap. I u. II), wird diese Theorie für Versicherungsformen der Schadensversicherung (Feuer-, Haftpflicht-, Kraftfahrzeugversicherung) entwickelt (Kap. III). Im Anschluß daran behandelt Verf. das Problem des Selbstbetrags für die wichtigsten Rückversicherungsformen (Quoten-, Exzedenten-, Exzess-loss-Rückversicherung) (Kap. IV). In einer Kritik der klassischen Theorie weist Verf. vor allem auf die ihrer praktischen Anwendung entgegenstehenden Schwierigkeiten hin, die insbesondere bei der Überprüfung der Anwendbarkeit der dieser Theorie zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmodelle und bei der Gewinnung brauchbarer Wahrscheinlichkeitsaussagen über den Grad der Sicherheit zutage treten. Diese Mängel haben in den letzten Jahrzehnten zur Entwicklung verschiedener „moderner“ Risikotheorien geführt, von denen Verf. die von de Finetti auf einen Satz über den Ruin des Spielers unbegrenzt vieler Zufallsspiele aufgebaute Theorie (Kap. V) und die von F. Lundberg und der skandinavischen Schule entwickelte kollektive Risikotheorie (Kap. VI) darlegt, wobei er sich bei dieser Theorie auf eine einführende Übersicht über die wichtigsten Ergebnisse beschränkt. Bei einem Vergleich der beiden Theorien kommt Verf. zu dem Ergebnis, daß sie, eng miteinander verwandt, sich in glücklicher Weise ergänzen. Das Werk schließt ab mit Bemerkungen über eine Verallgemeinerung des Poisson-Gesetzes für die Zwecke der Theorie diskontinuierlicher stochastischer Prozesse, in denen Verf. die Ergebnisse seiner, bei der Bearbeitung wahrscheinlichkeitstheoretischer Probleme in der Unfallversicherung entstandenen Arbeiten über die Rolle, die absolut monotone Funktionen in der Theorie dieser Prozesse spielen, zusammenfaßt. G. Friede.

Eidgenössisches Statistisches Amt, Bern: Schweizerische Volkssterbetafeln 1939/44 nach Landesteilen. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 52, 125—151 (1952).

Ammeter, Hans: Wahrscheinlichkeitstheoretische Kriterien für die Beurteilung der Güte der Ausgleichung einer Sterbetafel. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 52, 19—72 (1952).

Kritische Übersicht über die wahrscheinlichkeitstheoretischen Tests und ihre Brauchbarkeit für die Beurteilung der Ausgleichung von Sterbetafeln. Vorausgeschickt ist eine Betrachtung der verschiedenen (analytischen und mechanischen) Ausgleichungsmethoden, wobei sich für großes Beobachtungsmaterial die χ^2 -Minimum-Methode als „beste“ im Sinne der Fisherschen Kriterien ergibt. Die Güte der Ausgleichung wird gemessen 1. an ihrer Glätte (kleine Differenzen höherer Ordnung), 2. an der Übereinstimmung mit den Beobachtungen, 3. am zufallsartigen Verlauf der Abweichungen von den Beobachtungen in den verschiedenen Altern. Unter den Tests für die Übereinstimmung mit der Beobachtung zeigt sich der χ^2 -Test bei der Variation der Makeham-Konstanten, vor allem in den komplizierteren Fällen mit verschiedenartigen Abweichungen, allen anderen als überlegen, so daß er als „Allround“-Test betrachtet werden kann, der wenn nicht zum besten so doch immer zu einem brauchbaren Resultat führt. Die Vorzüge der übrigen

Tests, insbesondere des χ^2 -Tests, des ω^2 -Tests (Cramér, v. Mises, Smirnow), der $P(\lambda)$ - und der Smooth-Tests (Pearson, Neyman) und der kombinierten Tests zugleich für Übereinstimmung mit der Beobachtung wie für Regellosigkeit der Abweichungen werden behandelt. Sehr oft trifft Verf. dabei die Feststellung, daß eine weitere Abklärung erforderlich sei. Besonders weist er auf die Möglichkeit hin, die Theorie der kombinierten Tests wirkungsvoll auszubauen. *H. Härten.*

Sachs, Wolfgang: Die Absterbeordnung als Mischungsergebnis. — Versuch eines Beitrages zur Theorie der Lebensversicherung erhöhter Risiken. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 1, Nr. 3, 61—68 (1952).

Analog zur Zerlegung einer Absterbeordnung aller Versicherten in die Ausscheideordnung der Aktiven und die Absterbeordnung der Invaliden nimmt Verf. eine Zerlegung einer Absterbeordnung, die ohne Rücksicht auf den Gesundheitszustand der beobachteten Individuen aufgestellt wurde, in Absterbeordnungen vor, die sich auf Individuen mit ganz bestimmten gesundheitlichen Vorzügen oder Mängeln beziehen (= Sterbetafeln niedrigen Ranges) bzw. in Sterbetafeln mittleren Ranges, die unter Beachtung gewisser Gesichtspunkte aus Sterbetafeln niedrigen Ranges gebildet werden. Da die Verwendung der Person als Zähleinheit bei der Erstellung von Tafeln niedrigen oder mittleren Ranges eine starke Abhängigkeit von subjektiven Faktoren mit sich bringt, können nur Beobachtungen nach Vertragseinheiten hierfür herangezogen werden. Zwischen der Sterbetafel $L(x)$ höheren Ranges und den Sterbetafeln mittleren Ranges $l_i(x)$ muß identisch in x gelten

$$L(x) = \sum_{i=1}^n a_i l_i(x); \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1; \quad l_i(x) \text{ monoton fallend,}$$

wobei a_i das Gewicht ist, mit dem $l_i(x)$ an der Bildung von $L(x)$ beteiligt ist. Überlegungen des Verf. zeigen, daß die Wahl der möglichen Zerlegungen durch diese Bedingungen sehr stark eingeschränkt wird. So zeigt es sich, daß wenn $L(x)$ dem Gompertz-Makeham-Gesetz folgt, nicht auch alle $l_i(x)$ diesem Gesetz folgen können.

G. Friede.

Starke, L. G. K.: Time-changes in the mortality rate: An experimental formula. J. Inst. Actuaries 78, 171—204 (1952).

Jager, J. de: Über additive Versicherungen. Verzekerings-Arch. 29, 39—65 (1952) [Holländisch].

Verf. definiert als additive Versicherungen solche, in denen die Leistungen zum Auszahlungsalter y als additive Funktionale R_y der Prämien bestimmt sind, welche letztere selber Funktionen P_x des Prämienzahlungsalters x sind. Das Haupttheorem

für additiv stetige Funktionale wird in der Form $R(P_x) = \int_{\alpha}^{\beta} K_s dP_s$, welche durch partielle Integration in die Rieszsche Form übergeht, unter der Voraussetzung bewiesen, daß das Stieltjes-Integral $\int_{\alpha}^{\beta} K_s dP_s$ existiert. Die prospektive Reserve V_z kann für jedes erreichte Alter z zerlegt werden in die algebraische Summe eines Gliedes, das nur von der seitherigen Prämienzahlung abhängt, und eines Gliedes, das nur von der künftigen Prämienzahlung abhängig ist,

$$V_z = \frac{1}{D_z} \left\{ \int_{\alpha}^z E_{sz} dP_s - \int_z^{\omega} F_s dP_s \right\}.$$

Die Differenz von retrospektiver und prospektiver Reserve $W_z - V_z$ verschwindet, wenn das Äquivalenzprinzip gilt. $D_z \cdot (W_z - V_z) = \int_{\alpha}^{\omega} F_s dP_s$ ist unabhängig vom erreichten Alter z . V_z und W_z sind wieder additive Funktionale der Prämienfunktion P_x . — Illustration durch die holländische gesetzliche Invalidenversicherung und durch eine kombinierte Alters- und Hinterbliebenenrente. *H. Härten.*

Féraud, Lucien: *Sur l'actuariat des assurances collectives.* Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. **52**, 73—96 (1952).

Verf. zeigt die „dramatischen“ Punkte auf, in denen die klassische Versicherungsmathematik des 19. Jahrhunderts sich den neuen Anforderungen der Kollektivversicherung anpaßte: 1. Verzicht auf die Forderung nichtnegativer Einzelreserven bei Kassen mit arithmetischer Pensionsformel ($\%$ -Satz der Pension nach Dauer der Zugehörigkeit), 2. Verzicht auf ständige Liquidierbarkeit bei offenen Kassen, 3. Übergang zur Vorausberechnung der jährlich erforderlichen Fonds (Methode der „emerging costs“ oder der „estimations annuelles“), der bei Umlage- und Kapitaldeckungsverfahren nötig ist, während das Anwartschaftsdeckungsverfahren mit den Mitteln der klassischen Individual-Versicherungsmathematik auskommt. Diese Versicherungsmathematik geht schließlich 4. in eine Versicherungswissenschaft im weiteren Sinne über, deren Aufgabe nicht mehr die Deduktion ist, sondern die Wahl der Axiome nach demographischen, ökonomischen und sozialpolitischen Gesichtspunkten. H. Härten.

Heubeck, Georg: *Prämienkalkulation für Kindersterbegeldversicherungen nach der Kollektivmethode.* Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. **1**, Nr. 3, 29—35 (1952).

Die von Schönwiese geschaffenen Grundlagen zur Waisenrentenversicherung (Zeit- und Forschungsfragen der Versicherungswirtschaft Heft 1, Weisenburg 1948) enthalten die Häufigkeit f_x^m , mit der einem x -jährigen verheirateten Mann Kinder geboren werden. Verf. zeigt, daß sich mit Hilfe dieser Rechnungsgrundlagen das Kindersterbegeldwagnis nach der Kollektivmethode exakt kalkulieren läßt. Die für eine bequeme numerische Auswertung der dabei erhaltenen Barwertformel erforderlichen Hilfswerte sind in 3 Tabellen beigelegt; ihre Anwendung wird an Beispielen erläutert. G. Friede.

Giese, August: *Einmalprämiensystem in der Lebensversicherung.* Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. **1**, Nr. 3, 99—104 (1952).

Verf. legt dar, daß es für die Behandlung einer Reihe von theoretischen und praktischen Problemen der Versicherungstechnik vorteilhaft ist, eine Versicherung, die gegen Jahresprämie abgeschlossen ist, als eine Versicherung gegen Einmalprämie aufzufassen. Die Einmalprämie wird dabei als vom Versicherer ganz oder teilweise gestundet und zu seiner Sicherung als zusätzliche Leistung mitversichert angesehen. Bis zu ihrer Fälligkeit hat der Versicherungsnehmer dafür jährlich vorschüssig eine Zinsrate zu entrichten, die bei Stundung der gesamten Einmalprämie gerade gleich der gleichbleibenden Jahresprämie für die Versicherung ist. Vorteile dieser Auffassung werden im einzelnen für die Rückversicherungstechnik aufgezeigt. Weitere Folgerungen aus den von ihm erhaltenen Ergebnissen will Verf. zum Gegenstand einer weiteren Arbeit machen. G. Friede.

Seal, H. L.: *The maximum likelihood fitting of the discrete Pareto law.* J. Inst. Actuaries **78**, 115—121 (1952).

Nach Meidell genügt die Verteilung der Versicherungssummen nach ihrer Höhe in erster Näherung dem Verteilungsgesetz von Pareto $f_x = x^{-\beta}$, $0 < a < x$, $\beta > 1$. Verf. hatte 1947 (dies. Zbl. **29**, 375) gefunden, daß das diskrete Analogon zum Pareto-Gesetz $f_j = \frac{j^{-\beta}}{\zeta(\beta)}$, $\zeta(\beta) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\beta}$, gut auf die Verteilung von „Mehrfach-Policen“ (zwei oder mehr Versicherungen auf ein Leben) anwendbar ist. Er führt jetzt die Ausgleichung mit der Maximum-Likelihood-Methode durch und zwar 1. mit β als einzigem Parameter, 2. unter der Annahme, daß die Häufigkeit der Mehrfach-Policen mit steigendem Alter linear zunimmt, $\beta_x = a' + b'x$, mit den beiden Parametern a und b , $a = a' + b'\alpha$, $b = b'\alpha$, $x = \alpha + rt$, $r = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Die numerische Auswertung zeigt gute Näherung. Insbesondere ergibt die Gegenüberstellung der β für die verschiedenen Alter nach den beiden angegebenen Verfahren, nach der mechanischen Ausgleichung von 1947 und nach der Methode

der Momente besonders glatten Verlauf bei der Maximum-Likelihood-Methode mit zwei Parametern.

H. Härten.

Sagoroff, Slawtscho: Die Paretosche und die Lorentzsche kumulative Verteilungskurve der individuellen Einkommen. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* 4, 147—158 (1952).

Feddersen, Berend: Reserveaufbau und unterjährige Schätzung der Reserveveränderung in der privaten Krankenversicherung. *Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math.* 1, Nr. 3, 85—97 (1952).

Zur Ableitung einer Näherungsformel, die sich für den Aufbau sowohl der in die Jahresbilanz einzusetzenden Alterungsrückstellung als auch der entsprechenden Sterbegeldrückstellung eines offenen Bestandes verwenden läßt, geht Verf. von der für die Einzelversicherung mit guter Näherung geltenden Beziehung aus

$${}_{m+1/2}V_x \sim ({}_{m-1/2}V_x + P_x)(1+i) - \frac{1}{2}({}_{m-1/2}R_x + {}_{m+1/2}R_x).$$

Hierin ist

$$(1) \quad {}_{m+v}P_x = K_{x+m-1+v}(1+i) - t_{x+m-1+v} {}_{m+v}V_x \quad (v = \pm \frac{1}{2})$$

für den Fall der Alterungsrückstellung und

$$(2) \quad {}_{m+v}R_x = S q_{x+m-1+v}(1+i) - t_{x+m-1+v} {}_{m+v}V_x \quad (v = \pm \frac{1}{2})$$

für den Fall der Sterbegeldrückstellung. K_x bezeichnet dabei den jährlichen Kopfschaden, S das Sterbegeld und $t_x = q_x + s_x$ die Ausscheidewahrscheinlichkeit für einen x -jährigen Versicherten. Damit erhält Verf. für den gesamten (offenen) Bestand als gesuchte Formel

$$(3) \quad \left[\sum_{m-1/2}^a V_x + \sum^* P_x \right] (1+i) - \sum^* R_x - \sum_{m+1/2}^A V_x \sim \sum_{m+1/2}^n V_x$$

mit

$$\sum^* R_x = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{m+1/2}^a R_x + \sum_{m+1/2}^n R_x + \sum_{m+1/2}^A R_x \right\},$$

wobei ${}_{m+1/2}R_x$ bei Ermittlung der Alterungsrückstellung nach (1) und der Sterbegeldrückstellung nach (2) einzusetzen ist. Der Index a bezeichnet die Summation über den Bestand am Anfang, der Index n eine solche über den Bestand am Ende des Geschäftsjahres und A eine Summation über den Abgang des Jahres. Ein Stern zeigt die Summation über den Bestand $\frac{1}{2}(a+n+A)$ an. Bei Verwendung der zur Formel (3) führenden Überlegungen und von Zahlen aus dem vorjährigen Rückstellungsaufbau bereitet, wie Verf. weiterhin im einzelnen darlegt, die Schätzung der Veränderung der Rückstellung innerhalb eines Geschäftsjahres keine Schwierigkeiten.

G. Friede.

Lang, Reinhard: Die Untersuchung der Zufallsschwankungen in den Jahresergebnissen einer Versicherungsgesellschaft mit Hilfe der kollektiven Risikotheorie. *Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math.* 1, Nr. 3, 69—84 (1952).

Verf. zeigt, daß mit Hilfe von Schlußverfahren der math. Statistik (χ^2 -Verfahren, Konfidenzschluß) aus einem in Geschäftsberichten vorliegenden, für Schwankungsuntersuchungen verhältnismäßig unvollkommenen Zahlenmaterial die für die praktische Anwendung der von F. Lundberg begründeten kollektiven Risikotheorie erforderlichen ersten und zweiten Momente der Schadenszahlen- sowie der Schadenssummenverteilung und damit der Jahresschadenverteilung selbst mit ausreichender Näherung bestimmt werden können. Dadurch wird es ihm möglich, für den betrachteten Versicherungsbestand Fragen folgender Art durch Zahlenangaben zu beantworten: 1. Welcher Zuschlag zur Risikoprämie reicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% zur Deckung des eventuellen Zufallsverlustes in dem auf die beobachteten Jahre folgenden Geschäftsjahr aus? 2. Wie groß muß eine Sicherheits- und Ausgleichsreserve sein, um bei einem vorgegebenen Sicherheitszuschlag $\lambda = 0,1$ zu den Risikoprämien eine Ruinwahrscheinlichkeit $\leq \varepsilon = 0,05$ zu erreichen?

G. Friede.

Zwinggi, Ernst: Beiträge zum Zinsfußproblem. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 1, Nr. 3, 105—113 (1952).

Zur Gewinnung einer Näherungslösung des Zinsfußproblems für die Prämie einer gemischten Versicherung geht Verf. von der Darstellung

$$(1) \quad P(i) = \left[\sum_{t=0}^{n-1} (v_0 + \varepsilon)^{t+1} d_{x+t} + (v_0 + \varepsilon)^n l_{x+n} \right] / \left[\sum_{t=0}^{n-1} (v_0 + \varepsilon)^t l_{x+t} \right] = \Pi / I$$

aus, wobei v_0 der zum Ausgangszinsfuß i_0 und $v = v_0 + \varepsilon$ der zum neuen Zinsfuß i gehörende Diskontierungsfaktor ist, für den die Prämie $P(i)$ ermittelt werden soll. Durch Entwicklung von $(v_0 + \varepsilon)^t$ in die Binomialreihe und Übergang zur Exponentialfunktion erhält er zunächst

$$I = m_0 \exp \left[\lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \frac{\varepsilon^2}{2!} + \dots \right] \quad \text{und} \quad \Pi = n_0 \exp \left[\gamma_1 \varepsilon + \gamma_2 \frac{\varepsilon^2}{2!} + \dots \right],$$

wobei m_0, n_0, λ_i und γ_i Parameter sind, die sich durch die diskontierten Summen der Lebenden und Gestorbenen ausdrücken lassen. Durch Einsetzen in (1) ergibt sich die einfache Beziehung

$$P(i) = P(i_0) \exp \left[(\gamma_1 - \lambda_1) \varepsilon + (\gamma_2 - \lambda_2) \frac{\varepsilon^2}{2!} + \dots \right]$$

zwischen der gesuchten Prämie $P(i)$ und der bekannten Ausgangs-Prämie $P(i_0)$. In entsprechender Weise erhält Verf. für eine gemischte Versicherung als Beziehung zwischen dem Ausgangsdeckungs-kapital und dem gesuchten Deckungs-kapital

$$\exp \left[(\lambda_1 (x+t, n-t) - \lambda_1 (x, n)) \varepsilon + (\lambda_2 (x+t, n-t) - \lambda_2 (x, n)) \frac{\varepsilon^2}{2!} + \dots \right],$$

wobei sich die auftretenden Parameter ebenfalls aus den Kommutationswerten berechnen lassen. Bei Zinsfußänderungen bis zu $\pm \frac{1}{2}\%$ liefern, wie Verf. an Beispielen zeigt, bereits folgende Näherungsformeln für praktische Zwecke ausreichend genaue Werte:

$$P(i) = P(i_0) \exp [(\gamma_1 - \lambda_1) \varepsilon], \\ {}_tV_{x:n}(i) = 1 - (1 - {}_tV_{x:n}(i_0)) \exp [(\lambda_1 (x+t, n-t) - \lambda_1 (x, n)) \varepsilon].$$

Zur Berechnung der darin auftretenden Parameter werden nur die in fast jeder Sterbetafel enthaltenen Werte für N_x, S_x, M_x und R_x benötigt. G. Friede.

Zwinggi, E.: Ein Verfahren zur Bestimmung des Zinsfußes bei Leib- und Zeitrenten. Experientia 8, 258 (1952).

Verf. gibt eine Formel zur näherungsweise Bestimmung des Berechnungszinsfußes i einer Leib- (Zeit-)rente für den Fall an, daß der Barwert der Rente sowie die entsprechenden Rentenbarwerte und das System der Kommutationszahlen (Diskontierungsfaktoren) für einen Basiszinsfuß i_0 bekannt sind. Ausgehend von dem Ansatz $v = 1/(1+i) = v_0(1+\varepsilon)$ und der Entwicklung von $(1+\varepsilon)^t$ in der Formel für den Barwert der Rente erhält er für ε eine Näherungsformel, deren Bestandteile sich aus den gegebenen Rentenbarwerten und Kommutationszahlen (Diskontierungsfaktoren) berechnen lassen. Zahlenbeispiele zeigen, daß die mit dieser Formel erzielte Genauigkeit für viele praktische Zwecke völlig ausreicht.

G. Friede.

Evans, A. W.: Some compound interest approximations. J. Inst. Actuaries 78, 238—247 (1952).

Verf. verwendet die für $(n/a_{\bar{n}})^p - 1$ und $1 - (n/s_{\bar{n}})^q$ durch Abbrechen ihrer nach dem Zinsfuß i entwickelten Potenzreihen nach der zweiten Potenz von i erhaltenen Näherungen zur Gewinnung der Formel

$$\frac{(n/a_{\bar{n}})^p - 1}{1 - (n/s_{\bar{n}})^q} \approx \frac{n+1}{n-1} \frac{p}{q} \left(1 + \frac{p-q}{4} i \right) = t,$$

wobei p und q so gewählt sind, daß $3(p+q) = 2$ gilt. Mit $(n/a_{\bar{n}})^p = x$ und $(n/s_{\bar{n}})^q = y$ ergibt sich hieraus für den Zinsfuß i einer Zeitrente mit dem Barwert $a_{\bar{n}}$ und dem Endwert $s_{\bar{n}}$

$$i = \frac{1}{a_{\bar{n}}} - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{x-1}{t} \right)^{1/q}$$

oder auch

$$(1+i)^n = s_{\bar{n}} [1 + t(1-y)]^{1/p}/n$$

Proberechnungen des Verf. haben ergeben, daß von den rechentechnisch bequemen Kombinationen für p und q die Kombination $p = 1/2$, $q = 1/6$ für Interpolationszwecke besonders geeignet ist. Mit ihr erhält Verf. aus der Entwicklung von

$$\theta = \left(\frac{1}{i}\right) \left\{ \frac{1}{a_n} - \frac{1}{n} \right\} \approx \frac{n+1}{2n} + \frac{n-1}{3n} (x-1) - \frac{1}{15} (x-1)^2$$

nach $(x-1)$ bis zur zweiten Potenz für i die Näherungsformel

$$i \approx [x+1] / \left[\frac{n+1}{2(x-1)} + \frac{n-1}{3} - \frac{n(x-1)}{15} \right] \text{ mit } x = \left(\frac{n}{a_n}\right)^{1/2}$$

und aus einer Entwicklung von $\log s_{\bar{n}}$

$$i \approx \left[\frac{1}{n} \log \frac{s_{\bar{n}}}{n} \right] / \left[\frac{n-1}{2n} + \frac{n-5}{2n} (1-y) - \frac{n^2+10n-27}{4n(n-1)} (1-y)^2 + \frac{1}{11} (1-y)^3 \right]$$

mit

$$y = (n/s_{\bar{n}})^{1/6}.$$

Im Anschluß daran werden Näherungsformeln für die Rendite von Tilgungsanleihen entwickelt, wobei von der Näherungsformel für θ ausgegangen bzw. die Kombination $p = 1/3$, $q = 1/3$ zugrunde gelegt wird. Für den kontinuierlichen Fall leitet Verf. ebenfalls Näherungsformeln in entsprechender Weise ab. Die Güte der einzelnen Formeln wird an den Ergebnissen von Proberechnungen diskutiert. *G. Friede.*

Härten, Hasso: Geldwert und Lebensversicherung. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 1, Nr. 3, 15—28 (1952).

• **Tintner, Gerhard: Econometrics.** New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd. 1952. XIII, 370 p. \$ 5,75.

Während die mathematische Nationalökonomie von Axiomen ausgehend nach mathematischen Grundsätzen und Methoden volkswirtschaftliche Theorien zu formulieren sucht, stellt sich die Ökonometrie die Aufgabe, von beobachteten, durch die volkswirtschaftliche Statistik aufbereiteten Daten aus mit den Methoden der mathematischen Statistik derartige Theorien zu bestätigen oder empirische Gesetzmäßigkeiten aufzufinden. — In dem vorliegenden, in drei Teile gegliederten Buch gibt der Verf. eine einführende und zugleich eine Vielzahl in der Literatur weitverstreuter Arbeiten zusammenfassende Darstellung der Probleme der Ökonometrie und der zu ihrer Lösung verwendeten Verfahren der mathematischen Statistik. — Der erste Teil des Buches gibt zunächst eine Übersicht über das Wesen und die Aufgaben der Ökonometrie sowie ihre Grenzen, die durch die den Gegebenheiten noch nicht adäquaten mathematischen Modelle und Verfahren der mathematischen Statistik bedingt sind. Im zweiten Teil werden dann, auf das für die speziellen Anwendungen Wesentliche beschränkt, die Methoden der Analyse von Gleichungen und Gleichungssystemen mit mehreren Variablen dargelegt, von denen eine oder auch mehrere Zufallsvariable sind (multivariate analysis). Unter der Voraussetzung, daß diese Gleichungen zumindestens in den Zufallsvariablen linear sind, diskutiert Verf. in erster Linie die zur Schätzung der Koeffizienten entwickelten Verfahren der unterscheidenden Analyse (discriminant analysis), die Bestimmung von Hauptkomponenten, die kanonischen Korrelationen und die gewogene Regression und ihre Anwendungen sowie einige damit im Zusammenhang stehende Testmethoden. In einem besonderen Kapitel werden die von Mitgliedern der Cowles Commission an der Universität von Chicago entwickelten Schätzverfahren für Koeffizienten in stochastischen Modellen geschildert, in denen Zufallsfehler auftreten, die durch Vernachlässigung von nicht wesentlichen Variablen bedingt sind, während die Variablen des Modelles selbst nicht mit solchen Fehlern behaftet sein sollen. Für den Fall einer linearen Struktur des Modells wird das Problem der Identifikation, d. h. die Aufgabe, die Strukturkonstanten einer einzelnen Gleichung des Systems zu schätzen, und seine Lösungsmöglichkeiten dargestellt. — Die größte Schwierigkeit bei der Anwendung der hier behandelten mathematisch-statistischen Methoden auf ökonometrische Probleme besteht darin, daß hierbei eine Unabhängigkeit zeitlich aufeinanderfolgender Beobachtungen in der Regel nicht gegeben ist. Wenn zur Zeit auch noch eine umfassende Theorie der stochastischen Prozesse, bei denen sowohl Entwicklungs- als auch oszillatorische Komponenten eine Rolle spielen, fehlt, so sind doch bereits, besonders in jüngster Zeit, Verfahren entwickelt worden, die zur Feststellung und Beseitigung der Abhängigkeit aufeinanderfolgender Beobachtungen dienen können. Der Darstellung derartiger Verfahren ist der dritte Teil des Buches gewidmet. Als erste werden hier die für Zeitreihen zur Ermittlung und Eliminierung von systematischen Bestandteilen (Trend, periodische und nichtperiodische Oszillationen) entwickelten Methoden der orthogonalen Polynome, gleitenden Mittelwerte, Fourier- und Periodogrammanalyse sowie nicht-parametrische Testmethoden für Trend und spezielle Oszillationen dargelegt. Danach wird auf die Verfahren zur Testung auf Autokorrelation, die Theorie der stochastischen Differenzen- und Differentialgleichungen, die Auswertung von Beobachtungsreihen mit korrelierten Zufallsfehlern mit Hilfe

der Methode der kleinsten Quadrate und auf Verfahren der Korrelogrammanalyse eingegangen. Ein Kapitel über Transformationsverfahren zur Gewinnung unabhängiger Beobachtungen (Differenzenmethode, autoregressive Transformationen) schließt diesen Teil des Buches ab. — In einem Anhang sind die wichtigsten Grundbegriffe und Sätze der Matrizen- und Determinantenrechnung sowie numerische Verfahren zur Auflösung von Systemen linearer Gleichungen (Methode von Crout) zusammengestellt. *G. Friede.*

Tintner, G.: Abraham Wald's contributions to econometrics. Ann. math. Statist. 23, 21—28 (1952).

Wald, Abraham: On a relation between changes in demand and price changes. Econometrica 20, 304—305 (1952).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 14, 223) hat Verf. darauf hingewiesen, daß die letzte der 6 hinreichenden Bedingungen für die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung der Produktionsgleichungen (s. Wald, dies. Zbl. 43, 350) sich aus folgendem Satz über die Änderungen von Nachfrage und Preis ergibt: Wenn die Mengen s_1, \dots, s_n der erzeugten Güter S_1, \dots, S_n sich um $\Delta s_1, \dots, \Delta s_n$ ändern und wenigstens eine dieser Änderungen $\Delta s_i \neq 0$ ist, so gilt, wenn $\Delta \sigma_j = f_j(s_1 + \Delta s_1, \dots, s_n + \Delta s_n) - f_j(s_1, \dots, s_n)$ die daraus sich ergebende Preisänderung für die Einheit des Gutes s_j bezeichnet, die Ungleichung $\Delta \sigma_1 \Delta s_1 + \dots + \Delta \sigma_n \Delta s_n < 0$. In der vorliegenden Abhandlung skizziert Verf. nun den Beweis, daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn die Matrix $\left\| \frac{\partial f_j(s_1, \dots, s_n)}{\partial s_k} \right\|$ ($j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n$) negativ definit ist und die zweiten partiellen Ableitungen $\partial^2 f_j / \partial x_k \partial x_l$ stetig sind. *G. Friede.*

Dvoretzky, A., J. Kiefer and J. Wolfowitz: The inventory problem. I. Case of known distributions of demand. Econometrica 20, 187—222 (1952).

Let $x (\geq 0)$ be the initial stock at hand, i. e. the stock available before any ordering of new stock is done. Let $y (\geq x)$ be the starting stock, i. e. the stock at the start of the time interval, after the order of $y - x$ additional stock has been filled. — Section 2 is devoted to the case of one time interval. The loss in this case is a function of the initial stock x , the starting stock y and the demand D , say $W(x, y, D)$, where D is a random variable with a known distribution function F . The optimal ordering policy is defined as the function $y = Y(x)$ which minimizes the expected loss function $V(x, y) = E W(x, y, D)$. $Y(x)$ is calculated for the cases in which both F and W are of particular simple forms. — In Section 3 and 4 the authors consider the case of finitely or infinitely many time intervals, which is treated in the same way as the above simple case in essential but somewhat complicated, since the initial stock at each interval as well as the demand in it are considered as a stochastic process with discrete time parameter. In the above discussions the instantaneous fulfillment of orders is assumed. The contrary case is discussed in Section 5. In the last Section 6 the case of several commodities is treated. *K. Itô.*

Farrell, M. J.: Irreversible demand functions. Econometrica 20, 171—186 (1952).

Anderson, Oskar: Wieder eine Indexverkettung? Mittel.-Bl. math. Statistik 4, 32—47 (1952).

Kritische Bemerkungen zu Grundlagen der Theorie der Indexzahlen, wie sie in B. D. Mudgett, Index Numbers (Wiley, New York, 1951) behandelt wird. Verf. verwirft die formale Forderung, daß eine korrekte Indexformel das totale Wertverhältnis in den beiden Komponenten — Preiseinfluß und Mengeneinfluß — aufbrechen sollte; verteidigt dagegen die inhaltliche Forderung, daß jede Indexformel eine präzise Antwort zu einer klaren Problemstellung darstellen sollte. Mehrere theoretische und praktische Einwände gegen die von Mudgett bevorzugte Indexverkettung. *B. de Finetti.*

Morishima, Michio: Consumer's behavior and liquidity preference. Econometrica 20, 223—246 (1952).

Die traditionelle Theorie (Slutsky, Allen, Hicks) analysiert das Verhalten des Verbrauchers in geldfreier Wettbewerbswirtschaft. Verf. stellt es in Geldwirtschaft dar, wobei er Begriffsbildungen von Sono verwendet [Kokumin-Keizai-Zasshi 74, 1–51 (1943)] und in die Nutzenfunktion die von den Preisen der realen Güter und von den Geldwerten (Bargeld und Obligationen) abhängige „Wahrscheinlichkeit des künftigen Lebensstandards“ $q(\xi)$ einführt. Die traditionelle Theorie setzt voraus, daß die realen Güter x_i separabel von $q(\xi)$ sind, d. h. daß eine eigentliche Nutzenfunktion (Sono) der realen Güter besteht. In der traditionellen

Budgetgleichung $\sum_1^n p_i x_i = E$ ersetzt Verf. den Netto-Aufwand E durch $I - H - p_b B$, wo

I der Wert der anfänglich besessenen Geldwerte ist, H das Bargeld und $p_b B$ der Wert der Obligationen am Ende der Periode. Bei Änderung eines Preises p_k kommt zu den beiden traditionellen Gliedern von $\partial x_i / \partial p_k$, Einkommenseffekt und Substitutionseffekt, als drittes additives Glied der indirekte Einkommenseffekt mit dem Faktor $\partial H / \partial p_k + p_b (\partial B / \partial p_k) = -\partial E / \partial p_k$, welches bei der traditionellen Annahme $E = \text{const.}$ verschwindet. Werden alle Preise der realen Güter proportional geändert und im selben Verhältnis die Mengen der Geldwerte, dann bleibt $q(\xi)$ unverändert; d. h. die Nutzenfunktion ist homogen der Ordnung 0 in den Preisen der realen Güter und in den Geldwerten; — ebenso der Grenznutzen eines realen Gutes, während der Grenznutzen des Bargeldes und der der Obligationen homogen der Ordnung -1 sind. Die Nachfrage nach den Geldwerten ändert sich proportional zu den Preisen, wenn der Anfangsbesitz I den Wert 0 hat. Für die einzelnen Fälle mit $I \neq 0$ gibt Verf. an, wie sich die Nachfrage nach den Geldwerten in den vielen Unterfällen ändert. Dieselbe Untersuchung stellt er für Änderung des Zinsfußes $r = 1 : p_b$ an.

H. Härlen.

Solow, Robert: On the structure of linear models. *Econometrica* 20, 29–46 (1952).

In der modernen Ökonometrie spielen Differenzengleichungssysteme

$$x(t+1) - a x(t) = c$$

mit x, c = Spaltenvektoren, a = quadratische Matrix, I = Einheitsmatrix eine große Rolle, deren durch Iteration gefundene Lösung

$$x(t) = a^t x(0) + (I + a + a^2 + \dots + a^{t-1}) c$$

dann und nur dann gegen die stationäre Lösung

$$x = (I - a)^{-1} c$$

des entsprechenden statischen Systems konvergiert, wenn alle charakteristischen Wurzeln von a absolut < 1 sind. Ausgehend von bereits bekannten Sätzen über Bedingungen für die Nichtnegativität der Komponenten der stationären Lösung sowie für die Stabilität des dynamischen Systems, untersucht Verf. weitere Bedingungen für Stabilität und andere ökonometrisch deutbare Eigenschaften des Systems, indem er sich die Analogie zur Theorie der Markoff-Ketten und deren Begriffe zunutze macht und ferner einen Satz von Minkowski über die Nichtnegativität der Determinante

$$D(u) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} + u_1 & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} + u_2 & \dots & -\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} + u_n \end{vmatrix}$$

mit $u_i \geq 0$, $\alpha_{ij} \geq 0$ ($i \neq j$), $\alpha_{jj} = \sum_{i \neq j} \alpha_{ij}$ heranzieht.

M.-P. Geppert.

Hatanaka, M.: Note on consolidation within a Leontief system. *Econometrica* 20, 301–303 (1952).

Verf. zeigt, daß, wenn die Spaltenvektoren x, d des Gleichungssystems $(I - a)x = d$ (a = quadratische Matrix, I = Einheitsmatrix) durch die gleiche „Konsolidierung“ $\delta = Td$, $\xi = Tx$ mit der $m \times n$ -Matrix

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_{i_1} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & b_{i_{j-1}} & \dots & b_{i_j} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{i_{m-1}} & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

so transformiert werden, daß die Transformierten $(I - \alpha) \xi = \delta$ erfüllen, die Bedingungen

$$a_{i,k} = 0 \quad (i, k = i_{j-1}, i_{j-1} + 1, \dots, i_j), \quad \alpha_{j,l} = \frac{1}{b_{i_{l-1}}} \sum_{i_{j-1}}^{i_j} b_i a_{i, i_{l-1}} = \frac{1}{b_{i_l}} \sum_{i_{j-1}}^{i_j} b_i a_{i, i_l}$$

erfüllt sein müssen, die sich bei Rückdeutung in den ökonomischen Bezugsgrößen als recht einengend herausstellen.

M.-P. Geppert.

Cherubino, Salvatore: *Sulla matrice-moltiplicatore dei settori economici.* Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **33**, 247—254 (1952).

Die von Leontief, Goodwin u. a. betrachteten Differential- bzw. Differenzen-Gleichungssysteme $dE = (I - a) dY$ bzw. $y(t+1) - a y(t) = b$ (wobei $E, Y =$ Spaltenvektoren, $a =$ quadratische, $I =$ Einheitsmatrix) einer Sektoren-Wirtschaft verallgemeinert Verf., indem er die Voraussetzungen über die beteiligten, wirtschaftlich zu deutenden Größen lockert. Insbesondere wird für das bei Abhängigkeit der Matrix a von einer Preismatrix X entstehende lineare Differentialgleichungssystem $dY = f(X) \cdot Y dX$ diskutiert, unter welchen Bedingungen über die Matrix $f(X)$ und ihre charakteristischen Wurzeln das Integral Y bestimmte, ökonomisch sinnvolle Eigenschaften aufweist.

M.-P. Geppert.

Bothwell, Frank E.: *The method of equivalent linearization.* Econometrica **20**, 269—283 (1952).

Die Methode äquivalenter Linearisierung von Kryloff und Bogoliuboff (Introduction to Nonlinear Mechanics, Princeton, 1943) wendet Verf. an auf Goodwin's Modell des geschäftlichen Kreislaufs, dargestellt durch die Differential-Differenzen-Gleichung $c \dot{y}_{t+u} + (1 - a) y_{t+u} = \Phi(\dot{y}_t)$ mit y_t als Einkommen zur Zeit t , u als Zeitspanne („lag“) zwischen Entschluß zu einer Investierung und der Durchführung, Φ als nichtlineare Funktion der induzierten Investierung. Aus dem Ansatz $y_t = a - b \cos(2\pi/T) t$ und aus der Fourierentwicklung von Φ ergeben sich durch Koeffizientenvergleich Bestimmungsgleichungen für a, b, T . Insbesondere für T gilt $(1 - a) u/c = 2\pi u/T \tan 2\pi u/T$; T ist also unabhängig von Φ . Die Stabilität der Lösungen untersucht Verf. mit einer Modifikation des Nyquist-Kriteriums (dies. Zbl. **4**, 86).

H. Härten.

Shubik, Martin: *A business cycle model with organized labor considered.* Econometrica **20**, 284—294 (1952).

Simon, Herbert A.: *On the application of servomechanism theory in the study of production control.* Econometrica **20**, 247—268 (1952).

Verf. zeigt, wie sich die in der Technik entwickelte Servo-Mechanismen-Theorie (servo mechanism theory) auf Systeme zur Regulierung der Produktionsrate anwenden läßt. Das hierbei vorliegende System von linearen Differential- und Integro-Differentialgleichungen wird Laplace-transformiert; auf Grund allgemeiner Sätze über Laplace-Transformierte wird das Verhalten der Lösungen entsprechend den in dem System auftretenden linearen Operatoren diskutiert. Durch Minimalisierung gewisser Kostenfunktionen werden optimale Entscheidungsregeln (decision rules) bestimmt.

M.-P. Geppert.

Kellerer, Hans: *Marktforschung — ein Anwendungsgebiet des Stichprobenverfahrens.* Mitteil.-Bl. math. Statistik. **4**, 209—230 (1952).

Geometrie.

Elementargeometrie:

• **Bieberbach, Ludwig:** *Theorie der geometrischen Konstruktionen.* (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe Band 13). Basel: Verlag Birkhäuser 1952. 162 S., Geb. Fr. 18.70, broch. Fr. 15.60.

Das vorliegende vortreffliche Lehrbuch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die vom Verf. an den Universitäten Königsberg, Basel, Frankfurt a. M. und Berlin seit vier Jahrzehnten über geometrische Konstruktionen gehalten wurden. Das Werk zerfällt in 30 Paragraphen. Die §§ 1–5 behandeln die Konstruktionen mit dem Lineal allein. Hier beweist Verf., daß man nach Angabe eines gezeichneten n -seitigen regulären Polygons für ungerades n das reguläre $2n$ -seitige Polygon mit dem Lineal allein konstruieren kann. Dies ist für gerades n nicht möglich. Für die Poncelet-Steinerschen Konstruktionen wird die Notwendigkeit des Mittelpunktes des gezeichneten Kreises gezeigt. Der Kreis läßt sich aber durch einen beliebigen Kreisbogen ersetzen. Es handelt sich hier um die hängenden Lineale von Weiss. Nach der Bestimmung des Körpers von den Koordinaten der mit Lineal und Zirkel konstruierbaren Punkte werden die Mohr-Mascheronischen Konstruktionen besprochen. Jede mit Lineal und Zirkel konstruierbare Aufgabe läßt sich mit einem Parallelineal oder einem Winkellineal konstruieren. Sie ist mit einem Lineal und mit einer festen Zirkelöffnung konstruierbar, mit einer festen Zirkelöffnung ohne Lineal aber nicht. Ein normiertes Lineal ist ein Lineal, auf dessen Kante zwei Punkte markiert sind. Ihr Abstand ist die Norm des normierten Lineals. In den Hilbertschen Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß läßt sich das Eichmaß durch die Norm des normierten Lineals ersetzen. Ein normiertes Lineal kann auch beide Instrumente, Lineal und Zirkel, ersetzen, weil man damit die Schnittpunkte eines Kreises, dessen Halbmesser die Norm ist, mit jeder Geraden bestimmen kann. Die Unmöglichkeit der Trisektion und der Verdopplung des Würfels mit der klassischen Anwendung des Lineals und Zirkels wird einfach bewiesen. Aus diesem Lehrbuch vernimmt man erst, daß dieser (übrigens nicht unbekannte) Beweis von E. Landau aus dem Jahre 1897 herrührt. Damals war er kaum 21 Jahre alt. Nach dem Beweis der Konstruierbarkeit der Gaußschen regulären Polygone werden die Konstruktionen dritten und vierten Grades eingehend behandelt. Dazu ist das erste Hilfsmittel das klassische Einschiebelineal. Das ist ein normiertes Lineal, dessen markierte Punkte auf je eine vorhandene Linie (Gerade oder Kreis) fallen sollen. Als Beispiel wird die Konstruktion des regulären Siebenecks und eines Dreiecks aus zwei Seiten und aus dem Inkreisradius angegeben. Es werden auch andere Hilfsmittel für Konstruktionen dritten und vierten Grades besprochen und ihre Anwendungen werden mit gut gewählten Beispielen illustriert. Solche Instrumente sind ein Rechtwinkelhaken und ein Kreis, oder zwei Rechtwinkelhaken, oder ein normierter Rechtwinkelhaken, oder je ein Zimmermannshaken, Stechzirkel, Ellipsenzirkel, Kissoidenzirkel oder ein gezeichneter Kegelschnitt, der nicht ein Kreis sein soll, in den letzten fünf Fällen mit Lineal und Zirkel. Im letzten Fall genügt nur ein Bogen des Kegelschnittes. Mehrere interessante Beispiele zeigen die vielseitige Anwendbarkeit des von Hjelmslev herrührenden Deckblattes zur Konstruktion dritten Grades. Es wird allgemein bewiesen, daß ein reguläres n -seitiges Vieleck mit Einschiebelineal nur dann konstruierbar ist, wenn n die Form $2^\alpha 3^\beta p_1 p_2 \dots p_r$ besitzt, wobei p_1, p_2, \dots, p_r lauter verschiedene Primzahlen von der Form $2^\alpha 3^\beta + 1$ sind. Das reguläre Elfeck ist das erste mit Zirkel und Einschiebelineal nicht konstruierbare reguläre Polygon. Die transzendente Aufgabe: Rektifikation und Quadrat der Kreises wird durch scharfsinnige Überlegungen von Gelfond geführt. Auch die quadrierbaren Kreisbogenzweiecke bleiben nicht außer Acht. Es handelt sich auch um Näherungskonstruktionen von algebraischen und transzendenten Aufgaben. Die Konstruktionen auf der Kugel mit Zirkel und mit Großkreiszirkel finden eine systematische Darstellung. Die abschließenden Anmerkungen und Zusätze enthalten vorzügliche Hinweise und eine vortreffliche Literaturzusammenstellung. Auch Kenner der Literatur der Theorie der geometrischen Konstruktionen werden in diesem schönen Werk viele neue Probleme und Beweise finden.

Gy. Sz. Nagy.

Barlotti, Adriano: *Intorno ad una generalizzazione di un noto teorema relativo al triangolo.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 182–185 (1952).

Bruins, E. M.: *Orthogona ltransversals in the tetrahedron.* Indagationes math. 14, 164–172 = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 164–172 (1952).

Durch jeden Punkt des Raumes lassen sich drei Geraden legen, die je zwei gegenüberliegende Kanten eines vorgegebenen Tetraeders verbinden. Verf. zeigt, daß es im allgemeinen acht Punkte gibt, für die diese Geraden paarweise orthogonal sind.

L. Fejes Tóth.

Gaddum, J. W.: *The sums of the dihedral and trihedral angles in a tetrahedron.* Amer. math. Monthly 59, 370–371 (1952).

Das Hauptresultat ist: Bezeichne S die Summe der Diederwinkel in einem Tetraeder, so ist $2\pi \leq S \leq 3\pi$. Verf. beweist zuerst ein Lemma: Ist x ein Punkt in einem sphärischen Dreieck abc , so ist $ax + bx + cx \leq ab + bc + ac$. Aus dem Lemma folgt der folgende Satz: Seien vier Punkte auf einer Kugel (mit Radius 1) so gegeben, daß der Mittelpunkt der Kugel im Inneren des

mit den vier Punkten gegebenen Tetraeders liegt. Bezeichne R die Summe der sechs sphärischen Distanzen zwischen den vier Punkten, so ist $3\pi \leq R$. Aus diesem Satz folgt das Hauptresultat. Weiteres Korollar.: Bezeichne T die Summe der Triederwinkel in einem Tetraeder, so ist (wegen $T = 2S - 4\pi$) $0 \leq T \leq 2\pi$. Szép.

Altwegg, M.: Ein Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. Elemente Math. 7, 56—58 (1952).

Nach einem Satz von Choquet und Kreweras ist eine unendliche Punktmenge des R_n mit der Eigenschaft, daß je zwei Punkte ganzzahlige Entfernung haben, notwendig linear. Verf. beweist, daß andererseits zu jedem N im R_2 N Punkte P_1, P_2, \dots, P_N so bestimmt werden können, daß alle Entfernungen $\overline{P_i P_k}$ ganzzahlig sind und je drei der Punkte nicht auf einer Geraden liegen. E. Trost.

Hadwiger, Hugo: Mittelpunktspolyeder und translative Zerlegungsgleichheit. Math. Nachr. 8, 53—58 (1952).

Für die Polyeder des gewöhnlichen Raumes R_3 werden die Relationen „translationsgleich“ und „translativ zerlegungsgleich“ im klassischen Sinne, jedoch unter sinngemäßer Beschränkung auf die Transformationen der vollen Translationsgruppe T des R_3 erklärt. Es wird sodann gezeigt, daß ein konvexes Polyeder des R_3 dann und nur dann mit einem inhaltsgleichen Würfel translativ zerlegungsgleich ist, wenn es ein zentralsymmetrisches Mittelpunktspolyeder mit zentralsymmetrischen Begrenzungsflächen ist. Zwei inhaltsgleiche Polyeder dieser Art sind dann auch stets translativ zerlegungsgleich. — Aus den Ergebnissen dieser Arbeit folgt in einfacher Weise, daß der gesamte R_3 nur durch Mittelpunktspolyeder der beschriebenen Art in beliebig angeordnete translationsgleiche konvexe Polyeder zerlegt werden kann. Damit wird dieser von H. Minkowski stammende Satz auch ohne die Voraussetzung der gitterförmigen Anordnung der Polyeder bewiesen. Bei der Durchführung der Beweise verwendet Verf. zum Teil Ergebnisse seiner früheren Arbeiten (dies. Zbl. 41, 472; 46, 140) sowie den darin entwickelten überaus zweckmäßigen Formalismus. R. Inzinger.

Balk, M. B.: Über die Zerlegung eines Raumes beliebiger Dimension durch Sphären. (Lösung einer elementaren Aufgabe.) Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 151—154 (1952) [Russisch].

n sphères de dimension q de l'espace euclidien $E^{(q+1)}$ de dimension $q + 1$ décomposent cet espace en $2^{\sum_{i=0}^{[(q+1)/2]} \binom{n}{q+1-2i}}$ domaines. Lorsque les n sphères sont telles que l'intersection de k quelconques d'entre elles est une sphère de dimension $q + 1 - k$, elles décomposent $E^{(q+1)}$ en un nombre de parties exactement donné par l'expression précédente (en convenant dans cet énoncé qu'une sphère de dim. 0 est réduite à un couple de points et qu'une sphère de dim. négative est l'ensemble vide). Quels que soient n et q , il existe toujours dans $E^{(q+1)}$ n sphères de dimension q satisfaisant à la condition précédente. Ce qui précède reste valable si on remplace $E^{(q+1)}$ par $S^{(q+1)}$ (= la sphère de dim. $q + 1$). D'après le rapporteur, ces résultats sont à rapprocher de ceux de R. C. Buck [Amer. math. Monthly 50, 541 (1943)]. J. Riguet.

Bambah, R. P. and C. A. Rogers: Covering the plane with convex sets. J. London math. Soc. 27, 304—314 (1952).

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit handelt es sich um folgenden Satz des Ref. (dies. Zbl. 37, 221): Wird ein konvexes Sechseck vom Inhalt F durch n kongruente konvexe Scheiben vom Inhalt S so überdeckt, daß die Begrenzungskurven der Scheiben einander gegenseitig in höchstens zwei Punkten schneiden, so ist $nS \geq F$, wo s den Inhalt des einer Scheibe einbeschriebenen Sechsecks vom

größten Inhalt bedeutet. Der Beweis beruht auf der Tatsache, daß die Scheiben sich in konvexe Polygone zusammenziehen lassen, die das ursprüngliche Sechseck schlicht und lückenlos überdecken. Die Verff. geben einen ausführlichen Beweis dieser Tatsache. Im zweiten Teil werden ohne Beweis zwei zu dem obigen analoge Ungleichungen ausgesprochen, von denen die erste folgendermaßen lautet: $(n-1)s + S \geq F$. Die Überdeckung geschieht hierbei durch zentralsymmetrische kongruente homothetische konvexe Scheiben, während für den überdeckten Bereich nur Konvexität vorausgesetzt wird. Der dritte Teil enthält verschiedene Ergänzungen gewisser Ergebnisse des Ref. und Fáyrs bezüglich der wirtschaftlichsten Überdeckung der Ebene durch kongruente homothetische konvexe Bereiche.

L. Fejes Tóth.

Corliss, J. J.: Volumes of revolution. Amer. math. Monthly 59, 37—40 (1952).

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● Campedelli, L.: *Lezioni di geometria. Vol. I: La geometria analitica e gli elementi della geometria proiettiva.* IV. ed. Padova: „Cedam“ 1952.

● Semple, J. G. and G. T. Kneebone: *Algebraic projective geometry.* Oxford: At the Clarendon Press 1952. VI, 404 p. 35 s. net.

Dieses Buch, das für Studenten bestimmt ist, enthält eine Behandlung der projektiven Geometrie mit algebraischen Methoden. Ein erstes Kapitel hat historischen Charakter; ein zweites enthält eine zusammenfassende geometrisch-analytische Einleitung in die Grundbegriffe der projektiven Geometrie; beide Kap. liefern eine intuitiv-geometrische Grundlage für die abstrakten Entwicklungen des 2. Teiles des Buches. Die abstrakte Begründung der projektiven Geometrie ist eine algebraische, und fängt mit der Erklärung eines Punktes als System von 2, 3, 4 homogenen Koordinaten an, die in einem gegebenen Körper K gewählt werden können; K ist immer der Körper der komplexen Zahlen, oder insbesondere der der reellen Zahlen. Verf. behandelt der Reihe nach die projektive Geometrie auf der Geraden, in der Ebene und im Raume, und schließt mit einigen Angaben über die n -dimensionale projektive Geometrie. Immer werden die affine und die Euklidische Geometrie der projektiven untergeordnet. Kegelschnitte, Quadriken, kubische Raumkurven, Kollineationen und Korrelationen, Liniengeometrie werden ausführlich behandelt; eine Menge anderer Gegenstände, wie kubische Flächen, quadratische Transformationen, Invariantentheorie, Cliffordsche Parallelen usw. werden berührt. Die Matrizenrechnung wird überall gebraucht, aber in beschränkter Ausdehnung. Bemerkenswert ist die Sammlung der Übungen, sowohl im Laufe der Kap. als am Ende eines jeden. Die folgenden Titel der einzelnen Kap. können eine bessere Auskunft über die Verteilung des Stoffes geben: I. Begriff der Geometrie; analytische Behandlung der Geometrie. II. Eindimensionale projektive Geometrie; zweidimensionale projektive Geometrie; Kegelschnitte; lineare Systeme von Kegelschnitten; höhere Korrespondenzen, Apolarität und Invariantentheorie; ebene Transformationen; dreidimensionale projektive Geometrie; Quadriken; kubische Raumkurven und Flächen; lineare Systeme von Quadriken; räumliche lineare Transformationen; Liniengeometrie; n -dimensionale projektive Geometrie. Im Anhang zwei allgemeine algebraische Grundsätze über lineare Transformationen und über die kanonische Form der quadratischen Formen.

E. Togliatti.

● Herrmann, Horst: *Übungen zur projektiven Geometrie.* (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe Band 18.) Basel: Verlag Birkhäuser 1952. 167 S. Ganzl. geb. Fr. 17,—; brosch. Fr. 14,—.

Das vorliegende anregende Übungsbuch schließt sich in erklärter Weise an das Buch von W. Blaschke über „Projektive Geometrie“, Berlin 1947 (dies. Zbl. 30, 62) und an H. F. Bakers „Principles of geometry“ an. Es bringt in 279, in eine fortlaufende Gedankenkette geordneten, kleineren Untersuchungen eine Fülle von vielfach neuem Übungsstoff und ist ein treffliches Hilfsmittel zur Erweiterung der notwendigen Koordinaten- und Rechentechnik in der projektiven Geometrie der Ebene und des Raumes. Dem wissenschaftlichen Interesse seines Verfassers gemäß spielen in den Beispielen ebene und räumliche Konfigurationen eine bevorzugte Rolle. Als hauptsächlich analytischer Apparat dienen Matrizen, die sich außer zur Darstellung von Kegelschnitten und Flächen zweiter Ordnung auch in der Theorie der Konfigurationen als sehr zweckmäßig erweisen, indem z. B. ein ebenes Dreieck durch eine drei-, ein räumliches Tetraeder durch eine vierspaltige quadratische Matrix beschrieben werden kann. Sehr viele Sätze der projektiven Geometrie lassen sich so überaus bequem und ohne wesentliche Rechnung gewinnen. Fast alle Beispiele sind mit ausführlichen Lösungen versehen, die in ihrer Gesamtheit über-

sichtlich den Fortschritt des geometrischen Gedankens erkennen lassen. So ist dem Verf. in eindrucksvoller Weise gelungen, durch sein Übungsbuch den Lernenden zu selbständigen Versuchen geometrischer Formung anzuregen und hinzuleiten. — Inhalt: Projektive Ebene. I. Additiver Bereich: Projektive Zeiger und vereinigte Lage, Vorkenntnisse über Matrizen, Schnittpunkte und Verbindungsgeraden, die Matrix als Figur, Desarguesfiguren, Beigeordnete Kurven zweiter Ordnung und Klasse. II. Multiplikativer Bereich: Matrizen und Determinanten, Matrizen als Dreiecke, Kollineation, Korrelation, Kurven zweiter Ordnung und Klasse, Polarität als Beordnung, Polarität, Korrelation, Inversion. Projektiver Raum. III. Vereinigte Lage: Vierreihige Matrizen und Determinanten; Punkt, Gerade, Ebene und vereinigte Lage, Beziehungen zwischen Geraden, Perspektive Dreiecke und Vierfläche, Desargues-Konfigurationen, Spiegelungen. IV. Kollineationen und Korrelationen, insbes. schiefe und symmetrische Korrelationen, d. h. Nullsysteme und Polarsysteme. V. Beispiele zur Beordnung: Polarität und Beordnung, Kurven dritter Ordnung im Raum, Die Fläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. VI. Konfigurationen: Dualität und Dualistik, Desarguessche Konfigurationen. Den Abschluß des Buches bilden vier Raumbilder (Anaglyphen), darstellend 1. die Eindeutigkeit der projektiven Skala, 2. die Gewinnung der ebenen Desarguesschen Figur aus einem räumlichen „Fünfpunker“ (Punktfünfling), 3. drei ebenperspektive Vierfläche, 4. die Dandelin-Figur und den Satz von Pascal. — Sehr zustatten wäre dem wertvollen Buche ein Sachregister gekommen.

K. Strubecker.

Mihailovitch, B.: Inversion dans l'espace par calcul vectoriel. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, 69—73 und französ. Zusammenfassg. 73 (1952) [Serbisch].

Bottari, Amerigo: Il teorema di Steiner. Archimede 4, 121—123 (1952).

Neumann, H.: Eine Fläche 2. Ordnung, F^2 , durch neun Punkte gelegt. Math. Ann. 124, 388—392 (1952).

Für das klassische Bestimmungsproblem der durch neun Punkte legbaren Fläche 2. Ordnung, das die (lineare) Konstruktion des Restschnittpunktes der Fläche mit einer beliebigen, durch einen der Angabepunkte gehenden Geraden verlangt, wird eine interessante Lösung auseinandergesetzt, die nur 23 Ebenen erfordert, während die bisher bekannten Lösungen jeweils 45 bis 90 Ebenen benötigten.

W. Wunderlich.

Backes, F.: Sur la configuration des dix droites de Morley-Petersen. Mathesis 61, 8—9 (1952).

Die zehn Geraden, von denen hier die Rede ist, sind: drei beliebige Anfangsgeraden a, b, c im Raume; die drei Geraden a', b', c' , die zu den Paaren $(b, c), (c, a), (a, b)$ senkrecht stehen; die drei Geraden a'', b'', c'' , die zu $(a, a'), (b, b'), (c, c')$ senkrecht stehen; und die Gerade, die, nach dem Satz von Morley und Petersen, zu a'', b'', c'' gleichzeitig senkrecht ist. Dieser Satz ist von R. Deaux durch die Methoden der projektiven Geometrie bewiesen worden (dies. Zbl. 8, 170). Als Anwendung eines Satzes von G. Veronese über die Konfiguration von zwei perspektiven Dreiecken in der Ebene, führt hier Verf. im Beweise von R. Deaux einige Änderungen ein.

E. Togliatti.

Zacharias, Max: Konstruktionen der ebenen Konfigurationen $(12_4, 16_3)$. Math. Nachr. 8, 1—6 (1952).

Es sind bis jetzt fünf Punkt-Geradenkonfigurationen $(12_4, 16_3)$ in der Ebene bekannt; sie wurden bzw. von O. Hesse, J. de Vries, B. Bydžovský, J. Metelka, M. Zacharias untersucht. Während aber für die zwei ersten ebene lineare Konstruktionen bekannt waren, hatte man für die drei anderen nur indirekte Konstruktionen. Hier gibt Verf. für drei solche Konfigurationen ebene Konstruktionen an, die nur von den aus den betreffenden Inzidenztafeln ersichtlichen Lagebeziehungen ausgehen.

E. Togliatti.

Skornjakov, L. A.: Die Konfiguration D_9 . Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 73—78 (1952) [Russisch].

Im Anschluß an die Arbeit von B. J. Argunow (dies. Zbl. 39, 369) wird gezeigt, daß einige der dort angegebenen Schnittpunktsätze, die aus dem Satz D_{10} hergeleitet wurden, auch aus dem Satz D_9 bewiesen werden können, d. h. aus demjenigen Spezialfall des Desarguesschen Satzes, bei dem ein Dreieck zwei Seiten durch Ecken

des anderen Dreiecks schiebt. Insbesondere ergibt sich, daß die Schnittpunktsätze $S(9; 12, 13)$, $S'(9; 12, 13)$, $S(10; 14, 16)$, $S'(10; 14, 16)$ mit dem Satz D_9 äquivalent sind, und daß der Satz $Di(11; 16, 18)$ mit dem kleinen Desarguesschen Satz äquivalent ist. In Argunows Bezeichnung gibt die erste Zahl die Zahl der freien Parameter (Rang) des betreffenden Schnittpunktsatzes an, die zweite Zahl die Anzahl der Punkte, die dritte Zahl die Anzahl der Geraden, die in den Schnittpunktsatz eingehen.

R. Moufang.

Charrueau, André: Formules matricielles relatives aux complexes linéaires et aux faisceaux de complexes linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2252—2254 (1952).

Verf. betrachtet hier zunächst zwei lineare nichtsinguläre Strahlenkomplexe C_1 und C_2 , und die zwei Komplexe C_{12} , C_{21} , die den Komplexen C_1 , C_2 in bezug auf C_2 , C_1 entsprechen; es seien A_1, A_2, A_{12}, A_{21} die entsprechenden Matrizen. Man hat dann: $A_{12} = A_2 B_1 A_2$ und $A_{21} = A_1 B_2 A_1$, wo B_1, B_2 die Matrizen der Komplexe C'_1, C'_2 bedeuten, die aus C_1, C_2 durch die Polarität in bezug auf die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ entstehen. Zweitens gibt Verf. folgende Formel ohne Beweis an:

$$A_1 A_2^{-1} A_3 A_4^{-1} \dots A_{n-1}^{-1} A_n = A_0 + \frac{\xi_1 \xi_3 \dots \xi_n}{\xi_2 \xi_4 \dots \xi_{n-1}} A'_0,$$

wo A_1, A_2, \dots, A_n die Matrizen einer ungeraden Anzahl von nichtsingulären Komplexen eines Büschels sind. A_0, A'_0 sind die Matrizen der zwei singulären Komplexe des Büschels; die ξ_i sind die Parameter der betrachteten n Komplexe. *E. Togliatti.*

Łojasiewicz, S.: Sur une propriété caractéristique de la spirale logarithmique. Ann. Soc. Polon. Math. **24**, 92—94 (1952).

Hat eine nicht leere abgeschlossene Menge M in der komplexen z -Ebene die Eigenschaft, daß jedes ähnliche Bild von M sogar zu M kongruent ist, dann gibt es komplexe Zahlen a und b mit $a \in M$ und $\Re b \neq 0$, sodaß $M - \{a\}$ Vereinigung von logarithmischen Spiralen der Form

$$\{z: z = a + e^{i\lambda} e^{b\tau}, \quad -\infty < \tau < +\infty\}$$

mit reellem λ ist.

G. Aumann.

Tosi, Armida: Sulle curve del 4° ordine intersezioni di quadriche di rotazione. Periodico Mat., IV. Ser. **30**, 33—41 (1952).

Haben zwei Umdrehungsflächen 2. Ordnung parallele Achsen, so enthält das durch sie bestimmte Flächenbüschel, bis auf eine, lauter Umdrehungsflächen. Verf. beweist diesen bekannten Satz und seine Umkehrung mittels des absoluten Kegelschnitts und verwendet ihn zum Beweis des folgenden: Jede irreduzible Raumkurve 4. Ordnung, k , welche der Schnitt von zwei Umdrehungsflächen 2. Ordnung, F_1 und F_2 , mit parallelen Achsen ist, liegt mindestens auf einem Umdrehungskegel. Der letztere Satz erscheint in dieser Form im Hinblick auf den bekannten Satz über die vier in einem allgemeinen Flächenbüschel 2. Ordnung enthaltenen Kegel ziemlich trivial. (Er ist es weniger, wenn man die Realitätsverhältnisse berücksichtigt, und ihn so ausspricht: Besteht eine als Schnitt zweier reeller Umdrehungsflächen 2. Ordnung bestimmte irreduzible Raumkurve 4. Ordnung aus mehr als einem reellen Punkt, so liegt sie auf mindestens einem reellen Umdrehungskegel; dieser Kegel ist im allgemeinen ein eigentlicher und lediglich dann ein Zylinder, wenn F_1 und F_2 eine gemeinsame Symmetrieebene besitzen und k nur aus einem Zweig besteht.) — Ferner beweist Verf.: In einem Kegelschnittbüschel mit vier verschiedenen Grundpunkten gibt es dann und nur dann mindestens zwei Kegelschnitte, welche einen gegebenen, durch keinen Grundpunkt gehenden Kegelschnitt C doppelt berühren, wenn eine Seite des Diagonaldreiecks Δ der Grundpunkte in bezug auf C Polare der Gegenecke ist; es gibt in dem Büschel drei solcher Kegelschnitte dann und nur dann, wenn Δ Polardreieck von C ist. Ref. bemerkt hierzu, daß Steiner (Ges. Werke II, 1882, 415 u. 481) die Bedingungen für die Lösbarkeit einer allgemeineren Aufgabe angegeben und auch auf die vorstehende Spezialisierung derselben hingewiesen hat. Die Steinersche Aufgabe lautet: Einen Kegelschnitt zu finden, welcher drei gegebene Kegelschnitte doppelt berührt. Im Spezialfall sind zwei der gegebenen Kegelschnitte durch Punktepaare zu ersetzen. — Die Anwendung auf eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Spezies, k , welche die unendlich ferne Ebene in vier verschiedenen, nicht auf dem absoluten Kreis liegenden Punkten A, B, C, D trifft, liefert dann den Satz: k liegt auf mindestens zwei bzw. auf drei Umdrehungsflächen 2. Ordnung mit nichtparallelen Achsen

dann und nur dann, wenn eine Seite des Diagonaldreiecks von $ABCD$ bezüglich des absoluten Kreises die Polare der Gegenecke bzw. wenn das Diagonaldreieck Polardreieck des absoluten Kreises ist. *E. Schönhardt.*

Sydler, J.-P.: Une propriété des espaces osculateurs des courbes normales. *Commentarii math. Helvet.* **26**, 36—41 (1952).

Es wird der folgende Satz bewiesen: „Man betrachte für eine Normkurve im E^n in den Punkten P_0, \dots, P_{k+s} die $k+s+1$ Schmiegräume E^{n-k} . (E^m bedeutet: m -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit.) Sei E^{k+s-t} der Schnitt des von den Punkten P_0, \dots, P_{k+s} aufgespannten Raumes E^{k+s} mit den Schmiegräumen E^{n-1} in P_0, \dots, P_{t-1} . Dieser E^{k+s-t} schneidet die Schmiegräume E^{n-k} in P_t, \dots, P_{k+s} in $(k+s-t+1)$ E^{s-t} , die assoziiert sind, wenn $n-k$ gerade und s ungerade ist. $t=0, \dots, s$.“ ($t+1$ E^s eines E^n heißen assoziiert, wenn jeder E^{n-s-1} , der t der E^s schneidet, auch den noch fehlenden E^s schneidet). Das duale Gegenstück zu dem Satz wird formuliert und einige Folgerungen werden gezogen, unter anderem eine Verallgemeinerung eines Satzes von Berzolari [*Rend. Circ. mat. Palermo* **22**, 214—219 (1906)]. *W. Klingenberg.*

Niče, Vilko: Les surfaces strophoidales du 3^e ordre. *Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova, mat. Inst.* **18**, Nr. 2, 97—112 und französ. Zusammenfassg. 112 (1952) [Serbisch].

L'A. à étudié et trouvé un certain nombre de propriétés d'une espèce de surfaces du 3^e ordre, qu'il appelle, à cause d'une certaine analogie avec la strophoïde, surfaces strophoidales du 3^e ordre. Les surfaces strophoidales du 2^e ordre seraient des sphères. Les surfaces strophoidales du troisième ordre sont de surfaces du troisième ordre, passant par la section conique absolue, telles que leurs plans tangents le long de la section conique absolue enveloppent un cône imaginaire du second ordre. *Autoreferat.*

Blaschke, Wilhelm: Sulla geometria cinematica e descrittiva. *Archimede* **4**, 45—49 (1952).

In möglichst durchsichtiger und elementarer Weise legt Verf. die wichtigsten Eigenschaften der kinematischen Abbildung und der damit zusammenhängenden quasielliptischen Geometrie, sowie der isotropen Projektion dar und zeigt, daß die Zusammensetzung der ersten mit der Umkehrung der zweiten Abbildung die berühmte Geraden-Kugeltransformation von S. Lie ergibt. Ein kurzer historischer Überblick und Quellenangaben beschließen die Arbeit. Es sei bemerkt, daß dieser übersichtliche Zugang zur Lieschen Abbildung vom Verf. auch anderswo erörtert wird: siehe dies. *Zbl.* **34**, 243; **39**, 380. *H. R. Müller.*

Church, Elsie: A certain cubic transformation. *Amer. math. Monthly* **59**, 314—315 (1952).

Algebraische Geometrie:

Turri, Tullio: Sui sistemi invarianti di curve nelle involuzioni di secondo ordine. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **21**, 19—26 (1952).

Détermination des systèmes linéaires de courbes transformés en eux-mêmes par une transformation birationnelle involutive de de Jonquières, ou par une transformation de Geiser, ou par une transformation de Bertini. Chacun de ces systèmes contient en général deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution engendrée par la transformation. *L. Godeaux.*

Godeaux, Lucien: Sopra una particolare involuzione di Geiser. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **21**, 1—3 (1952).

T. Turri (voir ce *Zbl.* **43**, 360) avait mis en doute l'affirmation faite par l'A., de que toute transformation birationnelle involutive laissant invariantes les cubiques planes qui passent par six points était une transformation de Geiser (du deuxième type de Bertini). Dans la note présente, l'A. prouve que c'est toujours une transformation de Geiser, bien qu'elle ne soit pas la plus générale de ce type. *G. Ancochea.*

Turri, Tullio: Sui punti doppi della serie caratteristica di una rete di cubiche. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **21**, 32—39 (1952).

L'A. considère les différents types d'involutions du second ordre déterminées par un réseau de cubiques planes ayant sept points-base. Ces points sont fondamentaux pour l'involution, ou cinq d'entre eux sont fondamentaux ou trois, ou aucun. Sur chaque courbe du réseau, il y a quatre points unis de l'involution; ces points sont tous variables avec la courbe dans le premier cas, mais dans les autres, un certain nombre de ces points sont fixes. Détermination des différents cas possibles.

L. Godeaux.

Tibiletti, Cesarina: Piani tripli e piani quadrupli con la stessa curva di diramazione. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* **12**, 537—543 (1952).

L'A. studia ed analizza casi in cui la curva di diramazione di un piano triplo è anche di diramazione per un piano quadruplo. Come mezzo di indagine Ella si vale del modello concreto delle trecce caratteristiche (del Chisini) delle curve algebriche piane, modello atto a rappresentare le proprietà topologiche di immersione di una curva nel piano proiettivo. — Sul modello della treccia caratteristica della sestica con 9 cuspidi (costruito in un lavoro precedente) l'A. dimostra che questa curva è di diramazione per un piano triplo e per 3 piani quadrupli birazionalmente distinti. Ella costruisce anche la treccia caratteristica della curva di ordine 8 avente 9 cuspidi e 12 nodi e dimostra che questa curva è di diramazione per un solo piano quintuplo. — Traendo le conclusioni generali dai casi particolari discussi l'A. dimostra che se un piano triplo ed un piano quadruplo hanno la stessa curva di diramazione, il piano triplo è il risolvente cubico del piano quadruplo; Ella dà anche un limite superiore per il numero di piani quadrupli birazionalmente distinti che si trovino in queste condizioni.

C. F. Manara.

Gorenstein, Daniel: An arithmetic theory of adjoint plane curves. *Trans. Amer. math. Soc.* **72**, 414—436 (1952).

The author has given an algebro-arithmetic development of the theory of adjoint curves and extended the classical results to irreducible plane curves with arbitrary singularities defined over an arbitrary ground field. — Let $F(X, Y) = 0$ be the equation of an irreducible curve Γ over the arbitrary field k , $v = k[X, Y]/F(X, Y)$, P a point on Γ corresponding to a maximal ideal \mathfrak{p} of v , $v_{\mathfrak{p}}$ the local ring at P , and $\bar{v}_{\mathfrak{p}}$ its integral closure. The adjoint divisor C is defined locally such as the \mathfrak{p} -component $C_{\mathfrak{p}}$ of C is the divisor corresponding to the conductor $c_{\mathfrak{p}} = v_{\mathfrak{p}} : \bar{v}_{\mathfrak{p}}$. And a curve is called adjoint to Γ , if it cuts out on Γ a multiple of the adjoint divisor. — The author has remarked that the fundamental property of adjoint curves (Theor. A) is equivalent to the following theorem B. Theor. A. The adjoint curves of order $m - 3$ cut on Γ outside of the fixed component C the complete canonical series. Theor. B. $d(C) = 2 \delta(C)$, where $d(C)$ denotes the degree of C , and $\delta(C)$ the number of conditions which C imposes on the curves of sufficient high order. He has reduced theor. B to the main theor.: $d(c_{\mathfrak{p}}) = 2 \delta(c_{\mathfrak{p}})$, i. e. $\dim v_{\mathfrak{p}}/c_{\mathfrak{p}} = 2 \dim v_{\mathfrak{p}}/c_{\mathfrak{p}}$. The first part of the paper is devoted to the proof of this theorem. The concept of v -ideal and complete ideal of Zariski (this Zbl. **18**, 201) plays thereby the central role. The main theorem is valid not only for function field but algebraic number field. He has given also another proof of the theor. A based upon a representation theorem for the differentials of the first kind in the case which the function field of Γ is separably generated over k .

Y. Akizuki.

Baldassarri, Mario: Una condizione per l'esistenza di unisecanti. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* **12**, 390—397 (1952).

Verf. setzt hier die Untersuchungen einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **38**, 318), deren Bezeichnungen hier übernommen werden, fort und verbessert die dort angegebene Schranke $r > n^2 - 2$ im Falle $q = 1$ unter einer zusätzlichen Voraussetzung; hat nämlich das Polynom $f(x_1, \dots, x_{r+1})$ des Grades n eine s -fache Untermannigfaltigkeit Δ_{r-1} , die vollständig durch eine Hyperfläche $F(x)$ ausgeschnitten wird, welche selbst Δ_{r-1} nur einfach enthält, so besitzt $f(x)$ eine Wurzel in K' sicher bereits dann, wenn $r > n/s - 2$ ist. Ist ferner $f(x)$ regulär in allen Variablen, so gibt es ein birationales äquivalentes Polynom $g(t)$, das in einer der Variablen höchstens

den Grad $n - 1$ erreicht. Dieser Satz wird geometrisch ausgewertet und schließlich auf die von F. Enriques [Math. Ann. 52, 134—153 (1899)] begonnene Klassifizierung der V_3 angewendet. Verf. zeigt, daß eine V_3 , welche ein lineares Büschel von rationalen Flächen enthält, birational äquivalent ist entweder dem einfachen S_3 , oder dem doppelten S_3 mit einer Verzweigungsfläche der Ordnung $2m$, die entweder eine $(2m - 4)$ -fache Gerade, oder einen $(2m - 2)$ -fachen Punkt, oder zwei benachbarte $(2m - 3)$ -fache Punkte enthält.

W. Gröbner.

Roth, Leonard: Alcune V_3 irrazionali a generi nulli. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 265—269 (1952).

Wie in früheren Arbeiten, sagt Verf., daß eine Mannigfaltigkeit V mit drei Dimensionen birational (oder unirational) ist, wenn sie auf die Punkte eines Raumes S_3 (auf die Punktgruppen einer Involution des Raumes S_3) eineindeutig abgebildet werden kann. Um die Nicht-Birationalität einer V zu entscheiden, braucht hier Verf. immer den Wert des Divisors σ von F. Severi: ist $\sigma > 0$, so kann V nicht birational sein. Alle hier betrachteten V sind vollständig regulär; ihre Geschlechter und Mehrgeschlechter sind alle Null; auf allen bricht das Verfahren der Adjunktion ab. Es gibt eine unendliche Reihe irrationaler V dieser Art. Es werden folgende Beispiele betrachtet: 1. Die V der Punktepaare einer rationalen Kurve L und einer Fläche F^6 (von F. Enriques), die durch die 6 Kanten eines Tetraeders doppelt hindurchgeht; sie ist weder birational noch unirational; für sie ist $\sigma = 2$; 2. ersetzt man die obengenannte F^6 durch die Doppelebene (ebenfalls von F. Enriques), deren Verzweigungskurve eine Kurve 10. Ordnung ist mit einem 6-fachen Punkt O und drei Punkten $(3, 3)$, deren Tangenten durch O hindurchgehen, so hat man eine andere irrationale V der gewünschten Art, für welche $\sigma = 4$; 3. Die V_3^6 des Raumes S_4 , deren hyperebene Schnitte Flächen F^6 von F. Enriques sind, hat $\sigma = 2$, ist unirational und kann auf eine Involution 4. Ordnung des Raumes S_3 abgebildet werden; im kontinuierlichen System aller solcher V_3^6 gibt es auch nicht-unirationale Kegel; 4. Der Doppel- S_3 , dessen allgemeine Schnitte Doppelebenen von F. Enriques sind, hat $\sigma \geq 2$ und ist unirational.

E. Togliatti.

Hall, Raymond: Some types of irregular threefold. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 11, 167—175 (1952).

Es werden hier zwei irreguläre algebraische Hyperflächen V_3 des vierdimensionalen Raumes betrachtet. Die Gleichung der ersten V_3 erhält man durch Nullsetzen einer allgemeinen Form des Grades r , mit konstanten Koeffizienten, in drei Formen A_1, A_2, A_3 des Grades m . Die so erhaltene V_3 hat die Ordnung $r m$, und besitzt eine r -fache Kurve; ihre dreidimensionale Irregularität beträgt $-\frac{1}{2}(r - 1) \cdot (r - 2)$; die Flächenirregularität hat den Wert $\frac{1}{2}(r - 1)(r - 2)$. — Die zweite V_3 hat die Gleichung:

$$P^2(U^2 + V^2) + Q^2(U^2 - V^2) = 0;$$

wo P, Q zwei Formen des Grades m und U, V zwei Formen des Grades n bedeuten. Die V_3 hat die Ordnung $2(m + n)$ und besitzt zwei Doppelflächen der Ordnungen m und n . Ihre dreidimensionale Irregularität hat den Wert:

$$\frac{1}{12} [(m^4 + n^4) - 10(m^3 + n^3) + 35(m^2 + n^2) - 50(m + n) + 36];$$

die Flächenirregularität ist gleich 1. — Um die Werte der Flächenirregularität zu finden, werden in beiden Fällen P_a und P_g berechnet: P_a durch Postulationsformeln und P_g durch direkte Untersuchung der adjungierten V_3^{n-5} , deren Gleichung mit Hilfe des verallgemeinerten Noetherschen Satzes geschrieben werden kann. Für die zweite V_3 ist der Fall $m = 1, n = 2$ bemerkenswert; er führt zu einer irregulären V_3^6 ($P_a = 1, P_g = 0$) mit einer Doppelebene und einer doppelten Segreschen F^4 ; wäre die Doppelebene nicht vorhanden, so hätte man $P_a = P_g = 0$, so daß das Auftreten einer weiteren Doppelebene den Wert von P_a um 1 wachsen läßt.

E. Togliatti.

Burau, Werner: Geometrische Bemerkungen zu einigen Grundfragen der algebraischen Geometrie in idealtheoretischer Begründung. Monatsh. Math. 56, 16—37 (1952).

Verf. beginnt mit der Darlegung der Veronesischen Mannigfaltigkeiten V_n^k , die in einem projektiven Raum der Dimension $\binom{n+k}{k} - 1$ mit den Koordinaten $x_{i_0 i_1 \dots i_n}$ durch Parameter-

darstellungen $x_{i_0 \dots i_n} = u_0^{i_0} \dots u_n^{i_n}$, [$i_0 + i_1 + \dots + i_n = k$, abgekürzt $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u)$ geschrieben] definiert sind. Einem Punkt des Parameterraumes U_n entspricht eindeutig ein Punkt der Veronesischen Mannigfaltigkeit V_n^k , das „ V^k -Bild“ dieses Punktes. Den Hyperebenen

$\sum a_{i_0 \dots i_n} x_{i_0 \dots i_n} = 0$ entsprechen die Hyperflächen k -ten Grades $\sum a_{i_0 \dots i_n} u_0^{i_0} \dots u_n^{i_n} = 0$ des Parameterraumes und umgekehrt. Das läßt sich auch auf Hyperflächen $f(u)$ eines Grades $j < k$ ausdehnen, welchen als V^k -Bild derjenige lineare Raum zugeordnet wird, in dem sich die den Formen k -ten Grades $f(u)g(u)$ entsprechenden Hyperebenen schneiden, wo $g(u)$ ein System linear unabhängiger Formen des Grades $k-j$ durchläuft. Eine entscheidende Rolle spielen ferner die „Schmiegräume“ der Veronesischen Mannigfaltigkeiten V_n^k : in einem Punkt $\mathfrak{x}(\bar{u})$ der V_n^k wird der Schmiegraum $T^{(s)}$ s -ter Stufe erklärt als derjenige lineare Raum, der durch diesen

Punkt geht und von den dort angehefteten Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_i} \dots, \frac{\partial^s \mathfrak{x}}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_s}} (u_i = \bar{u}_i)$ aufgespannt

wird. — Eine algebraische Mannigfaltigkeit M_d der Dimension d wird durch eine gewisse Anzahl von Hyperflächen f_1, \dots, f_m ausgeschnitten, die eine Basis des Ideals \mathfrak{J} der auf M_d verschwindenden Formen bilden. Die in \mathfrak{J} enthaltenen Formen eines gewissen Grades N bilden eine lineare Mannigfaltigkeit, deren V^N -Bild der „Basisraum“ $D^N(\mathfrak{J})$ ist. Es wird weiter die Frage geklärt, wann eine solche Darstellung „rein“ und „vollständig“ ist. Im Anschluß daran gibt Verf. einen Beweis für den bekannten Satz von Kronecker, daß eine singularitätenfreie Mannigfaltigkeit des n -dimensionalen Raumes immer als reiner Schnitt von höchstens $n+1$ Hyperflächen gleichen Grades dargestellt werden kann. Nun folgt die Untersuchung des speziellen Bézoutschen Satzes, d. h. des Schnittes von n Hyperflächen, die sich in endlich vielen Punkten schneiden. Ausgehend von den einfachsten Fällen im ein- und zweidimensionalen, wo alles längst klar ist und außerhalb jeder Diskussion steht, entwickelt Verf. einen Multiplizitätsbegriff, der den vorgetragenen geometrischen Überlegungen entspricht, den Forderungen des speziellen Bézoutschen Satzes gerecht wird und von dem dann gezeigt wird, daß er genau mit dem idealtheoretischen Multiplizitätsbegriff übereinstimmt, der bereits von Macaulay und Schmeidler eingeführt wurde und neuerlich vom Ref. [dies. Zbl. 33, 127; Math. Nachr. 4, 193—201 (1951)] benützt worden ist. Nach der Definition des Verf. ist die Multiplizität eines isolierten Schnittpunktes P gleich der um 1 verminderten Dimension des linearen Raumes, den der Basisraum $D^N(\mathfrak{J})$ aus dem Schmiegraum $T^{(s)}$ des Punktes P ausschneidet (bei genügend großem N und s , dann unabhängig davon). — Diese Konstruktionen des Verf. enthalten implizit auch die Beantwortung der gegenwärtig oft diskutierten Frage, durch welche geometrischen Vorstellungen jedem H -Ideal (ohne triviale Komponente) eine algebraische Mannigfaltigkeit umkehrbar eindeutig zugeordnet werden kann [Severi, dies. Zbl. 42, 153 und 395; Rend. Accad. naz. XL, IV. Ser. 2, 27 p. (1951)]. In Anlehnung an die Begriffsbildung Severis kann eine algebraische Mannigfaltigkeit durch ihr Nullstellengebilde und durch ihr Verhalten in der Umgebung desselben charakterisiert werden. Dieses Verhalten aber wird am besten und erschöpfend durch den oben eingeführten Schnitt des Basisraumes $D^N(\mathfrak{J})$ mit den Schmiegräumen $T^{(s)}$ der Veronesischen Mannigfaltigkeit gekennzeichnet. Es wäre wohl wünschenswert, daß auch dieses Problem eine ausführliche Darstellung finde.

W. Gröbner.

Gröbner, Wolfgang: Sopra un teorema di Severi. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 11, 217—223 (1952).

En 1906, Severi avait démontré que toute sousvariété à $n-2$ dimensions d'une variété générique à $n-1$ dimensions V_{n-1} du S_n est l'intersection complète de V_{n-1} avec une autre hypersurface du S_n . En termes de la théorie des idéaux, cette propriété revient au théorème suivant: L'anneau de résidus \mathfrak{o}/f , où \mathfrak{o} est l'anneau $K[x_1, \dots, x_n]$ des polynômes à n indéterminées sur un corps K et f un polynôme générique de \mathfrak{o} , est un Z. P. E.-Ring dans le sens de Krull. L'A. donne ici une démonstration de ce dernier théorème basée sur l'impossibilité d'une relation de la forme $ad - bc = fg$ entre polynômes de \mathfrak{o} , avec f générique, c premier et $a \not\equiv 0, b \not\equiv 0 \pmod{f, c}$. L'impossibilité résulte d'une computation de paramètres.

G. Ancochea.

Segre, Beniamino: L'anneau d'équivalence sur une variété algébrique. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1663—1665 (1952).

Die Einbeziehung von virtuellen algebraischen Mannigfaltigkeiten, ihren Durchschnitten und ihren Äquivalenzrelationen in die algebraische Geometrie erweist sich in steigendem Maße als sehr fruchtbar. Wie F. Severi und J. A. Todd bewiesen haben, lassen sich die Teilmannigfaltigkeiten (TMf.) einer algebraischen Mf. V in Äquivalenzklassen einteilen, die einen kommutativen Ring \mathfrak{A}_V bilden mit dem Einheitsselement V . Wenn man die Verabredung trifft, daß eine Klasse zu einer zweiten gehört, wenn es in der ersten Klasse einen Vertreter gibt, der als Teilmannigfaltigkeit eines Vertreters der zweiten Klasse auftritt, so kann man in Zusammenhang mit dieser Inklusionsbeziehung einen bemerkenswerten Verband aufdecken. Der Verf. setzt voraus, daß es sich um (virtuelle oder effektive) Mf. handelt, die virtuell ohne mehrfache Punkte sind. Homogene Elemente von \mathfrak{A}_V sind diejenigen, welche durch reine Mf. vertreten werden. Das Produkt von zwei (homogenen) Elementen M, N ist ein homogenes Element der Dimension $p = m + n - v$ (kleine Buchstaben bezeichnen immer die Dimensionen der durch die entsprechenden großen Buchstaben bezeichneten Mf.), während ein Element der Dimension $< p$ mit der Null identifiziert wird. Ein derartiges Produkt wird mit $(MN)_V$ bezeichnet. Es wird durch den Durchschnitt von M und N vertreten, wenn M und N durch effektive TMf. von V in allgemeiner Lage vertreten werden. Der Verf. gibt nun Beispiele von Produktrelationen im Zusammenhang mit den Inklusionsbeziehungen. — Eine Folge mit dem Träger P , wo P eine TMf. von V bezeichnet, ist eine Folge von Elementen von \mathfrak{A}_P : $\{P\} = \{P_0, P_1, P_2, \dots\}$, derart, daß $P_0 = P$, während P_i die Dimension $p - i$ hat (d. h. $P_i = 0$, wenn $i > p$). Mit einer derartigen Folge ist ein Element von \mathfrak{A}_P verbunden, die direkte Summe $P_0 + P_1 + P_2 + \dots$, die in \mathfrak{A}_P ein inverses besitzt vom selben Typus; es existiert also eine Folge mit dem Träger P :

$\{\tilde{P}\} = \{\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots\}$, $\tilde{P}_0 = P$, mit der Eigenschaft, daß $\sum_{j=0}^i (P_j \tilde{P}_{i-j}) = P$, wenn $i = 0$, und

$= 0$, wenn $i > 0$. — Wenn man zwei Folgen $\{P\}, \{P'\}$ mit demselben Träger P betrachtet, so ist mit dem Produkt der mit ihr verbundenen Elemente von \mathfrak{A}_P eine Folge mit dem Träger P verbunden, die das Produkt von $\{P\}$ und $\{P'\}$ genannt wird. Hinsichtlich dieser Multiplikationsvorschrift bilden die Folgen mit dem Träger P eine Abelsche Gruppe. — Es seien nun M, N zwei (homogene) Elemente des Ringes \mathfrak{A}_V derart, daß es darin ein Element T gibt mit $T \subset M$, $T \subset N$, $t \geq m + n - v$. Diese Elemente definieren ein Element $S = (MN)_V^T$ der Dimension $s = m + n - v$ in der Weise, daß, wenn M und N durch TMf. von V vertreten werden, die sich einfach entlang T schneiden und im übrigen allgemein in V liegen, ein Vertreter von S gegeben wird als der Durchschnitt von M, N residual bezüglich T . Wenn $t = s$, so hat man einfach $S = (MN)_V - T$. Außerdem gibt im Falle $t \geq s$ $(MN)_V - (MN)_V^T$ die funktionale Äquivalenz von T in dem Durchschnitt von M und N . In ähnlicher Weise definiert man das Symbol $(M^{(1)} M^{(2)} \dots M^{(n)})_V^T$, wobei $n > 2$, $i \geq \sum m^{(i)} - (n-1)v$ unter der Voraussetzung, daß T zu den M gehört. Auf diese Weise werden neue kommutative Verknüpfungen erhalten, ähnlich zu denen der Produkte $(M^{(1)} \dots M^{(n)})_V$. — Die Betrachtungen haben auch einen Sinn für TMf. einer topologischen Mf., wenn man sich der (relativen) Homologietheorie von Lefschetz bedient.

J. C. H. Gerretsen.

Segre, Beniamino: Variétés covariantes d'immersion et variétés canoniques sur une variété algébrique ou topologique. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1731–1733 (1952).

Auf eine ganz neue Weise stößt Verf. auf die kanonischen Mannigfaltigkeiten (Mf.) der verschiedenen Dimensionen einer algebraischen Mf. mittels gewisser kovarianter Mf. der Einbettung einer Mf. in eine andere, unter ausschließlicher Benützung von Eigenschaften der Durchschnitte. Der Verf. beschränkt sich auf den algebraischen Fall, aber die Ergebnisse lassen sich unschwer ausdehnen auf den Fall der Zyklen einer topologischen Mf., oder auf die Verbände, die in der vorangehenden Note erwähnt sind. — Es seien $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(s)}$ irgendwelche Hyperflächen einer algebraischen Mf. V der Dimension v . Es bezeichne $V_i(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(s)})$ die Summe der virtuellen Durchschnitte von ungeordneten Systemen von i Hyperflächen A , so daß $V_0 = V, V_1, V_2, \dots$ eine Folge mit dem Träger V bilden. Mit irgendeiner (reinen) Teilmf. P kann man dann eine Folge $\{P_V\} = \{P_{V,0}, P_{V,1}, \dots\}$ mit dem Träger P von kovarianten Mf. der Einbettung von P in V verbinden; $\{P_V\}$ ist durch die nachfolgenden Bedingungen festgelegt: Setzt man $t = s + p - v$, so muß man für jedes s , das $v - p \leq s \leq v$ genügt, identisch in den A haben $(A^{(1)} A^{(2)} \dots A^{(s)})_V - (A^{(1)} A^{(2)} \dots A^{(s)})_V^P = \sum_{i=0}^t P_{V,i} V_{t-i}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(s)})$.

Aus $P \subset M \subset V$ geht dann die Beziehung $\{P_V\} = (\{P_M\} \{M_V\})_M$ hervor, während andererseits aus $P = (MN)_V$ folgt $\{P_V\} = (\{M_V\} \{N_V\})_V$. Es ist möglich, aus diesen Eigenschaften eine einfache Konstruktion der $P_{V,i}$ herzuweisen. — Wenn zwei Mf. M, N in V sich entlang einer Mf. P der Dimension $P = m + n - v$ schneiden, so ist ihr residualer Schnitt gegeben durch die Formel $(MN)_V - (MN)_V^P = \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^i ((P_{V,j} M_{V,i-j})_M \tilde{N}_{V,t-i})_N$, wobei $t = p + v - m - n$.

Auf diese Weise lassen sich Aufgaben bezüglich Teilmf. und ihrer Schnittmf. lösen, wobei

sogar die M_f mehrfache Punkte haben können oder selbst M_f von singulären Punkten anderer sind. — Wenn V eine nicht-singuläre M_f ist, so ist auch ihr Quadrat $W = V \times V$ nicht singulär und von der Dimension $2v$. Die Diagonalmf. ist birational äquivalent mit V und kann daher mit V identifiziert werden. Die kovarianten M_f der Einbettung von V in W sind offenbar birationale Invarianten von V , welche zu den kanonischen M_f von V in einfacher Beziehung stehen: Die i -te kanonische M_f von V (der Dimension $v-i$) V_i^* ist gegeben durch $V_i^* = (-1)^i \tilde{V}_{w,i}$. Man kann beweisen, daß, wenn U und V irgendwelche algebraische M_f bezeichnen, auf $W = U \times V$

die Beziehung $W_i^* = \sum_{j=0}^i U_j^* \times V_{i-j}^*$ besteht. Wenn $P \subset V$, dann stehen die Folgen, gebildet aus den kanonischen Systemen von P , V mit der Folge der kovarianten M_f der Einbettung von P in V in den Beziehungen: $P_{v,i} = (-1)^i \sum_{j=0}^i (P_j^*, \tilde{V}_{i-j}^*)_v$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Für

$P = (MN)_v$ geht daraus $\{P^*\} = (\{M^*\} \{N^*\} \{\tilde{V}^*\})_v$ hervor. Andererseits hat man für jede Teilmf. P in V der Dimension $p \geq \frac{1}{2}v$: $\sum_{j=0}^i (\tilde{P}_j^* V_{i-j}^*) = 0$, wenn $v-p < i \leq p$, und $= (-1)^{v-p} (P^2)_v$, wenn $i = v-p$. Man kann insbesondere $P = V_h^*$ mit $1 = h = \frac{1}{2}v$ setzen, was für $v \geq 2$ die Beziehungen gibt zwischen den kanonischen M_f und den kanonischen M_f dieser kanonischen Mannigfaltigkeiten. J. C. H. Gerretsen.

Segre, Beniamino: Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 33, 5–48 (1952).

L'A. affronta il problema dello scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche mediante trasformazioni birazionali, e lo risolve completamente nel caso delle superfici. — Lo scopo viene ottenuto in tre stadi fondamentali: due preparatorii ed uno stadio finale conclusivo. Nel primo stadio l'A. fa uno studio esauriente di certe trasformazioni birazionali (che Egli chiama „dilatazioni“) tra due varietà algebriche, aventi punti fondamentali su una sola di esse, precisandone il comportamento nei punti regolari e negli intorno dei punti fondamentali. Nel secondo stadio preparatorio Egli definisce il concetto di „varietà associate“ ad una varietà data e ne studia il comportamento di fronte alle trasformazioni. Su queste premesse, nello stadio conclusivo finale, l'A. stabilisce rigorosamente la finitezza del procedimento che conduce allo scioglimento delle singolarità di una superficie algebrica mediante successive „dilatazioni“. — Infine Egli indica la strada che potrebbe portare ad estendere i suoi procedimenti alle varietà di dimensione superiore, precisando i punti in cui sorgono le difficoltà e discutendo qualche via per la loro soluzione. — Nel corso della trattazione l'A. ha molte occasioni per muovere fondate critiche (spesso suffragate da esempi concreti) a recenti trattazioni dell'argomento, di colmare le loro lacune e precisare affermazioni contestabili. Nello studio poi delle varietà associate ad una data, Egli rettifica alcune idee inesatte sul comportamento delle polari nelle singolarità infinitamente vicine; idee ammesse senz'altro da Noether in qua. — L'ampia Memoria è corredata da una accurata bibliografia che riflette con esattezza lo stato della questione a tutt'oggi. C. F. Manara.

Gaeta, Federico: Sur la limite inférieure l_0 des valeurs de l pour la validité de la postulation régulière d'une variété algébrique. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1121–1123 (1952).

Die Hilbertsche charakteristische Funktion eines H -Ideals kann bekanntlich aus der Syzygienkette des Moduls abgeleitet werden; dabei tritt eine Summe von Binomialkoeffizienten der Art $\binom{l-v_i+n}{n}$ auf, wo $n+1$ die Anzahl der homogenen Variablen, l das Argument der Funktion und v_i den nach Ostrowski [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 1, 281–326 (1922)] berechneten Grad der betreffenden Syzygie bedeutet. Diese Formel ist ohne weiteres richtig, wenn alle $l-v_i+n \geq 0$ sind, andernfalls ist der entsprechende Binomialkoeffizient $= 0$ zu setzen. In vielen Fällen, besonders bei Hauptklassenidealen (vollständigen Schnitten), läßt sich $\max \{v_i\}$ leicht angeben, und damit auch der Grad l , von dem ab die Postulationsformel ohne Korrektur gilt. W. Gröbner.

Val, Patrick du: On surfaces whose canonical system is hyperelliptic. Canadian J. Math. 4, 204—221 (1952).

Es sei F eine reguläre algebraische Fläche ($p_g = p_a = p$) mit dem Lineargeschlecht $p^{(1)} = n + 1$; es wird vorausgesetzt, daß die allgemeinen kanonischen Kurven K auf F irreduzibel und hyperelliptisch sind. Das Geschlecht der Kurven K ist $n + 1$; und der Grad des Systems $|K|$ ist n . Die charakteristische Linearschar des Systems $|K|$ ist eine halbkanonische g_n^{p-2} ; eine allgemeine Gruppe dieser Schar besteht also aus $p - 2$ veränderlichen Punktepaaren der g_n^2 , die auf jeder K vorhanden ist, und aus $n - 2p + 4$ festen Punkten, die der Jacobischen Gruppe der g_n^2 selbst angehören. Daraus erhält man sofort zwei Abbildungen der gegebenen Fläche F auf Doppelflächen: erstens die Abbildung, die vom kanonischen System $|K|$ geliefert wird, entweder auf eine doppelte rationale normale Regelfläche R_2^{p-2} des Raumes S_{p-1} , oder (falls $p = 6$) auf eine doppelte Veronesesche Fläche (diese erste Abbildung versagt für $p = 2$, denn in diesem Falle ist $|K|$ nur ein Büschel); zweitens die Abbildung, die vom bikanonischen System $|2K|$ geliefert wird, auf eine doppelte Fläche Φ^{2n} des Raumes S_{n+p} mit hyper-ebenen Schnittkurven des Geschlechts $\pi = n - p + 1$. Da das kanonische System $n - 2p + 4$ Basispunkte P_i aufweist, so findet man entsprechend auf R_2^{p-2} eine gleiche Anzahl $n - 2p + 4$ von Geraden λ_i , und auf Φ^{2n} $n - 2p + 4$ konische Doppelpunkte; die Projektion von Φ^{2n} aus diesen Doppelpunkten liefert eine neue Doppelfläche Ψ^{4p-8} eines Raumes S_{3p-4} , auf welcher den Geraden λ_i Kegelschnitte entsprechen; Ψ^{4p-8} ist auch das Bild der Schnittkurven von R_2^{p-2} mit allen Quadriken des Raumes S_{p-1} . Die Verzweigungskurven von R, Φ, Ψ bestehen: auf R aus den Geraden λ_i zusammen mit einer weiteren Kurve der Ordnung $n + 2p$; auf Φ aus einer Kurve der Ordnung $2n + 4p$, die die Doppelpunkte nicht enthält; und auf Ψ aus der Projektion dieser letzten Kurve zusammen mit den $n - 2p + 4$ Kegelschnitten. In der Untersuchung der Doppelflächen R, Φ, Ψ muß man den allgemeinen Fall, wo die Geraden λ_i Erzeugende von R sind, von den besonderen Fällen, wo einige der Geraden λ_i Leitkurven von R sind, unterscheiden. Verf. untersucht zunächst die Einzelheiten des allgemeinen Falles, auch unter der besonderen Voraussetzung, daß die Minimalleitkurve von L eine niedrigere Ordnung hat als gewöhnlich. Die besonderen Fälle sind 20; darunter sind auch die Fälle $p = 2$ mitgerechnet, welche besondere Methoden verlangen, da in diesen Fällen, wie schon gesagt, das kanonische Modell versagt und nur das bikanonische übrig bleibt. Es ist bemerkenswert, daß die gefundenen Doppelflächen, sowohl im allgemeinen als auch in den besonderen Fällen, auf verschiedene Weise derart in Reihen angeordnet werden können (mit absteigenden Werten von p), daß jede von ihnen aus der vorangehenden durch eine geeignete Projektion erhalten werden kann. *E. Togliatti.*

Godeaux, Lucien: Construction d'une surface dont le système canonique possède des composantes fixes. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 49—56 (1952).

Une surface $F, \sum_1^3 a_i x_i^n x_{i+1} + a_4 x_4^{n+1} = 0$ ($i = 1, 2, 3, \text{ mod. } 3$) est conservée par une homographie d'ordre $p = (n - 1)^2 + n$. Le cas $n = 3q + 1$ a déjà été étudié par l'A. [ce Zbl. 44, 168 et Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 1106—1119 (1951)]. Dans cette note, étude du cas $n = 3q$. La surface image de l'involution, dont les systèmes pluricanoniques sont construits à partir de la détermination de la structure des points unis de l'involution, a les genres $p_a = p_g = q, p^{(1)} = 3q - 5, P_2 = 4q - 5$. Le système canonique est formé de trois courbes rationnelles et de $q - 1$ courbes elliptiques appartenant à un faisceau linéaire. Le système bicanonique est irréductible. *B. d'Orgeval.*

Godeaux, Lucien: Sur la singularité d'une surface multiple en un point de diramation. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 50—70 (1952).

Poursuivant ses recherches sur la structure des points unis d'une involution appartenant à une surface algébrique F , l'A. étudie le cas d'une involution de période $9n^2 - 3n + 1$, premier. Le point uni A correspond à un point A' de diramation sur la surface F' image de l'involution d'ordre $n + 1$, dont le cône tangent se compose de deux plans et d'un cône rationnel d'ordre $n - 1$, rencontrant suivant une droite chacun des plans, sans intersections communes. Sur l'une de ces droites, il y a un point double conique ∞^t voisin à A' , sur l'autre une succession de points doubles biplanaires ∞^t voisins, terminée par un point biplanair si n impair, par un conique si n est pair. L'A. donne l'équivalence de A' en courbes rationnelles et écrit les relations fonctionnelles qui en dérivent pour les sections de la surface F'' . *B. d'Orgeval.*

Godeaux, Lucien: Sur les systèmes canonique et pluricanoniques d'une surface de genre linéaire un. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 234—243 (1952).

La surface F ,

$$\sum_1^3 a_{i,i+1} x_i^5 x_{i+1} + x_4 \sum_1^3 b_{i,i+1} x_i^3 x_{i+1}^2 + x_4 \sum_1^3 c_{i,i+1} x_i^3 x_{i+1} \\ + d(x_1 x_2 x_3)^2 + e x_4^3 x_1 x_2 x_3 + f x_4^5 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \text{ mod } 3)$$

est conservée par une homographie de période 7, qui y engendre une involution, possédant trois points unis dont l'image est une surface F' , que l'A. étudie en construisant ses systèmes pluricanoniques à partir de la détermination de la structure des points unis. Cette surface a les genres $p_a = p_g = p^{(1)} = 1$, $P_{3i} = 2i + 1$, $P_{3i+1} = 2i + 1$, $P_{3i+2} = 2i + 2$. Cette surface possède un faisceau de courbes elliptiques $|g|$, contenant trois fois une courbe elliptique g_0 . La courbe canonique est $2g_0$, les bicanoniques $|g + g_0|$, les tricanoniques $|2g|$. On peut donner un modèle de cette surface, dans une surface du 6° ordre avec trois points triples dont le cône tangent ne contient que deux plans.

B. d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Sur quelques involutions rationnelles appartenant à une surface algébrique. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 244—252 (1952).

La surface F , $\sum_{i=1}^4 a_i x_i^4 x_{i+1} = 0$ de genres $p_a = p_g = 4$, $P_2 = 10$ est conservée par une homographie de période 17, qui engendre une involution possédant quatre points unis. Etude de la surface F' , image de l'involution à partir de la structure de ses points unis. Cette étude montre que les transformées des courbes canoniques de F' doivent être des canoniques de F , donc des plans passant par chaque point uni, ce qui est impossible; de même pour le système bicanonique; donc F' est rationnelle; sur F , il existe donc une involution rationnelle.

B. d'Orgeval.

Matsusaka, Teruhisa: On the algebraic construction of the Picard variety. Proc. Japan Acad. 28, 5—8 (1952).

In der vorliegenden Note gibt Verf. (ohne Beweise) eine rein algebraische Konstruktion zweier Abelscher Mannigfaltigkeiten im Sinne der algebraischen Geometrie von A. Weil. Es handelt sich um die einer vorgegebenen normalen algebraischen Mannigfaltigkeit V zugeordnete Picardsche Mannigfaltigkeit P und Albanesische Mannigfaltigkeit A . Die erste P ist dadurch bestimmt, daß die Gruppe ihrer Punkte in natürlicher Weise isomorph ist zu der Faktorgruppe $\mathcal{G}_a(V)/\mathcal{G}_l(V)$, wobei $\mathcal{G}_a(V)$ die Gruppe der algebraisch zu 0 äquivalenten Divisoren auf V bedeutet (vgl. A. Weil, dies Zbl. 46, 263) und $\mathcal{G}_l(V)$ die Gruppe der linear zu 0 äquivalenten Divisoren. Die Albanesische A ist eindeutig bestimmt als Abelsche Mannigfaltigkeit mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Funktion f auf V mit Werten aus A derart, daß jede Funktion g auf V mit Werten aus einer Abelschen Mannigfaltigkeit D sich eindeutig mit Hilfe von f linear auf A ausdehnen läßt, d. h. sich eindeutig in der Form $g = \lambda f + a$ schreiben läßt, wobei a eine Konstante und λ ein Homomorphismus von A in D ist. — Wesentlich herangezogen wird die Arbeit von A. Weil über Abelsche Mannigfaltigkeiten (dies. Zbl. 37, 162), die bekannte Arbeit von Chow und v. d. Waerden (dies. Zbl. 16, 40), sowie die bereits oben zitierte Note von A. Weil über Äquivalenzkriterien.

P. Roquette.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Godeaux, Lucien: Sur certaines enveloppes de courbes. Mathesis 61, 5—8 (1952).

L'A. considère des courbes planes qui sont des enveloppes de plusieurs familles de courbes.

G. Ancochea.

Moór, Arthur: Über die Scheitelpunkte der zwei- und dreidimensionalen Kurven. Monatsh. Math. 56, 150—163 (1952).

Es wird zunächst ein „Scheitel“ einer Raumkurve ähnlich verwickelt erklärt wie in einer vorhergehenden Arbeit (dies. Zbl. 42, 156). Mittels einer Integralformel in Verallgemeinerung eines Gedankens von G. Herglotz werden Sätze über Anzahlen solcher Scheitel bewiesen und geometrische Deutungen der Scheitel in Sonderfällen angegeben. Es folgen Verallgemeinerungen auf höhere Dimensionen. *W. Blaschke.*

Bilinski, Stanko: Sur un théorème de Jacobi. Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova, mat. Inst. 18, Nr. 2, 143—146 und französ. Zusammenfassg. 146 (1952) [Serbisch].

Sans faire intervenir explicitement le théorème de Gauss-Bonnet, l'A. démontre le théorème de Jacobi, à savoir que: L'image sphérique de la normale principale d'une courbe fermée régulière divise la surface de la sphère en deux parties égales. *Autoreferat.*

Löbell, Frank: Richtungübertragungen auf einer Fläche. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 55, 89—119 (1952).

Costruzione assiomatica del trasporto di direzioni sopra una superficie ovunque regolare immersa nello spazio euclideo. — Si postula che: I. ad ogni direzione e nell'origine A di un arco regolare di curva c della superficie corrisponde una direzione e' nell'estremo B di c , $e \xrightarrow{c} e'$; II. se gli archi c_1 e c_2 hanno lo stesso estremo da $e \xrightarrow{c_1} e''$, $e' \xrightarrow{c_2} e''$ segue e $\xrightarrow{c_1-c_2} e'$; III. nel trasporto rimane invariato l'angolo di due direzioni per un punto e IV. la lunghezza dei vettori. Con ciò il trasporto di direzioni può pensarsi movimento di un piano rigido (disco) \mathfrak{E} tangente alla superficie lungo una curva. La funzione $e(s)$, ove s è l'arco di c , si suppone (post. V) di classe C^1 . Questi postulati sono compatibili e indipendenti. — Il movimento elicoidale infinitesimo del disco in P nella direzione di c è caratterizzato dalla velocità vettoriale t di P e da un vettore di rotazione $\bar{u} = g + \Psi n$ ove g è il vettore di curvatura geodetica in direzione t (componente tangenziale di u), n è il versore normale in P alla superficie. La legge di trasporto è determinata dalla „funzione di elemento lineare“ $\Psi(P, t) = -\Psi(P, -t)$ detta funzione di trasporto. — Linee caratteristiche (Kennlinien) del trasporto sono quelle per cui $\Psi(P, t) = G(P, t)$ essendo G la curvatura geodetica in direzione t . Se il triedro mobile della superficie in P è individuato dai versori tangenti ortogonali t_1, t_2 e da n per lo spostamento di P con velocità vettoriale t esso subisce una rotazione (Darboux) rappresentata dal vettore $u = g + \Omega n$; le linee caratteristiche sono individuate da $d\varphi/ds = \Psi - \Omega$ ove φ è l'angolo in P di una di esse con t_1 (ed s l'arco), equivalente ad un'equazione differenziale di 2° ordine. — I trasporti lineari sono caratterizzati (post. VI) da $\bar{u} = A t$; ciò porta di conseguenza che se $t = t_1 \cos \varphi + t_2 \sin \varphi$, $\Psi(P, t) = \Psi(P, t_1) \cos \varphi + \Psi(P, t_2) \sin \varphi = \Psi_1 \cos \varphi + \Psi_2 \sin \varphi$, cioè Ψ è funzione lineare di t . Condizione caratteristica per i trasporti lineari è $\Psi + \Psi_{\varphi\varphi} = 0$. Posto $\Psi = v t$, v dicesi vettore caratteristico del trasporto lineare. Si hanno i teoremi: La componente del vettore caratteristico lungo la tangente dà la curvatura geodetica della linea caratteristica avente quella tangente; le proiezioni delle linee caratteristiche per P sul piano ivi tangente sono linee i cui centri di curvatura relativi a P stanno sopra una retta parallela alla tangente alla curva di massima curvatura. — I trasporti geodetici sono caratterizzati da $\Psi \equiv 0$; per essi v è normale. In questo caso il trasporto può definirsi indipendentemente dalla metrica dell'ambiente. I trasporti integrabili, indipendenti dal cammino, sono sempre lineari. Fissata una direzione in un punto A in ogni altro punto viene fissata una direzione nulla, il cui versore s'indicherà con e_0 ($= t_1 \cos \varphi_0 + t_2 \sin \varphi_0$), e un sistema di linee nulle. Per la funzione caratteristica si ha $\Psi(t) = n e_0 d\varphi_0/ds$ e $\Psi(e_0) = \mathfrak{D} e_0$ ove $\mathfrak{D} = t_2 \partial/\partial s_1 - t_1 \partial/\partial s_2$; con questo operatore può anche esprimersi il vettore caratteristico. Si ha il teor.: se le linee caratteristiche di un trasporto sono le traiettorie isogonali di un altro sistema di linee il trasporto è integrabile. — Il criterio d'integrabilità del trasporto si esprime per la funzione caratteristica con la condizione $\frac{\delta \Psi_1}{\delta s_2} - \frac{\delta \Psi_2}{\delta s_1} = K$

ove $\frac{\delta \Psi}{\delta s}$ indica la derivazione geodetica (cioè la derivata della direzione in Ψ va fatta secondo il trasporto geodetico) e K è la curvatura gaussiana; e per il vettore caratteristico con $v + k = 0$. La prima relazione è una generalizzazione del „theorem egregium“ e potrebbe servire a introdurre k . — Trasporti nulli sono detti i trasporti lineari per i quali $\frac{\delta \Psi_1}{\delta s_2} = \frac{\delta \Psi_2}{\delta s_1}$, ovv. $\mathfrak{D} v = 0$; essi sono integrabili solo se $K \equiv 0$. Da segnalare sono anche le interessanti precisazioni storiche nelle note.

E. Bompiani.

Golaž, St. et T. H. Wróbel: Courbure et torsion géodésique pour les courbes situées sur les hypersurfaces à $n - 1$ dimensions plongées dans l'espace à n dimensions. Ann. Soc. Polon. Math. 24, 25—51 (1952).

Golab hat die Bonnet-Kowalewskischen Gleichungen verallgemeinert für eine Kurve einer V_{n-1} in V_n (dies. Zbl. 36, 114). Diese Verallgemeinerung wird jetzt angewandt für den Fall, daß der Raum euklidisch ist. In der vorliegenden Arbeit findet man Verallgemeinerungen der Begriffe „geodätische Krümmung“, „normale Krümmung“, „geodätische Torsion“ und der Theoreme von Bertrand und von Demartres (geometrische Interpretation der geodätischen Torsion).

J. Haantjes.

Wróbel, T. H.: L'interprétation géométrique de la courbure et de la torsion géodésique à l'aide de la représentation hypersphérique de la courbe. Ann. Soc. Polon. Math. 24, 52—55 (1952).

C sei eine Kurve einer V_{n-1} im euklidischen Raum R_n und C_n das sphärische Bild des Vektorfeldes $n^h(s)$ (n^h ist der Einheitsvektor der Flächennormale). Es wird gezeigt, daß für die geodätische Torsion β von C gilt $\beta = -\kappa_1 \cos \omega \operatorname{tg} \varphi_n$, wo κ_1 die erste Krümmung von C ist, ω den Winkel zwischen n^h und der Hauptnormale von C darstellt, während mit φ_n der Winkel zwischen den Tangenten der Kurven C und C_n angedeutet wird (vgl. das vorsteh. Referat).

J. Haantjes.

Wintner, Aurel: On parallel surfaces. Amer. J. Math. 74, 365—376 (1952).

The leading idea of the author in the present and some preceding papers is that the statements in differential geometry which require more than the mere existence of continuous derivatives of second order (necessary to have continuous total and mean curvature K and H) can hardly be justified for geometrical reasons. Consequently it is interesting a revision of the fundamental theorems of differential geometry in order to free them of all the unnecessary restrictions. For instance, from a general theorem of S. Bernstein on analytic differential equations of elliptic type, one deduces that every surface S of class C^3 having a constant positive curvature K is an analytic surface; in the present paper the author proves that it is enough to assume that S is of class C^2 . The proof uses a noteworthy theorem on parallel surfaces. In fact if a surface is of class C^2 , the parallel surface at the distance h , instead of being of class C^1 , is again of class C^2 , provided that the region considered be sufficiently small and two numerical values of h (the roots of the equation $1 - 2hH_0 + h^2K_0 = 0$, where H_0 and K_0 are the values of H and K at any given point of the region considered) be excepted. As a corollary the smoothness assumptions in a classical theorem of Liebmann are reduced to a minimum as follows: if a closed orientable surface of class C^2 has $K \equiv 1$, it is a sphere. The paper ends with an appendix on the supporting function of Minkowski, showing that, if parabolic points are excluded and the surface is of class C^2 and sufficiently small, the supporting function is again of class C^2 instead of being only of class C^1 .

L. A. Santaló.

Wintner, Aurel: On isometric surfaces. Amer. J. Math. 74, 198—214 (1952).

The author observes that in the theory of transformation of surfaces $X(u, v) \rightarrow X'(u', v')$ (in particular the isometry) the writers are in general not careful enough to specify the assumptions of smoothness of the two surfaces or the degree of smoothness required to the mapping $u' = u'(u, v)$, $v' = v'(u, v)$ which realizes the transformation in question. For the ordinary theory of surfaces, since both fundamental forms exist and are continuous on surfaces of class C^2 , most of the theorems often restricted to surfaces of class C^3 are also valid for surfaces of class C^2 . For instance the proof of Herglotz (this Zbl. 28, 94) of the theorem which states that two closed, essentially convex surfaces are congruent whenever they are isometric, assumes that the surfaces and the mapping which realizes the isometry are of class C^3 . The author, using some previous results of himself and Hartmann, proves that it is enough to assume the surfaces and the mapping of class C^2 . Some other examples are given in which plays a central role the following interesting lemma: If the surfaces X and X' are analytic and C^1 -isometric, then all of their C^1 -isometries are analytic isometries. Mention is made of some unsolved problems.

L. A. Santaló.

Grotemeyer, K. P.: Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform. Math. Z. 55, 253—268 (1952).

Dans l'espace euclidien à 3 dimensions, deux surfaces convexes isométriques sont congruentes ou symétriques. L'A. montre que ce théorème, démontré tout

d'abord par Cohn-Vossen, peut être étendu à certaines surfaces non complètes, entre autres à deux morceaux de surface à courbure totale positive qui ont pour frontières des courbes planes et qui sont tangentes au plan de ces courbes le long de celles-ci. Ceci entraîne une certaine rigidité des surfaces considérées (p. ex. de la partie extérieure d'un tore). La méthode de démonstration est en principe celle d'Herglotz; elle utilise le calcul différentiel invariant dont les principales formules servant à l'étude locale et globale des surfaces plongées dans l'espace euclidien sont résumées au début de l'article. L'A. en déduit une formule fondamentale qui permet d'exprimer à l'aide d'une intégrale curviligne l'intégrale $\iint_F \frac{\|A_{ik}\|}{\|g_{ik}\|} \{P + P^*\} do$

relative à deux morceaux de surface isométriques F et F^* , où $\|g_{ik}\|$ désigne le discriminant de la première forme fondamentale, commune aux deux surfaces; $\|A_{ik}\|$ le discriminant de la différence des deux secondes formes fondamentales; P et P^* les fonctions d'appui de F et de F^* ; do l'élément d'aire, commun aux deux surfaces. Fiala.

Pogorelov, A. V.: Über das Randwertproblem für die Gleichung $rt - s^2 = \varphi(x, y)$ und seine geometrischen Anwendungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 361—363 (1952) [Russisch].

Für seine flächentheoretischen Untersuchungen benötigt Verf. eine Lösung der Randwertaufgabe für die Differentialgleichung $rt - s^2 = \varphi(x, y)$, worin $\varphi(x, y)$ positiv und analytisch oder wenigstens dreimal stetig differenzierbar im Bereich $x^2 + y^2 \leq R^2$ vorgegeben ist. Die Lösung $z(x, y)$ soll auf dem Kreisrand gleich einer vorgegebenen stetigen Funktion sein und existiert dann auch. Nach einer leichten Übertragung des Problems auf die Einheitskugel besagt die Lösbarkeit der Randwertaufgabe dann gerade die Bestimmtheit einer konvexen Fläche F durch Vorgabe der Krümmung im Inneren eines konvexen Gebiets ω auf der Einheitskugel sowie der Stützfunktion von F auf dem Rande von ω . W. Burau.

Jonas, Hans: Die allgemeinen äquidistanten Transformationen der von Bianchi entdeckten isometrischen Paare Tschebyscheffscher Netze. J. reine angew. Math. 189, 207—237 (1952).

Vorliegende Abhandlung schließt an die vom Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 7, 422—423) entwickelte Theorie einer äquidistanten Kurventransformation an. Zuerst gibt er eine Darstellung des auf das Tschebyscheffsche Netz (α, β) bezogenen Bianchischen Flächenpaares mit einem Hinweis auf seine einzelnen Eigenschaften und mit der Einführung der Differenzfläche, der durch vektorielle Subtraktion erhaltenen Hilfsfläche, auf welcher die Kurven α, β das Netz der Asymptotenlinien bilden. Daran schließt sich die Aufstellung des Differentialgleichungssystems für die von einem Konstantenpaar (k, n) abhängige äquidistante Transformation des Flächenpaares, das in ein unbeschränkt integrierbares lineares und homogenes System übergeführt wird; den Schwerpunkt bildet der Beweis des „Vertauschbarkeitssatzes“, der die Zusammensetzung der Transformation (k, n) beherrscht und den viergliedrigen Transformationszyklus (Bianchi-Viereck) erkennen läßt. Den Abschluß bildet die Anwendung der Transformation auf das Asymptotennetz einer pseudosphärischen Fläche (Bäcklundsche Transformation; vgl. dazu des Verf. frühere Arbeit, dies. Zbl. 35, 376). O. Volk.

Goormaghtigh, R.: Sur les familles de cercles et de sphères. Mathesis 61, 29—31 (1952).

Sei $m(s)$ eine Kurve in einem Raum beliebiger Dimension. Jedem ihrer Punkte seien die beiden Kugeln C_i

$$(\chi_i - m)^2 - r_i^2(s) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

zugeordnet. Die Berührungspunkte dieser beiden Kugelscharen mit ihren Enveloppen genügen den Gleichungen ($' = d/ds$)

$$(1) \quad (\chi_i - m) m' = -r_i r_i'.$$

Betrachtet man außerdem die Kugeln $\Gamma(s)$ mit den Radien $r_2(s)$ um den festen Punkt O : $\xi^2 - r_2^2 = 0$, so hat die Potenz(hyper)ebene von C_1 und Γ die Gleichung

$$2 \xi m - m^2 = r_2^2 - r_1^2,$$

ihre Berührungspunkte mit ihrer Enveloppe genügen der Gleichung

$$(2) \quad (\xi - m) m' = r_2 r_2' - r_1 r_1'.$$

Die linken Seiten von (1) und (2) sind die x -Koordinaten x, x_i der betr. Punkte in einem mit der Kurve m verbundenen Koordinatensystem mit m' als 1-Vektor der x -Achse; aus (1) und (2) ergibt sich $x = x_1 - x_2$. Verf. leitet diese Gleichung mit etwas anderer Rechnung ab und gibt ihre geometrische Deutung und einige Sonderfälle an.

H. Gericke.

Vincensini, Paul: Sur les congruences de sphères de Ribaucour arbitrairement déformables. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 503—505 (1952).

Eine Ribaucoursche Kugelkongruenz \mathfrak{R} ist durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß sich auf ihren Hüllflächen Σ, Σ' die Krümmungslinien entsprechen. Ist Φ die Deferente [Ort der Kugelmitten $M(u, v)$], so entsteht durch beliebige Verbiegung von Φ (im Sinne von Gauß) unter Festhalten der Kugelradien $R(u, v)$ aus \mathfrak{R} nur dann wieder eine Ribaucoursche Kugelkongruenz, wenn diese im Sinne L. Bianchis [Lezioni di geometria differenziale, vol. II, 1. Teilbd., Pisa 1923, § 318] „unbeschränkt verbiegbar“ ist. Bezeichnet man die Hauptkrümmungsradien der Hüllflächen Σ und Σ' in entsprechenden Punkten mit r_1, r_2 und r_1', r_2' , so gilt nach G. Ricci [Verh. Internat. Math. Kongreß Zürich **2**, 154—156 (1932)] der Satz, daß bei Verbiegungen der Deferente Φ einer Ribaucourschen Kongruenz \mathfrak{R} die Ausdrücke $A = 1/(R + r_1) \cdot (R + r_2) + 1/(R + r_1') (R + r_2')$ und $B = 1/(R + r_1) + 1/(R + r_2) + 1/(R + r_1') + 1/(R + r_2')$ ungeändert bleiben, und daß darüber hinaus noch bei einer unbeschränkt verbiegbaren Ribaucourschen Kugelkongruenz \mathfrak{R}_a eine (sie kennzeichnende) biegungsinvariante Relation der Form $f(r_1, r_2, r_1', r_2', u, v) = 0$ existiert [die nicht bloß die Form $F(A, B, u, v) = 0$ hat]. — In vorliegender Note gelingt es dem Verf., die genaue Gestalt dieser die Kongruenzen \mathfrak{R}_a kennzeichnenden Relation anzugeben, indem er die Größen $A' = 1/(R + r_1) (R + r_2) - 1/(R + r_1') (R + r_2')$ und $B' = 1/(R + r_1) + 1/(R + r_2) - 1/(R + r_1') - 1/(R + r_2')$ einführt, die bei Biegung der Deferente Φ zwar nicht invariant sind, sich aber als lineare Kombinationen der zweiten Fundamentalgrößen von Φ darstellen lassen. Es zeigt sich, daß diese Größen A' und B' dann und nur dann proportional sind, wenn die Ribaucoursche Kongruenz unbeschränkt verbiegbar, also eine \mathfrak{R}_a ist. Die genaue Gestalt der Riccischen Relation ist daher $A' - \lambda(u, v) B' = 0$. Der Proportionalitätsfaktor $\lambda(u, v)$ kann dabei geometrisch einfach gedeutet werden, wenn man zuvor die Deferente Φ von \mathfrak{R}_a gemäß einem Satze von Bianchi (a. a. O.) so verbiegt, daß sie die Gestalt einer Drehfläche annimmt. — Zum Schluß wird bemerkt, daß bei keiner Kugelkongruenz zwischen den Größen $r_1, r_2, r_1', r_2', u, v$ mehr als drei Relationen bestehen können. Das Maximum von drei Relationen wird bei den Kongruenzen \mathfrak{R}_a erreicht.

K. Strubecker.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Ščerbakov, R. N.: Affin- und projektiv-invariante Klassen von Linien auf einer Fläche, die mittels der adjungierten Linie charakterisiert werden können. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **83**, 39—42 (1952) [Russisch].

Il presente lavoro si ricollega a una nota di N. G. Tuganov [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **30**, 381 (1941)] in cui, sopra una superficie dello spazio ordinario, la classe delle linee i cui invarianti metrici sono legati da relazione lineare a coefficienti costanti viene caratterizzata dalla possibilità di associare a ogni linea L della classe una linea L^* di un'altra superficie di guisa che i riferimenti canonici in punti corrispondenti delle due linee risultino invariabilmente collegati fra loro. L'A. trasporta ora tale problema dall'ambito della geometria metrica a quelli delle geometrie affine e proiettiva, valendosi dei riferimenti canonici già introdotti in due suoi precedenti lavori (questo Zbl. **44**, 177, 364): riesce così a riunire in un'unica trattazione svariate famiglie di linee notevoli dai punti di vista affine e proiettivo.

P. Buzano.

Wunderlich, Walter: Euklidische und nichteuklidische D -Linien auf Quadriken. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **33**, 145—164 (1952).

D -Linien sind diejenigen Kurven auf einer Fläche Φ , deren Schmiegekugeln Σ die Fläche berühren. Ist Φ eine Quadrik, so haben Φ und Σ eine rationale Quartik h gemeinsam, und alle h gehen durch die vier absoluten Punkte I_1, I_2, I_3, I_4 von Φ . Der Berührungspunkt T ist ein Doppelpunkt von h . Von T aus wird h durch einen Kegel 2. Ordnung projiziert, dessen Fernkegelschnitt die Punkte I_n enthält. Die von den Tangenten einer D -Linie erzeugte Torse schneidet die Fernebene in Kegelschnitten des Büschels mit den Grundpunkten I_n . Das ist der Ausgangspunkt für eine Reihe von meist synthetisch gewonnenen Aussagen über die D -Linien einer Quadrik; u. a.: Sie sind affine Böschungslinien. Ihre Zentralprojektionen vom (eigentlichen oder uneigentlichen) Mittelpunkt von Φ aus sind Evoluten eines Kegelschnitts in einer bestimmten Cayley-Kleinschen Metrik. Bei Projektion vom einem Nabelpunkt aus auf eine Kreisschnittebene ergeben sich Orthogonaltrajektorien einer Schar von doppelt berührenden Kreisen eines Cartesischen Ovals. Von den ∞^1 D -Kurven eines Ellipsoids, deren Spitzen auf einer Krümmungslinie liegen, schließt sich entweder jede oder keine. Der Ort der Krümmungsmittelpunkte ist wieder affine Böschungslinie einer (anderen) Quadrik. Ferner ergeben sich Sätze von Hardy, Enneper und Waelsch, schließlich eine Parameterdarstellung. — Ausführliche Untersuchung der Verhältnisse in nicht-euklidischen Räumen.

H. Gericke.

Klingenberg, Wilhelm: Über das Einspannungsproblem in der projektiven und affinen Differentialgeometrie. Math. Z. 55, 321—345 (1952).

Das projektive Problem besteht darin, zu jedem Punkte P einer p -dimensionalen Mannigfaltigkeit M im projektiven R_n ein invariantes Begleitsimplex zu definieren. Ist d_i die Dimension des i -ten linearen Schmiegraumes S_i von M in P , also $d_1 = p$, und $d_{i+1} = d_i + r_i$ und P ein Punkt von M , für den die r_i maximal sind, und gibt es ein m für das $d_m < n$, $d_{m+1} = n$, so ist $r_i > 0$ für $1 \leq i \leq m$. Das Simplex soll dann bestehen aus P , p Punkten P_k aus S_1 , die mit P diesen Tangentenraum aufspannen, und je r_i Punkten, die mit S_i den S_{i+1} aufspannen. Dem von diesen r_i Punkten aufgespannten linearen Raum nennt Verf. den i -ten Normalenraum N_i . N_0 liegt in S_1 und wird von den P_k aufgespannt, geht also nicht durch P . — Bei Hyperflächen ist $v = n - 1$, $r_1 = 1$, N_1 also 0-dimensional. Wird hier N_0 in der Tangentenhyperebene beliebig gewählt, so kann man die Gerade $P N_1$ eindeutig durch eine Apolaritätsbedingung für den kubischen Fundamentaltensor festlegen (vgl. G. Bol, dies. Zbl. 41, 90). Verf. verallgemeinert dies; wird N_0 vorgegeben, so kann man durch entsprechende Apolaritätsforderungen der Reihe nach die N_i eindeutig fixieren. Es müssen dazu eine Reihe von Regularitätsbedingungen erfüllt sein, deren Gültigkeit sich nicht immer leicht überblicken läßt. — Der Fall $m = 1$ läßt sich jedoch leicht behandeln, außer den Hyperflächen fallen darunter auch die konjugierten Netze im R_4 . Für erstere gewinnt man die oben zitierte Theorie des Ref. wieder. — Ist der Raum affin, so kann man N_0 im unendlichen wählen, dann sind alle N_i affinvariant festgelegt. Bei Kurven sind die Punkte N_i die Ableitungen des affinnormierten Kurvenvektors nach der Affinbogenlänge.

G. Bol.

Muracchini, Luigi: Sulla deformazione proiettiva delle trasformazioni puntuali. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 29—38 (1952).

Siano T e \bar{T} due trasformazioni puntuali rispettivamente fra i piani α, β e i piani $\alpha, \bar{\beta}$: l'A. chiama corrispondenza fra le due trasformazioni puntuali T e \bar{T} ogni corrispondenza fra il sistema delle ∞^2 coppie di punti (A, B) associati in T e il sistema delle ∞^2 coppie di punti (\bar{A}, \bar{B}) associati in \bar{T} . Servendosi dei procedimenti analitici già utilizzati da O. Borůvka [Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, Nr. 72 e 85 (1926—27)] e limitandosi per ora alle trasformazioni che questi chiama di 1ª specie, l'A. prova anzitutto che se una corrispondenza Δ fra T e \bar{T} è tale che in essa gli intorni del 3º ordine di coppie corrispondenti sono sempre omografici, allora le due trasformazioni T e \bar{T} sono esse stesse omografiche (ossia Δ consiste in un'omografia fra α e $\bar{\alpha}$ e in un'altra fra β e $\bar{\beta}$). Escluso questo caso, l'A. conviene di dire che Δ è una deformazione proiettiva quando esiste una coppia di omografie (una fra α e $\bar{\alpha}$, l'altra fra β e $\bar{\beta}$) che approssimano analiticamente Δ fino al 1º ordine e realizzano l'uguaglianza degli intorni del 2º ordine di T e \bar{T} nonchè il

contatto del 2° ordine fra le curve uscenti da coppie di punti corrispondenti e tangenti alle direzioni caratteristiche (anch'esse corrispondenti) di T e T . Partendo da tale definizione l'A. scrive il sistema di Pfaff da cui dipende la determinazione delle trasformazioni di 1ª specie proiettivamente deformabili e rileva talune analogie formali con le ordinarie applicabilità proiettive delle superficie. *P. Buzano.*

Bell, P. O.: A theorem on conjugate nets in projective hyperspace. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 300—302 (1952).

The author proves the following theorem: In a projective space S_n ($n \geq 3$) let $x^h(u, v)$ be a conjugate net. Let P, Q be points on the u -, v -tangents at x of the net respectively, which describe two nets N_P, N_Q having the property that the tangent plane of N_P (N_Q) at P (Q) passes through Q (P). Then the nets N_P and N_Q are conjugate nets and each one of them is a Laplace transformed net of the other one. The proof is mainly based on the relations

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = aQ + bP, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \alpha P + \beta Q$$

which follow immediately from the assumptions. The theorem is a generalization of a theorem of Hsiung (this Zbl. **44**, 180). *J. Haantjes.*

Feld, J. M.: On the geometry of lineal elements on a sphere, euclidean kinematics and elliptic geometry. Canadian J. Math. **4**, 93—110 (1952).

Man kann die Gruppe M_3 der Drehungen einer Kugel σ nach Cayley durch die Quaternionengleichung $x' = a^{-1}xa$ darstellen, und damit die Kugeldrehungen mit Stephanos auf die Punkte a eines elliptischen Raumes E_3 (mit der Maßfläche $x\bar{x} = 0$) abbilden, der dann nach Lie als Parameterraum von M_3 fungiert. Repräsentiert man die ∞^3 Lagemöglichkeiten der Kugel σ durch die ∞^3 orientierten Linienelemente a von σ , d. h. durch deren relative Lagen zu einem (wahlfreien) Urelemente e , das der Ausgangslage von σ entspricht, so sind schließlich die Punkte a des elliptischen Raumes E_3 auf die orientierten Linienelemente a von σ übertragen. Die Cliffordschen Rechtsschiebungen $x' = xa$ in E_3 bilden sich dann auf der Kugel σ als Drehungen („motions“) der Linienelemente ab, die dazu kommutativen Linksschiebungen $x' = bx$ als Turbinendrehungen oder Wirbelbewegungen („whirls“). Diese dreigliedrigen Gruppen M_3 und W_3 bilden zusammen eine sechsgliedrige Gruppe G_6 von Elemententransformationen („whirl-rotations“) der Kugel σ , der im elliptischen Raum E_3 die Gruppe der elliptischen Bewegungen entspricht. Den Geraden bzw. Ebenen des Raumes E_3 sind dabei auf σ Drehscharen von Linienelementen („Turbinen“) bzw. lineare Elementenfelder zugeordnet und der Geometrie des elliptischen Raumes E_3 entspricht die interessante auf die Gruppe G_6 gegründete Geometrie der orientierten Linienelemente der Kugel σ , die zuerst von Ref. untersucht wurde (dies. Zbl. **10**, 34). Verf. behandelt in vorliegender Arbeit die Differentialgeometrie der einparametrischen Scharen orientierter Linienelemente unter der Gruppe G_6 , die also der Kurventheorie des elliptischen Raumes E_3 entspricht, wie sie seit den Arbeiten von Bianchi entwickelt worden ist. Als adäquates Hilfsmittel dient dabei der Kalkül der Quaternionen. Sind x und y zwei orientierte Linienelemente der Kugel, dargestellt durch die gleichnamigen Quaternionen der Drehungen, durch die sie aus dem Urelement e hervorgehen, so ergibt sich ihr elliptischer Abstand δ aus der metrischen Grundformel $\cos^2 \delta = (xy)^2 / (xx)(yy)$, wobei (xy) das Innenprodukt der beiden Quaternionen, d. h. den Ausdruck $\frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$ bedeutet. Die beiden Linienelemente bestimmen dann eindeutig eine lineare Elementenreihe (Turbine \mathfrak{T}), die man auf das geordnete Punktepaar

$$l = \frac{y\bar{x} - x\bar{y}}{2\sqrt{(xx)(yy)}} \operatorname{cosec} \delta, \quad r = \frac{\bar{x}y - \bar{y}x}{2\sqrt{(xx)(yy)}} \operatorname{cosec} \delta$$

der (doppelt überdeckten) Kugel $\sigma = (\sigma_l, \sigma_r)$ abbilden kann. l ist der linke, r der rechte Studysche Bildpunkt der Geraden $[xy]$ des elliptischen Raumes E_3 , die der Turbine \mathfrak{T} entspricht. Die Kurventheorie des elliptischen Raumes wird damit identisch mit der sphärischen Geometrie zweier (isometrischer) Kurven (l, r) auf den Kugeln σ_l, σ_r (Study). Ist dann $x(t)$ eine einfache Schar von orientierten Linienelementen der Kugel σ ($x\bar{x} = 1$), so erhält man für sie das gegenüber G_6 invariante Bogenelement $d\sigma = \sqrt{(dx d\bar{x})}$, das geometrisch leicht zu deuten ist. Ebenso kann man mit jedem Elemente x der Schar ein einfach zu deutendes, gegen G_6 invariantes begleitendes Tripel von Linienelementen finden und damit die Gegenstücke der Frenetschen Ableitungsformeln gewinnen, welche die Differentialinvarianten niedrigster Ordnung, nämlich die G_6 -Krümmung und die G_6 -Torsion der Elementenschar $x(t)$ liefern, die auch ihrerseits einfach gedeutet werden können. *K. Strubecker.*

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Borel, Armand et André Lichnerowicz: Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1835—1837 (1952).

Verff. untersuchen die von E. Cartan definierten Holonomiegruppen [vgl. E. Cartan, Oeuvres complètes. Partie I, Vol. 1, p. 69—71] Φ_x volle Holonomiegruppe, Ψ_x Holonomiegruppe ohne Torsion, ϱ_x, σ_x entsprechende Gruppen bei Beschränkung auf nullhomotope Wege. Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit sind die Differentialformen mit verschwindender kovarianter Ableitung den bezüglich Ψ_x invarianten Formen eineindeutig zugeordnet. Hieraus ergibt sich z. B., daß eine Mannigfaltigkeit V^{2n} dann und nur dann eine lokal kählersche Struktur tragen kann, wenn es eine eigentliche, von der Identität verschiedene Rotation gibt, welche mit allen Operationen aus Ψ_x vertauschbar ist. σ_x gibt Eigenschaften, die V^{2n} und ihre universelle Überlagerung gemeinsam haben. Es ergibt sich, daß σ_x kompakt und gleich der die Identität enthaltenden Komponente von Ψ_x ist. Weiter werden noch lokal reduzible Riemannsche Metriken untersucht. *H. Guggenheimer.*

Lichnerowicz, André: Variétés pseudokähleriennes à courbure de Ricci non nulle; application aux domaines bornés homogènes de C^n . C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 12—14 (1952).

Die in der vorstehend besprochenen Note des Verf. mit A. Borel untersuchten Holonomiegruppen werden für Kählersche (nicht notwendig analytische) Mannigfaltigkeiten weiter untersucht. Das Hauptresultat ist, daß eine spezielle homogene Holonomiegruppe kein diskretes Zentrum haben kann, wenn die Ricci-Krümmung der Kählerschen Metrik nicht verschwindet. Hieraus ergeben sich Kriterien dafür, daß der Wirkungsraum einer Lieschen Gruppe hermitesch symmetrisch ist. *H. Guggenheimer.*

Borel, Armand et André Lichnerowicz: Espaces riemanniens et hermitiens symétriques. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2332—2334 (1952).

Complétant des travaux de E. Cartan et utilisant les notations d'espaces fibrés, les AA. établissent que le groupe local des isométries locales d'un espace riemannien localement symétrique admet une structure de Lie naturelle. Un espace homogène G/H où G est connexe de Lie, H compact, sans sous-groupe autre que l'unité invariant dans G , sera dit homogène symétrique si H est caractéristique d'un automorphisme involutif de G ; G/H est alors globalement symétrique pour toute métrique riemannienne invariante par G . Si G/H est homogène riemannien symétrique et si G est semi-simple, G contient le plus grand groupe connexe local d'isométries locales de G/H . Toute forme différentielle sur G/H , invariante par G est à dérivée covariante nulle. Etude du cas hermitien: pour que l'espace homogène riemannien symétrique G/H soit hermitien symétrique, il faut et il suffit, si G est semi-simple, que le groupe linéaire d'isotropie laisse invariante une structure complexe de l'espace tangent; G/H est alors localement isomorphe au produit d'un espace unitaire par des espaces hermitiens symétriques G_i/H_i où G_i est simple; parmi ces derniers ceux qui sont compacts sont explicités. *P. Lelong.*

Kurita, Minoru: Riemann space with two-parametric homogeneous holonomy group. Nagoya math. J. **4**, 35—42 (1952).

In his paper (this Zbl. **39**, 178) Liber proved the following theorem: Suppose that the rational part of the holonomy group H of a given Riemannian space V_n be a one parametric group. Then V_n admits $(n-2)$ parallel vector fields which are independent each other. Accordingly V_n is the Pythagorean product of a two dimensional (non flat) Riemannian space and an $(n-2)$ dimensional Euclidean space (in symbolic notation: $V_n = V_2 \times E_{n-2}$). The referee gave an alternative proof of this theorem by means of Cartan's fundamental Lemma (Proc. Acad. Japan **27** (1951)). Using a method analogous to it the author generalized the theorem to two parametric group. The result is given by the following symbolic notation: $V_n = V_2 \times V_2 \times E_{n-4}$. This theorem was also discovered by N. H. Kuiper (this Zbl. **44**, 185) independently and was generalized to the case of integrable groups by H. Wakakuwa [Tôhoku math. J., II. Ser. **4**, 96—98 (1952)]. *S. Sasaki.*

Janenko, N. N.: Metriken der Klasse 2. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 667—669 (1952) [Russisch].

Es handelt sich um m -dimensionale Metriken vom Typ $t = 2$ und einem Rang $r \geq 5$; der an sich mögliche Fall $r = 4$ bleibt außer Betracht. — I. Sei $t = 2$, $r > 5$. Es wird eine die gegebene Metrik umschließende $(m + 1)$ -dimensionale Metrik gebildet. Dann und nur dann, wenn sie eine Klasse ≤ 1 hat, ist die Klasse der gegebenen Metrik ≤ 2 . — II. Sei $t = 2$, $r = 5$. Man hat 2 Fälle zu unterscheiden, je nachdem das System $[\Phi_{ij} \varphi_i] = 0$ mit $\Phi_{\alpha\beta} = [\Omega_{(\alpha_1\beta_1} \Omega_{\alpha_2\beta_2)}]$ und $\Omega_{ij} = R_{ij,kl} [\omega^k \omega^l]$ 2 oder 3 linear unabhängige Lösungen besitzt. Im ersten Fall, wenn die Bedingung für die Lösbarkeit von $\sum_{s=1}^2 [\psi_i^s \psi_j^s] = \Omega_{ij}$ erfüllt ist und die ψ_i^s den „Codazzischen“ Integrabilitätsbedingungen genügen, hat die Metrik die Klasse 2. Im zweiten Fall kann man, wie für $r > 5$, eine einschließende Metrik bilden und den genau entsprechenden Lehrsatz formulieren. *E. Rembs.*

Pu, P. M.: Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds. Pacific J. Math. 2, 55—71 (1952).

Soit M^2 une variété différentiable compacte à 2 dimensions admettant des courbes fermées non-homotopes à zéro. Si M^2 est muni d'une structure de variété riemannienne par la donnée d'une métrique, soient A l'aire de la variété et a la plus grande borne inférieure de la longueur de telles courbes. Dans le cas où M^2 est un tore, on sait, par exemple d'après Loewner (non publié), qu'entre A et a on a l'inégalité $A \geq \sqrt{3} a^2/2$, quelle que soit la métrique envisagée et qu'il existe une métrique telle que l'égalité soit atteinte. Dans le présent papier, l'A. démontre l'existence d'inégalités analogues pour le plan projectif P^2 et la bande de Möbius. Dans le cas du plan projectif, l'A. adopte pour métrique privilégiée sur P^2 une métrique elliptique pour laquelle $A = (2/\pi) a^2$. Il établit à l'aide d'un lemme général qu'en changeant de métrique A ne peut que croître et a décroître. On a par suite pour toute métrique sur P^2 , l'inégalité $A \geq (2/\pi) a^2$, la constante $(2/\pi)$ étant la meilleure possible. Ce résultat est étendu, avec quelques restrictions et une constante convenable, au plan projectif P^n par utilisation de l'inégalité de Hölder. Dans le cas de la surface de Möbius, l'A. détermine encore, par intégration invariante et d'une manière fort intéressante, une métrique privilégiée

$$ds^2 = \frac{4e^{\pi y/\alpha}}{(1 + e^{\pi y/\alpha})^2} (dx^2 + dy^2)$$

métrique pour laquelle on a la propriété

$$A = \frac{2}{\pi} \frac{e^{\beta \pi/\alpha} - 1}{e^{\beta \pi/\alpha} + 1} a^2$$

où 2α et 2β sont les longueurs euclidiennes des côtés du rectangle fondamental définissant la surface. Il en résulte une inégalité analogue à celle valable pour P^2 .

A. Lichnerowicz.

Mishra, R. S.: Sur certaines courbes appartenant à un sous-espace d'un espace riemannien. Bull. Sci. math., II. Sér. 76_I, 77—84 (1952).

Let K be a congruence of curves in a Riemannian space V_m . A curve C of a sub-space V_n of V_m ($n < m$) is called a union curve if its osculating geodesic surface at every point contains the tangent to the curve of K which passes through the point. If the geodesic surface determined by the tangent and a normal to C contains the tangent to the corresponding curve of K , then C is called a hyperasymptotic curve. The author determines the differential equations of the union and hyperasymptotic curves of a V_n contained in V_m and deduces some consequences.

L. A. Santaló.

Angelitch, Tatmir: Verallgemeinerung des Begriffs des Darbouxschen Vektors für den Raum von Riemann. Srpska Akad. Nauka, Sbornik Radova, mat. Inst. 18, Nr. 2, 147—157 und deutsche Zusammenfassg. 157—158 (1952) [Serbisch].

In diesem Aufsatz wird gezeigt, was im Riemannschen Raum V_N von N Dimensionen, dessen Metrik durch die im allgemeinen Falle indefinite quadratische Form $ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j$ festgelegt ist, dem Begriff des Darbouxschen Vektors der Differentialgeometrie des Euklidischen dreidimensionalen Raumes entspricht und wie für den Riemannschen Raum der sogenannte Lancrertsche Satz verallgemeinert werden kann. Verf. knüpft an eine Arbeit von W. Blaschke [Math. Z. 6, 94—99 (1920)] an und zeigt, daß dem Begriff des Darbouxschen Vektors ein antisymmetrischer Tensor N -ter Ordnung mit den Komponenten $\omega_{k, k+1} = -\omega_{k+1, k} = \varepsilon_{k+1} \varkappa_k$ ($k = 1, \dots, N-1$), $\omega_{h, k} = 0$ sonst ($h, k = 1, \dots, N$) entspricht, wo \varkappa_h die $N-1$ Krümmungen und ε_h die Zeiger der Richtung der einzelnen Einheitsvektoren des lokalen natürlichen N -Beins der gegebenen Kurve sind. Zum Schluß weist Verf. auf verschiedene Möglichkeiten der Verallgemeinerung des Lancrertschen Satzes hin.

Autoreferat.

Yano, Kentaro: Some remarks on tensor fields and curvature. Ann. of Math., II. Ser. 55, 328—347 (1952).

This paper may be seen as an elegant treatment of a problem which gives relations between Betti numbers and curvature tensors of Riemannian spaces. The method of attack is essentially due to Bochner, but a new fundamental identity is found here and from the identity the author derives many theorems concerning harmonic tensors (and hence Betti numbers) and Killing tensors of the Riemannian manifold in consideration. Many theorems due to Bochner (this Zbl. 38, 344; 39, 176), Lichnerowicz (this Zbl. 38, 344), Mogi [Kodai Math. Sem. Rep. 4, 5 (1950)] and de Rham (Kodaira, Harmonic Integrals, Lectures delivered at the Inst. for Advanced Study 1950) are derived in this way. In the following we shall show the main idea of this paper. Let V_n be an n -dimensional orientable compact Riemannian space with the fundamental tensor g_{ij} and let $\xi_{i_1 i_2 \dots i_p}$ be an arbitrary skew symmetric tensor field. The author derives first by virtue of the fact that the integral of the divergence of any vector field is zero an identity which states that an integral vanishes where the integrand being an expression concerning R_{ij} , $\xi_{i_1 \dots i_p}$, $R_{ijk l}$, $\xi_{i_1 i_2 \dots i_p, j}$. When $\xi_{i_1 i_2 \dots i_p}$ is a harmonic tensor, the fundamental identity is simplified as follows:

$$\int \left[R_{ij} \xi^{i_1 i_2 \dots i_p} \xi^{j i_2 \dots i_p} + \frac{p-1}{2} R_{ijkl} \xi^{ij i_3 \dots i_p} \xi^{kl i_3 \dots i_p} + \frac{1}{p} \xi^{i_1 \dots i_p, j} \xi_{i_1 i_2 \dots i_p, j} \right] dV = 0.$$

As the last term of the left hand side is a sequence of the tensor $\xi_{i_1 i_2 \dots i_p, j}$ if the sum of the first and second terms is non negative, then $\xi_{i_1 \dots i_p, j} = 0$. Hence if the space in consideration has the property that the quadratic form

$$R_{ij} \xi^{i_1 i_2 \dots i_p} \xi^{j i_3 \dots i_p} + \frac{p-1}{2} R_{ijkl} \xi^{ij i_3 \dots i_p} \xi^{kl i_3 \dots i_p}$$

is positive definite throughout the whole space, then $\xi_{i_1 \dots i_p} \equiv 0$. Hence it yields a theorem which states the vanishing of the p -th Betti number of the given manifold. The author treats also the case of Killing tensors (skew symmetric tensors whose covariant derivatives are also skew symmetric in all indices) and the cases where R_{ijkl} take special forms and semi-simple groups.

S. Sasaki.

Hodge, W. V. D.: Structure problems for complex manifolds. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 11, 101—110 (1952).

Dieser Vortrag gibt im wesentlichen eine Übersicht über das Problem der Integration einer fastkomplexen Struktur zu einer komplexen. Verf. geht dabei von der Eckmann-Frölicherischen Form des Integrationskriteriums (dies. Zbl. 42, 405) aus und leitet zuerst eines des Ref. (erscheint in Tôhoku math. J.) ab, sowie das folgende: Zu jedem Tensor ζ_j^i ($\zeta_j^i \zeta_i^k = -\delta_j^k$) gibt es einen symmetrischen affinen Zusammenhang, so daß die kovariante Ableitung von ζ_j^i verschwindet. Wenn dieser Zusammenhang zu einer Riemannschen Metrik gehört, ist die fastkomplexe Struktur integrabel und umgekehrt. [Dies ist nichts anderes als das Kriterium von de Rham: Notwendig und hinreichend zur Integrabilität ist, das eine mit ζ_j^i vertauschbare hermitesche Metrik einen symmetrischen Zusammenhang ergibt. Es ist sehr zu bedauern, daß über dieses Kriterium eigentlich nichts publiziert worden ist außer einer kurzen Bemerkung bei P. Libermann, Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 36, 742—755 (1950); p. 743]. Ein weiter mitgeteilter Satz von E. M. Patter-

son über komplementäre Parallelfelder ist auch in einer Note von P. Libermann [C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 1571—1573 (1951)] enthalten. Der Rest des Vortrags befaßt sich mit symplektischen Mannigfaltigkeiten und Verallgemeinerungen.

H. Guggenheimer.

Bouligand, Georges: Sur les parallélismes généralisés. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **31**, 141—159 (1952).

L'espace considéré est l'espace vectoriel à $n+1$ dimensions $V = V_{n+1}$. x_1, x_2, \dots, x_n, z : composantes vis-à-vis d'une base fixée du vecteur \vec{Om} . TC : transformation de contact. TCP : TC conservant le parallélisme des éléments de contact. ω : direction de plan. Dans une transformation $\vec{OM} = \vec{\Theta}(m, \omega)$ le plan tangent en M à l'image d'une surface $S: z = z(x_1, \dots, x_n)$ est en général défini par les vecteurs $\vec{V}_i = \frac{\partial M}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial M}{\partial z} + p_{i1} \frac{\partial M}{\partial p_1} + \dots + p_{in} \frac{\partial M}{\partial p_n}$ qui font intervenir l'élément de contact du second ordre (m, p_i, p_{ij}) de S en m ; cet élément est dit critique si les vecteurs \vec{V}_i ne sont pas linéairement indépendants. Utilisant la polarité vis-à-vis d'un paraboloïde d'axe parallèle à l'axe des z , l'A. obtient les équations d'une TCP quelconque et les applique aux TC définies par $\vec{OM} = \vec{Om} + l \vec{\tau}(m, \omega)$, l représentant une constante.

Dans le cas où $\vec{\tau}$ ne dépend que de ω , la TCP correspondante peut être définie comme une transformation par surfaces parallèles dans l'espace de Minkowski (V, \mathfrak{I}) d'indicatrice \mathfrak{I} à plan tangent continu mais non nécessairement symétrique ou convexe. Puis \mathfrak{I} est supposée convexe, enveloppe des plans $z = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n - f$, où f est une fonction continue à dérivées secondes continues en p_1, p_2, \dots, p_n . A tout l correspond un parallélisme minkowskien. L'image S_l de S s'obtient en portant sur la demi-normale minkowskienne extérieure ou intérieure (celles-ci peuvent ne pas être collinéaires si \mathfrak{I} n'est pas symétrique par rapport au point de référence, c'est le phénomène de réfraction) suivant le signe de l , un segment de \mathfrak{I} -mesure algébrique $= l$. Sur chaque génératrice de la congruence des \mathfrak{I} -normales (intérieures ou extérieures) de S , il y a n points focaux correspondant aux valeurs de l pour lesquelles (m, p_i, p_{ij}) est critique. (Remarque du rapporteur: Ce théorème découle de la théorie des points conjugués de Kneser puisque les \mathfrak{I} -normales forment une famille de géodésiques transversales à S , et se relie à la version du Théorème de Meusnier et de l'Indicatrice de Dupin pour une surface d'un espace de Minkowski, donnée par H. Rund dans sa Thèse, Cape Town 1950). Des indications sont données concernant l'extension de la théorie du parallélisme minkowskien au cas où \mathfrak{I} est, sans plus, la frontière d'un corps convexe contenant l'origine, c'est-à-dire en abandonnant les hypothèses de différentiabilité initiales.

Chr. Pauc.

Pastori, Maria: Sulle equazioni del campo elettromagnetico nell'ultima teoria di Einstein. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **12**, 302—307 (1952).

Soit g_{ik} le tenseur fondamental, Γ_{jk}^i la connexion affine associée à un espace „unitaire“ d'Einstein. Ces quantités satisfont aux relations

$$(1) \quad g_{i+k;+} = 0, \quad (2) \quad \Gamma_i = \Gamma_{ij}^j = 0,$$

où les notations sont celles d'Einstein; (2) peut être interprété par la nullité de la dérivée du tenseur antisymétrique de Ricci:

$$\varepsilon_{i+j+k+h;+} = \varepsilon_{i+j+k+h}^{i+j+k+h} = \varepsilon_{i+j+k+h}^{i+j+k+h};+ = \varepsilon_{i+j+k+h}^{i+j+k+h};+ = 0.$$

Si l'on appelle dérivées tensorielles neutres celles relatives à la partie symétrique Γ_{ij}^j des coefficients de la connexion, on a aussi pour ces dérivées neutres

$$\varepsilon_{i+j+k+h;+} = \varepsilon_{0000}^{i+j+k+h};+ = 0.$$

De ceci, l'A. déduit d'une manière élégante les équations du champ électromagnétique. Les premières s'expriment par l'identité

$$\varepsilon^{i+j+k+h} * g_{ij;k} = \varepsilon^{i+j+k+h} * g_{ij;k} = \varepsilon^{i+j+k+h} g_{ij;k} = 0,$$

où $*$ est l'opérateur d'adjonction et où $*g_{ij}$ est identifié au champ électromagnétique. Les secondes expriment que la divergence neutre du tenseur $*g_{ij}$ et par suite le rotationnel (neutre ou polarisé) du tenseur antisymétrique g_{ij} sont égaux

au vecteur distribution électrique. La loi de conservation est évidemment automatiquement vérifiée.

A. Lichnerowicz.

Hlavatý, Václav: The Einstein connection of the unified theory of relativity. Proc. nat. Acad. Sci. USA **38**, 415—419 (1952).

Für die Übertragungsparameter in der neuen Theorie von Einstein gilt $\partial_\lambda g_{\mu\kappa} = I_{\lambda\kappa}^\nu g_{\mu\nu} + I_{\mu\lambda}^\nu g_{\nu\kappa}$, und es gilt (a) $I_{\mu\lambda}^\kappa = \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu \lambda \end{smallmatrix} \right\} + S_{\mu\lambda}^{\cdot\kappa} + 2 h^{\kappa\nu} S_{\nu(\lambda}^{\cdot\sigma} h_{\mu)\sigma}$, (b) $\nabla_\mu k_{\lambda\kappa} = 2 S_{\sigma\sigma}^{\cdot\tau} X_{\mu\lambda\kappa\tau}^{o\sigma}$, wo h bzw. k der symmetrische (bzw. alternierende) Teil des Fundamentaltensors und X ein Affinor ist, der von h und k abhängt. In einer früheren Arbeit [Proc. nat. Acad. Sci. USA **38**, 243—247 (1952)] wurde eine angenäherte Lösung von (a) und (b) gefunden. In dieser Arbeit wird eine Lösung gegeben. Die Beweise der angegebenen Formeln sollen später in J. Rat. Mech. Analysis veröffentlicht werden. Die Einsteinschen Gleichungen bilden sodann ein System von 24 Gleichungen für die 16 Unbekannten $g_{\lambda\kappa}$. Ein Beispiel zeigt, daß dieses System kontradiktionsfrei ist.

J. Haantjes.

Hlavatý, Václav: Spinor space and line geometry. II. J. rat. Mech. Analysis **1**, 312—339 (1952).

In this paper the author uses the results of a former paper (this Zbl. **44**, 170) concerning a connection between a projective space L_3 and a projective spinor space S_3 . In this connection a congruence K in S_3 with axes φ_1^b and φ_2^{ab} plays a part. Any spinor line A belongs to exactly one of the complexes $\Gamma(\lambda, \mu)$ of the linear set $\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2$. A distance function for spinor lines is defined. There are two lines which meet the lines $\varphi_1, \varphi_2, A_1$ and A_2 and the distance of A_1 and A_2 is a function of the cross ratios of the points of intersection. It has the property $d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) = d(A_1, A_3)$ and $d(A_1, A_2) = 0$ if A_1 and A_2 belong to the same complex $\Gamma(\lambda, \mu)$. The biaxial involution Ω_a^b corresponding to a point of L_3 gives a reflection in this space. This reflection is connected with Schrödinger's relativistic wave equation.

J. Haantjes.

Topologie:

Hanner, Olof: Was ist Topologie? I. Elementa **35**, 157—164 (1952) [Schwedisch].

Misonou, Yosinao and Ziro Takeda: On the compactification of topological spaces. Kodai math. Sem. Reports **1952**, 17—18 (1952).

If \mathfrak{B} is the Wallman and \mathfrak{M} the Čech compactification of a completely regular space S , then there is a continuous mapping of \mathfrak{B} to \mathfrak{M} preserving the points of S (P. Alexandroff, this Zbl. **22**, 412); \mathfrak{B} and \mathfrak{M} coincide if and only if S is normal (A. Komatu, Isōkukan-ron, Tokyo 1947). An alternative proof is given.

H. Freudenthal.

Noguchi, Hiroshi: A note on absolute neighborhood retracts. Tôhoku math. J., II. Ser. **4**, 93—95 (1952).

By an absolute neighbourhood retract in the weak sense (W-ANR) the author means a space A being a neighbourhood retract of every space which contains A and in which A is closed [this modification of the original definition of ANR is due to C. Kuratowski (this Zbl. **11**, 40, 2nd review)]. By an absolute neighbourhood retract in the strong sense (S-ANR) the author means a space A being a neighbourhood retract of every space which contains A [this modification of the original definition of ANR is due to S. T. Hu (this Zbl. **31**, 285)]. The author shows that for locally compact spaces the concepts of W-ANR and S-ANR are equivalent.

K. Borsuk.

Jackson, James R.: Some theorems concerning absolute neighbourhood retracts. Pacific J. Math. **2**, 185—189 (1952).

By an absolute neighbourhood retract (or an ANR) it is meant a separable metric space X such that for every homeomorphic image of X as a closed

subset of a separable metric space M there exists a neighbourhood U of X in M and a retraction $\varrho: U \rightarrow X$ [i. e., a continuous mapping $\varrho: U \rightarrow X$ such that $\varrho(x) = x$ for every $x \in X$]. It is shown that a topological space X is an ANR if and only if X has at most countably many components, each of which is an ANR open in X . Other results concern homotopy classes of mappings into ANR's. In particular, it is shown that if X_0 is a subset of a compact topological space X and if y_0 is a point of an ANR set Y then the space $Y^X \{X_0, y_0\}$ of continuous mappings of X into Y carrying X_0 to y_0 has open and arcwise-connected components. Finally certain restrictions are given on the cardinality of collections of homotopy classes of mappings into ANR's; in particular the following theorem is proved: A homotopy group of an ANR is at most countable.

K. Borsuk.

Bledsoe, Woodrow W.: Neighborly functions. Proc. Amer. math. Soc. 3, 114—115 (1952).

A mapping f of a metric space S into another metric space S' is said to be neighborly at the point $x \in S$ if, for each $\varepsilon > 0$, there is an open sphere $A \subset S$ such that $\varrho(x, y) + \varrho'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ for each $y \in A$ [it should be noted that we do not require that $x \in A$]. The mapping f is said to be neighborly if it is neighborly at each point $x \in S$. — Let $\{f_n\}$ be a convergent sequence of neighborly functions, $\lim f_n = g$. It is proved that the points of discontinuity of g form a set of the first category in S .

R. Sikorski.

Bertolini, Fernando: A proposito di una mia osservazione sulla nozione di connessione. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 11, 123—124 (1952).

In un lavoro precedente (questo Zbl. 41, 98) l'A. si è occupato della nozione di connessione propria, distinta dalla connessione ordinaria. In questa Nota l'A. osserva che l'esempio terzo del lavoro ora citato non serve per far vedere, come si era proposto, che la connessione propria locale non dipende dalla connessione locale ordinaria e lo sostituisce con un altro esempio, oggetto di questa Noticina, avvertendo che va intesa la nozione di connessione locale propria e connessione locale ordinaria „in un medesimo punto“.

L. Giuliano.

Jones, F. Burton: Concerning aposyndetic and non-aposyndetic continua. Bull. Amer. math. Soc. 58, 137—151 (1952).

Verf. beabsichtigt, eine Klassifikation der eine Art „Spektrum“ konstituierenden Kontinuen vom „sich wohlverhaltenden“ Jordanbogen aus bis zum „sich schlechtverhaltenden“ unzerlegbaren Kontinuum mittels der „aposyndetischen“ Eigenschaften durchzuführen, wobei er eine Menge M an ihrem Punkte p aposyndetisch nennt, wenn es für jeden von p verschiedenen Punkt k von M ein Kontinuum H und eine offene Menge U gibt derart, daß $M - k \supset H \supset U \ni p$. (F. B. Jones, dies. Zbl. 25, 240.) Dazu sind eine Menge von bekannten Sätzen von R. H. Bing, E. E. Moise, M. Torhorst, G. T. Whyburn, R. L. Wilder u. a. und des Verf. über Kontinuen ohne Beweis zusammengestellt, mit reichlich beigelegten Figuren faßlich illustriert.

H. Terasaka.

Moise, Edwin E.: Remarks on the Claytor imbedding theorem. Duke math. J. 19, 199—202 (1952).

It was shown by Kuratowski [Fundamenta Math. 15, 271—283 (1930)] that a finite graph is imbeddable in a 2-sphere if and only if it does not contain two so called primitive skew graphs. This result was generalized by Claytor to Peano spaces which have no cut points (this Zbl. 10, 276). The author gives a very concise proof of the theorem of Claytor based on Kuratowski's theorem and on some results of Bing (every Peano space has a complete sequence of brick partitionings) (this Zbl. 39, 395).

I. Fáry.

Bourgin, D. G.: The paracompactness of the weak simplicial complex. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 305—313 (1952).

La situation étudiée par l'A. est un cas particulier de la suivante. Pour tout $n \geq 0$, soit S_n un espace somme topologique d'une famille $(K_{n\alpha})_{\alpha \in A_n}$ d'espaces compacts, et soit f_n une application de S_n dans un ensemble E ; si $E_n = f_n(S_n)$, on suppose que E est réunion des E_n ; désignant par F_{n-1} la réunion des E_k d'indice $k < n$, on suppose en outre que $B_n = f_n^{-1}(F_{n-1})$ est fermé dans S_n , et que la restriction de f_n à $S_n - B_n$ est biunivoque. Le cas envisagé par l'A. est celui où les $K_{n\alpha}$ sont des simplexes euclidiens de dimension n , et où $B_{n\alpha} = B_n \cap K_{n\alpha}$ est le bord de $K_{n\alpha}$. Soit T la topologie la plus fine sur E rendant toutes les applications f_n continues; l'A. établit que, dans le cas qu'il considère, E est paracompact (séparé) pour la topologie T . En réalité, le théorème est valable sous la seule restriction que les $K_{n\alpha}$ soient des espaces compacts complètement normaux (en particulier des espaces compacts métrisables). On peut le voir par une construction directe d'un recouvrement localement fini plus fin qu'un recouvrement ouvert donné de E , qui s'effectue en définissant, par récurrence sur n , les traces des ensembles du recouvrement que l'on veut construire sur chacun des ensembles F_n . Tout revient, comme on le voit aisément, à résoudre le problème suivant: étant donné un recouvrement ouvert (G_λ) de $K_{n\alpha}$, et un recouvrement ouvert fini (U_i) ($1 \leq i \leq r$) de $B_{n\alpha}$ tel que chaque U_i soit contenu dans un G_λ , construire un recouvrement ouvert fini (V_j) ($1 \leq j \leq s$) de $K_{n\alpha}$ tel que chaque V_j soit contenu dans un G_λ , que $V_i \cap B_{n\alpha} = U_i$ pour $1 \leq i \leq r$, que V_j ne rencontre pas $B_{n\alpha}$ pour $r+1 \leq j \leq s$, et finalement que, si un point x de $B_{n\alpha}$ n'est pas adhérent à un U_i , il ne soit pas non plus adhérent au V_j correspondant. La possibilité de cette construction résulte aisément de l'hypothèse que $K_{n\alpha}$ est complètement normal; pour montrer que le recouvrement obtenu est localement fini, pour chaque point $x \in E$, on considère le premier indice n tel que $x \in E_n$, et à partir d'un voisinage W de x dans $E_n - F_{n-1}$ qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles du recouvrement, on construit par récurrence un voisinage V de x dans E , qui a pour trace W sur E_n et ne rencontre aucun autre ensemble du recouvrement que ceux que rencontre W . La démonstration de l'A. est fort compliquée, et utilise essentiellement la structure particulière des simplexes $K_{n\alpha}$ (notamment la subdivision barycentrique), ainsi qu'une construction par induction transfinie de voisinages d'un point de E pour la topologie T . J. Dieudonné.

Dowker, C. H.: Topology of metric complexes. Amer. J. Math. 74, 555—577 (1952).

Il est bien connu que les complexes (polyèdres) localement finis n'ont qu'une seule topologie compatible avec la topologie euclidienne des cellules, et sont métrisables pour cette topologie. Pour des complexes non localement finis, il existe en général plusieurs topologies satisfaisant à cette condition, dont la plus fine est la topologie de Whitehead, pour laquelle ils cessent en général d'être métrisables. L'A. énonce des conditions de nature assez générale à imposer à une métrique, moyennant lesquelles l'espace reste homotopiquement équivalent au complexe lui-même doté de la topologie de Whitehead. En ce cas, bien entendu, son homologie et sa cohomologie d'espace sont données par l'homologie et la cohomologie du complexe combinatoire.

R. Thom.

Dowker, C. H.: Homology groups of relations. Ann. of Math., II. Ser. 56, 84—95 (1952).

Soient X, Y deux ensembles, R une relation entre X et Y , c'est-à-dire un sous-ensemble de $X \times Y$; on attache au système (X, Y, R) deux complexes simpliciaux K, L comme suit: $p+1$ éléments $x_i \in X$ forment un p -simplexe de K , s'il existe un élément $y \in Y$ tel que $(x_i \times y) \in R$ pour tout x_i ; de même L est défini sur Y . Usant des subdivisions barycentriques abstraites de K et L , l'A. montre que K et L sont homotopiquement équivalents, et ont par suite mêmes homologie et cohomologie. Si X désigne l'ensemble des ouverts d'un recouvrement d'un espace A , et Y l'ensemble des points de A , et si on pose $(\omega, a) \in R$ si le point a appartient à l'ouvert ω du recouvrement, le complexe K associé à X n'est autre que le nerf du recouvrement; le complexe L associé à Y donne alors l'homologie de Vietoris, et la cohomologie d'Alexander de l'espace A . En passant à la limite projective — ou inductive —, on démontre ainsi l'isomorphisme entre homologies de Čech et homologie de Vietoris d'une part entre cohomologies de Čech et d'Alexander d'autre part, lorsque ces théories sont définies par la même famille filtrante de recouvrements. En particulier, la cohomologie d'Alexander associée à la famille de tous les recouvrements ouverts d'un espace A est isomorphe à la cohomologie de Čech de A et satisfait par suite aux 7 axiomes d'Eilenberg-Steenrod.

R. Thom.

Zimmermann, Wolfhart: Eine Cohomologietheorie topologischer Räume. Math. Z. 55, 125—166 (1952).

L'A. construit une théorie de la cohomologie des espaces topologiques (pour un domaine de coefficients quelconque donné) au moyen de leurs recouvrements, qui généralise la cohomologie au sens de Čech (nerf du recouvrement) et la cohomologie au sens de Alexander, et conserve son efficacité pour des espaces à une infinité de dimensions. Il distingue essentiellement deux constructions de complexes à partir d'un recouvrement ou d'une famille de recouvrements, désignés respectivement par I (correspondant au nerf, c'est-à-dire à la construction de Čech) et par II (où ce sont les éléments de l'espace eux-mêmes qui définissent les simplexes, d'après le procédé d'Alexander). — Les complexes considérés pourront être infinis et leurs simplexes pourront également être des ensembles infinis. Si M est un ensemble quelconque, les éléments de $\{M\}$ seront appelés simplexes. Dans un ensemble de simplexes, deux simplexes seront dits voisins si l'on passe de l'un à l'autre en ajoutant ou supprimant exactement un sommet; d'où une décomposition en composantes; un ensemble de composantes est une stratification de M . La composante de 0 est constituée par tous les simplexes finis. Certains complexes connexes pourront être représentés par des complexes dont tous les simplexes sont finis. Le groupe de cohomologie (défini ici en général pour la cohomologie relative) d'un complexe sera une somme directe (suivant le nombre de dimensions) de sommes directes suivant les composantes ou plus généralement suivant les stratifications de M . — Pour un espace quelconque des complexes sont définis à partir d'une famille de recouvrements. L'A. établit que le groupe de cohomologie pour une famille de recouvrements peut être déterminé en considérant une sous-famille complète (pour la famille donnée). D'importants cas particuliers sont ceux de la famille Σ_0 constituée par tous les recouvrements ouverts de l'espace, ou de la famille I_0 de tous les recouvrements ouverts finis, ou de la famille \tilde{I}_0 de tous les recouvrements dénombrables tels qu'un nombre fini au plus d'éléments de ce recouvrement aient une intersection non vide. (Les deux derniers n'ont qu'une seule composante.) I_0 correspond à la définition de Čech; le terme correspondant à la composante de 0 dans Σ_0 par la construction II donne le procédé d'Alexander. Pour un espace bicompat, I_0 est une famille complète, et seule la composante de 0 dans Σ_0 joue un rôle. — Le groupe de cohomologie du complexe considéré comme espace discret est isomorphe à celui qui correspond à la famille Σ_0 . La cohomologie de Čech (définie à partir de I_0) dépend uniquement de la composante de 0 et pas des autres composantes (contrairement à Σ_0). G. Hirsch.

Radó, Tibor: Sulla teoria delle omologie singolari. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser. 8, 57—63 (1952) [Englisch mit ital. Zusammenfassung].

Let X be a topological space (not necessarily arcwise connected or triangulable). The author defines the singular complex without identifications, $R(X)$, of X . $R(X)$ has n -cells $(v_0, \dots, v_n; T)$, where v_0, \dots, v_n are $n+1$ not necessarily distinct or linearly independent points of Hilbert space E_∞ , and T is a continuous mapping of the „convex hull“ $|v_0, \dots, v_n|$ of these points into X . The chain groups $\{C_n^R\}$ of $R(X)$ are free Abelian groups with these n -cells as generators (for $n \leq 0$, $C_n^R = 0$). The boundary operator of $R(X)$ is defined by the conventional formula. $R(X)$, so defined, is a Mayer complex and is semi-simplicial in the sense of Eilenberg-Zilber (this Zbl. 36, 126). The author announces theorems (proofs are to appear later) which show how the homology structure of $R(X)$ is affected by the various cell-identifications used in previous singular homology theories and by a further (and stronger) identification process which he defines. For example, he states that the homology groups of $R(X)$ are isomorphic with those of S. Eilenberg's total singular complex, $S(X)$, of X . Or again, if $\{D_n^R\}$ is the (Mayer) subcomplex of $R(X)$ whose chain groups D_n^R are the subgroups of the C_n^R generated by the n -cells $(v_0, \dots, v_n; T)$ such that $v_j = v_{j+1}$ for some j , then the factor complex $\{C_n^R/D_n^R\}$ has homology groups isomorphic with those of $\{C_n^R\} = R(X)$. W. H. Cockcroft.

Reichelderfer, Paul V.: On the barycentric homomorphism in a singular complex. Pacific J. Math. 2, 73—97 (1952).

L'A. étudie les identifications dans l'homologie singulière d'un espace topologique, à la suite de T. Radó (ce Zbl. 43, 169, 170) et établit que l'identification qui consiste à remplacer le groupe des chaînes par les groupes-quotients relatifs aux noyaux des homomorphismes barycentriques est non-essentielle (au sens de T. Radó, ce Zbl. 43, 170). L'A. introduit un nouvel opérateur d'homotopie barycentrique, dont les propriétés sont plus commodes que celles de l'opérateur analogue considéré par T. Radó.

G. Hirsch.

Wallace, A. D.: The map excision theorem. *Duke math. J.* 19, 177—182 (1952).

In this note, the author proves the following „Map Excision Theorem“: Let X and Y be fully normal (in the sense of J. W. Tukey) and A and B closed. Let $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ be a closed map such that f takes $X - A$ topologically onto $Y - B$. Then the mapping $H^p(Y, B) \rightarrow H^p(Y, A)$ is onto. — An extension and a reduction theorems proved previously by the author [see *Anais Acad. Brasil. Ci.*, 22 29—33 (1950)] are recalled and the proofs completely given. Then by a judicious application of the theory of exact sequences the author proves two lemmas. A third one is rather an analysis of the hypotheses of the map excision theorem than a new proposition and a fourth lemma, making use of a weak excision theorem of Spanier (this *Zbl.* 35, 248) and of the first three lemmas, proves a particular case of the author's theorem. This theorem itself is easily deduced from the four lemmas. The author mentions that the validity of his theorem in the case of closed subsets of linear locally convex spaces is conjectural. He states also that the following question remains open: whether his results hold still for normal spaces.

C. Racine.

White, Paul A.: Some characterization of generalized manifolds with boundaries. *Canadian J. Math.* 4, 329—342 (1952).

Une variété généralisée, au sens de Wilder et de l'A., est un espace (paracompact) où l'homologie de Čech locale est celle de l'espace euclidien; cet article étend cette définition aux variétés à bord, et étudie leurs propriétés de connexion (condition D) et d'orientabilité: Si une variété à bord compacte M , de bord K , est de dimension n , K est une variété de dimension $n - 1$; si M est orientable, K l'est aussi. La théorie de la dualité des variétés à bord est à peine abordée: l'A. semble ignorer la notion de cohomologie, et le théorème central, qui affirme l'isomorphisme de l'homologie relative $H_i(M, K)$ et de l'homologie aux chaînes infinies $H_i(M - K)$ est utilisé sans être démontré. Une n -cellule généralisée a pour bord une $(n - 1)$ -sphère généralisée. Pour les dimensions 1 et 2, la théorie des variétés généralisées se réduit à celle des variétés topologiques.

R. Thom.

Hu, Sze-tsen: Homotopy properties of the space of continuous paths. II. The general case with arbitrary boundary sets. *Portugaliae Math.* 11, 41—50 (1952).

Sei X ein topologischer Raum, A und B zwei Unterräume von X . Verf. setzt seine Untersuchungen [*Portugaliae Math.* 5, 219—231 (1946)] über die Homotopieeigenschaften des Raumes $[X, A, B]$ der Wege in X mit Anfangspunkt in A und Endpunkt in B fort. Zunächst werden das früher erhaltene Resultat über den Homotopietyp von $[X, A, B]$ verallgemeinert und Bedingungen angegeben, unter denen dieser Homotopietyp ungeändert bleibt bei Änderung von A oder B . Weiter bemerkt Verf., daß für $C = A \cap B$ nicht-leer, mit $x_0 \in A \cap B$ die Homotopiefolge des Raumpaars $[X, x_0, B]$, $[A, x_0, C]$ in natürlicher Weise mit der Homotopiefolge der Triade $(X; A, B)$ im Sinne von Blakers und Massey (dies. *Zbl.* 42, 173) isomorph ist. Durch passende andere Wahl eines Paares von Unterräumen von $[X, A, B]$ entstehen ebenso weitere bekannte und neue exakte Homotopiefolgen. Schließlich leitet Verf. mittels seines (partiellen) Realisierungssatzes für Homotopiegruppen mit ihren Operatoren und Produkten (dies. *Zbl.* 44, 199) einen entsprechenden Realisierungssatz für relative Homotopiegruppen und Triadengruppen ab.

E. Burger.

Blakers, A. L. and W. S. Massey: The homotopy groups of a triad. II. *Ann. of Math.*, II. Ser. 55, 192—201 (1952).

Es wird folgendes Theorem bewiesen: Sei $(X; A, B)$ eine Triade aus topologischen Räumen X, A, B . Die Räume A, B und der Durchschnitt $A \cap B$ von A und B seien 1-dimensional zusammenhängend. X sei gleich der Summe des Inneren von A und B . Das Paar $(A, A \cap B)$ sei m -dimensional, das Paar $(B, A \cap B)$

sei n -dimensional zusammenhängend ($m \geq n \geq 1$). Falls $n = 1$ und $m > n$, sei die zweite Homotopiegruppe von $(B, A \cap B)$ abelsch oder es sei $(A, A \cap B)$ einfach bis zur Dimension $m + 1$. Falls $m = n = 1$, sei $(B, A \cap B)$ einfach bis zur Dimension 2. Dann ist die Triade zusammenhängend von der Dimension $m + n$. Hieraus ergibt sich u. a. ein geometrischer Beweis für einen Satz von MacLane und Eilenberg über die Komplexe $K(\Pi, n)$, die sich für jedes natürliche n einer abelschen Gruppe Π zuordnen lassen. Der „suspensive“ Homomorphismus der Ketten von $K(\Pi, n)$ in die von $K(\Pi, n + 1)$ induziert für die Homologiegruppen der Dimension $q < 2n$ einen Isomorphismus. K. Reidemeister.

Serre, Jean-Pierre: Sur la suspension de Freudenthal. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1340—1342 (1952).

L'A. annonce une démonstration des théorèmes de Freudenthal basée sur le plongement E de la sphère S_{n-1} dans l'espace Ω_n des lacets sur S_n . Quelques propositions générales donnant la structure de certaines groupes d'homotopies de triades (voir A. Blakers et W. Massey, ce Zbl. **40**, 258) de S_n par rapport à E_n^+ , E_n^- et les résultats: $\pi_7(S_3) = Z_2$, $\pi_8(S_3) = Z_2$, $\pi_9(S_3) = Z_3$ ou Z_6 , $\pi_9(S_4) = Z_2 + Z_2$, $\pi_{10}(S_5) = Z_2$, $\pi_{11}(S_6) = Z$, $\pi_{n+5}(S_n) = 0$ pour $n \geq 7$. H. Freudenthal.

Rochlin, V. A.: Neue Ergebnisse der Theorie der vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84**, 221—224 (1952) [Russisch].

In Fortsetzung seiner Untersuchungen über berandende dreidimensionale Mannigfaltigkeiten (dies. Zbl. **44**, 381) behandelt Verf. hier die entsprechende Frage für vierdimensionale Mannigfaltigkeiten. Er skizziert einen Beweis des folgenden Satzes: Eine orientierte geschlossene vierdimensionale Mannigfaltigkeit M^4 ist dann und nur dann orientierungstreu homöomorph zum Rand einer orientierten fünfdimensionalen Mannigfaltigkeit, wenn die Signatur σ der quadratischen Form ihrer Eigenschaftszahlen (in der Dimension zwei) gleich Null ist. Im allgemeinen Fall wird M^4 berandend, wenn man zu ihr $|\sigma|$ geeignet orientierte komplexe projektive Ebenen hinzufügt. Die Pontrjaginsche charakteristische Zahl $X_{22}(M^4)$ ist gleich 3σ . Ferner wird ohne Beweis für den nicht-orientierbaren Fall der Satz ausgesprochen: Eine geschlossene (orientierbare oder nicht-orientierbare) vierdimensionale Mannigfaltigkeit ist dann und nur dann homöomorph zum Rand einer (orientierbaren oder nichtorientierbaren) fünfdimensionalen Mannigfaltigkeit, wenn ihre Eulersche Charakteristik gerade ist. — Als Anwendung ergibt sich noch, daß für jede orientierte geschlossene vierdimensionale Mannigfaltigkeit M^4 , deren zweidimensionale charakteristische Homologieklassse $z^2(M^4) = 0$ ist, die Signatur $\sigma(M^4) \equiv 0 \pmod{16}$ ist, woraus folgt, daß nicht jede ganzzahlige quadratische Form mit der Diskriminante ± 1 als Eigenschaftszahlform einer einfach-zusammenhängenden vierdimensionalen orientierten geschlossenen Mannigfaltigkeit auftreten kann. — Verf. benutzt die Resultate dieser Arbeit, um eine fehlerhafte Überlegung zweier früheren Arbeiten richtig zu stellen. In der ersten (dies. Zbl. **43**, 384) war $h_n = 0$ für $n \geq 3$ behauptet worden (vgl. die Bezeichnungen des genannten Referates). Die dort gegebene Konstruktion von M^4 ist jedoch fehlerhaft. In Wirklichkeit folgt aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit, daß $h_n \neq 0$ für alle n ist. Bezüglich der zweiten Arbeit, in welcher die Homotopiegruppen $\pi_{n+3}(S^n)$ bestimmt werden, vgl. dies. Zbl. **44**, 381.

E. Burger.

Ehresmann, Charles: Structures locales et structures infinitésimales. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 587—589 (1952).

(Les définitions et notations sont empruntées à 3 Notes antérieures, ce Zbl. **43**, 174). — L'A. définit les structures locales sur un ensemble, et les automorphismes locaux de ces structures qui forment un pseudo-groupe Γ . Une structure infinitésimale sur une variété V_n est définie par une structure de r -variété sur V_n , complétée par un prolongement, une section d'un prolongement ou une extension d'espace fibré. Une telle structure est aussi une structure locale (pour la topologie de V_n). Au pseudo-groupe Γ des automorphismes locaux (r fois différentiables) est associé un groupoïde $J^r(\Gamma)$ dans l'ensemble des jets de ces automorphismes. Γ sera dit complet s'il est l'ensemble de toutes les solutions de $J^r(\Gamma)$. — Le pseudo-groupe Γ des automorphismes locaux d'une structure infinitésimale définie par une section d'un prolongement d'ordre r de V_n est complet. Un pseudo-groupe complet Γ d'ordre r sera appelé pseudo-groupe de Lie lorsque le groupoïde associé à Γ est extrait de l'ensemble des jets $J^r(V_n, V_n)$; il est toujours le groupe des automorphismes locaux d'une structure infinitésimale.

G. Hirsch.

Ehresmann, Charles: Les prolongements d'une variété différentiable. IV. Éléments de contact et éléments d'enveloppe. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1028—1030 (1952).

Pour les définitions et notations, voir 3 Notes antérieures (ce Zbl. **43**, 174). — A un espace fibré $E(B, F, G, H)$ correspond un groupoïde Π associé ($= HH^{-1}$) des isomorphismes d'une fibre sur une fibre, qui est un groupoïde d'opérateurs sur E . Les points $z \in E$ et $y \in F$ seront dits équivalents s'il y a un $h \in H$ tel que $z = hy$; l'ensemble des $z \in E$ équivalents à un même $y \in F$ sera appelé classe d'intransitivité de z (relativement au groupoïde Π), l'ensemble des $y \in F$ équivalents à un même $z \in E$ est une classe d'intransitivité de F relativement à G . — Si φ est une représentation de G sur un groupe G d'automorphismes d'un espace \bar{F} , une application ψ de E dans l'espace fibré $\bar{E}(B, \bar{F}, \bar{G}, \bar{H})$ associé à $E(B, F, G, H)$ par φ sera dite covariante si $\psi\theta = \varphi(\theta)\psi$ pour tout $\theta \in \Pi$ (φ opérant dans Π par passage de H à H). — Soient 2 r -variétés V_n et V_m ; $\Pi^r(V_n)$ est le groupoïde associé au prolongement principal $H^r(V_n)$. Dans l'espace $J^r(V_n, V_m)$ des jets, fibré en $L_{r,n}^r$, le groupoïde associé est $\iota_*^r(V_n) \times \Pi^r(V_m)$; on appellera éléments d'équivalence les classes d'intransitivité de $y \in L_{r,n}^r$ et $z \in J^r(V_n, V_m)$. Ce même espace $J^r(V_n, V_m)$ fibré en $T_n^r(V_m)$ a pour groupoïde associé $\iota_*^r(V_n)$; la classe d'intransitivité de $z \in J^r(V_n, V_m)$ correspond à zh dans la fibre T_n^r [où $h \in H^r(V_n)$], et sera appelée n^r -élément de contact dans V_m . — L'espace $P_n^r(V_m)$ des n^r -éléments de contact de V_m est le prolongement d'ordre r de V_m de fibres isomorphes à l'espace des n^r -éléments de contact d'origine O dans R^n (qui est l'espace-quotient de $L_{r,n}^r$ par la relation d'équivalence $y \sim ys^{-1}$, avec $s \in L_n^r$). — Ces notions sont appliquées aux variétés plongées, c'est-à-dire aux r -applications de V_n dans V_m .
G. Hirsch.

Ehresmann, Charles: Les prolongements d'une variété différentiable. V. Covariants différentiels et prolongements d'une structure infinitésimale. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1424—1425 (1952).

Soient E et \bar{E} deux prolongements de la r -variété V_n , respectivement d'ordre k et \bar{k} ($\leq r$). Le groupoïde $\Pi^r(V_n)$ associé au prolongement principal $H^r(V_n)$ est un groupoïde d'opérateurs sur E et \bar{E} . Si ψ est une application covariante de E dans \bar{E} , $\psi(z)$ (avec $z \in E$) est un covariant différentiel de z . — Si \mathfrak{S} est une structure infinitésimale définie par une section σ de E , si $z = \sigma(x)$ avec $x \in V_n$, $\psi(z)$ est un covariant différentiel de \mathfrak{S} en x . Si \mathfrak{S} est $r-k$ fois différentiable, $\sigma'(x)$ défini par l'élément de contact de $j_x^{r-k}\sigma$ définit le prolongement \mathfrak{S}' d'ordre $r-k$ de \mathfrak{S} ; les covariants différentiels de la structure infinitésimale \mathfrak{S}' sont encore appelés covariants différentiels de \mathfrak{S} . A \mathfrak{S} est associé un groupoïde $\Pi(\mathfrak{S})$, sous-groupe de $\Pi^r(V_n)$; d'où la notion d'application covariante par rapport à \mathfrak{S} , et (en considérant \mathfrak{S}') de covariant différentiel d'ordre $\leq r$ par rapport à \mathfrak{S} . — Une structure \mathfrak{S} subordonnée au prolongement principal définit un sous-espace fibré de $H^k(V_n)$; un espace fibré associé à ce sous-espace est un prolongement de V_n relativement à \mathfrak{S} . — Si G est un groupe de Lie opérant d'une manière r fois différentiable sur F , $T_p^k(G)$ opère d'une manière $r-k$ fois différentiable sur $T_p^k(F)$ et est en général une extension non triviale de G . — On appellera connexion affine spéciale d'ordre k une connexion infinitésimale dans $H^k(V_n)$, connexion affine générale d'ordre r une connexion infinitésimale dans un espace fibré $H^r(V_n)$ associé à $H^r(V_n)$ (et obtenu par élargissement de L_n^r au moyen de T_n^1). On ne peut pas obtenir toutes les connexions affines générales par prolongements successifs d'une connexion affine spéciale.
G. Hirsch.

Rozenknop, I. Z.: Die Homologiegruppen homogener Räume mit kommutativer stationärer Untergruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **85**, 1219—1221 (1952) [Russisch].

Verf. formuliert drei Sätze und einige Folgerungen über den Kohomologiering eines homogenen Raumes mit kommutativer stationärer Untergruppe. Beweise werden nicht angegeben. Verf. verweist lediglich bezüglich der Beweismethode auf Koszul (dies. Zbl. **39**, 29). — Die Gruppe G , die auf dem homogenen Raum operiert, und die stationäre Untergruppe werden als kompakt und zusammenhängend vorausgesetzt. Weiter sei G halbeinfach. Es sei \mathfrak{a} die G entsprechende Lie'sche Algebra, \mathfrak{h} die der stationären Untergruppe entsprechende Unter-algebra. Es bezeichne $H(\mathfrak{a})$ den Kohomologiering von G und $H(\mathfrak{a}; \mathfrak{h})$ denjenigen des homogenen Raumes, L die Menge der schiefssymmetrischen polynomischen Formen, die als äußere Produkte solcher Linearformen auf \mathfrak{a} gebildet sind, die auf \mathfrak{h} verschwinden und invariant bezüglich \mathfrak{h} sind. Es sei h_1, \dots, h_m eine Basis von \mathfrak{h} . — Sei R der Ring der Polynome $\sum a^{i_1 \dots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ mit rationalen Koeffizienten. Durch die Zuordnung $\sum a^{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} \rightarrow \sum a^{i_1 \dots i_k} \delta h_{i_1} \wedge \dots \wedge \delta h_{i_k} \in L$ (wobei \wedge das äußere Produkt bedeutet) wird eine homomorphe Abbildung von R in $H(\mathfrak{a}; \mathfrak{h})$ induziert. Das Bild bei diesem Homomorphismus sei \tilde{R} , der Kern sei I . Es bezeichne Y die Menge der Homologieklassen aus $H(\mathfrak{a})$, welche Repräsentanten in L haben.

Satz 1 gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß $H(a; b)$ isomorph zum Tensorprodukt von \tilde{H} und Y ist, sowie daß $E_3 = E_\infty$ ist (Bezeichnung nach Koszul, 1. c.). Als Folgerung wird unter gewissen Voraussetzungen ein Ausdruck für das Poincarésche Polynom des homogenen Raumes abgeleitet. In Satz 2 wird das Ideal I mit dem sogenannten charakteristischen Ideal J (dessen Definition hier aus Raumgründen nicht wiederholt werden kann) in Verbindung gebracht und in Satz 3 unter gewissen Voraussetzungen über G ein Ausdruck für J abgeleitet. Als Folgerung ergibt sich, daß die in Satz 1 gemachten Aussagen zutreffen für den homogenen Raum nach jeder zweidimensionalen kommutativen Untergruppe in einer Gruppe G , welche kein Paar linear unabhängiger primitiver Elemente gleicher Dimension besitzt.

E. Burger.

Gugenheim, V. K. A. M.: Some theorems on piecewise linear embedding. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 333—337 (1952).

Cette Note donne sans démonstration des théorèmes généraux sur l'immersion rectilinéaire des polyèdres dans l'espace euclidien, ou plus généralement dans une variété triangulée. — Soient P, Q deux polyèdres finis de dimension p , et φ un isomorphisme de P sur Q ; supposons P et Q rectilinéairement plongés dans l'espace euclidien R^n , de dimension $n \geq 2p + 2$; il existe alors un homéomorphisme linéaire par morceaux ψ de R^n sur lui-même, tel que $\psi|P = \varphi$. On peut de plus supposer que ψ se réduit à l'identité à l'extérieur d'un compact. Les polyèdres plongés P et Q sont alors dits équivalents. L'ensemble des immersions rectilinéaires de la q -boule E^q dans R^n se trouve ainsi partagé en classes d'équivalence; sur cet ensemble de classes, noté $[q, n]$, on peut définir par juxtaposition une loi d'addition commutative; de même, sur l'ensemble des classes d'immersion rectilinéaire de q -sphères dans R^n , noté (q, n) , on peut définir une loi d'addition commutative [dans le cas de $(1, 3)$, on retrouve la décomposition d'un noeud en ses facteurs premiers étudiée par H. Schubert (ce Zbl. 31, 286)]. La classe nulle est celle définie par l'immersion rectilinéaire d'un simplexe (ou de son bord). La structure de ces ensembles $[q, n]$ et (q, n) n'est pas connue en général; outre des résultats de caractère plus évident, l'A. donne celui-ci: Tout élément de $[q, 2q]$ est entièrement caractérisé par un ensemble fini d'éléments de $(q - 1, 2q - 1)$, chacun de ces éléments définissant la nature de l'immersion de l'étoile attachée à chacun des sommets. Après avoir défini naturellement la notion d'isotopie linéaire par morceaux, l'A. donne les résultats que voici: Si P est une boule ou une sphère, et $\varphi: P \rightarrow P$ un isomorphisme de P sur P qui conserve l'orientation, alors φ est linéairement isotope à l'identité. — Si M^q est une variété de dimension q , et si E_1^q et E_2^q sont deux q -boules immergées rectilinéairement dans M^q et disjointes, alors il existe un isomorphisme linéaire par morceaux ψ de M^q sur M^q , linéairement isotope à l'identité, et réduit à l'identité à l'extérieur d'un ouvert contenant E_1^q et E_2^q , tel que $\psi E_1^q = E_2^q$. — Ce travail aura l'avantage de donner une présentation complète de résultats dont beaucoup étaient jusqu'à présent épars dans la littérature. *R. Thom.*

Brouwer, L. E. J.: An intuitionist correction of the fixed-point theorem on the sphere. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 213, 1—2 (1952).

From the intuitionist point of view the fixed-point theorem for the sphere is as invalid as the Bolzano-Weierstrass theorem. However, given a topological transformation of the sphere in itself of degree $\neq 1$, one can find points which undergo arbitrarily small displacements. *H. Freudenthal.*

Frucht, Robert: A one-regular graph of degree three. Canadian J. Math. 4, 240—247 (1952).

Ein zusammenhängender kubischer Graph G heißt s -regulär, wenn in seiner Gruppe \mathfrak{S} zu jedem Paar einfacher, offener Kantenwege aus s Kanten, S und S' , genau eine Transformation existiert, welche S in S' überführt. Symmetrisch heißt G , falls \mathfrak{S} zu jedem Kantenpaar (AB, CD) mindestens 1 Element enthält, welches A in C , und B in D abbildet. Im Anschluß an Coxeter und Tutte — ersterer hat u. a. die Existenz unendlich vieler 2-regulärer Graphen nachgewiesen — zeigt der Verf., daß es auch 1-reguläre Graphen gibt. Auf Grund einer eigens dafür ersonnenen Methode gibt er eine Konstruktionsvorschrift für einen solchen an. Dieser hat 432 Ecken, ist vom Geschlecht 55, und seine Gruppe besitzt die Ordnung 1296. Einer zunächst beliebigen Gruppe H mit 3 Erzeugenden 2. Grades a_1, a_2, a_3 und den Elementen $a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots a_{q-1}$ wird ein Graph G zugeordnet, indem man jedem a_i einen beliebigen Punkt a_i der Ebene zuordnet und diese Punkte hierauf zu einem Graphen G ergänzt, indem man je zwei beliebige unter ihnen a_i und a_j durch eine Kante verbindet oder nicht, sofern in der Relation $a_i a_j^{-1} = a_k$; a_k ein erzeugendes Element ist oder nicht. G ist kubisch, zusammenhängend, und durch

seine Gruppe wird jede Ecke in jede andere abgebildet. Hierauf wird der Bereich B der zugelassenen Gruppen H durch zwei Forderungen eingeschränkt: 1. Die zugelassenen H müssen mindestens einen Automorphismus Φ haben, welcher die Erzeugenden unter sich permutiert. 2. Die Erzeugenden werden durch Φ zyklisch vertauscht. Aus 1. folgt: Φ entspricht eine Transformation in der Gruppe von G . Zusammen mit 2) bedingt dies, daß G symmetrisch ist. Die Permutationen $a_1 = (12) (35) (48)$; $a_2 = (13) (26) (59)$; $a_3 = (14) (23) (67)$ erzeugen eine Gruppe H , welche zu B gehört und außerdem keinen Automorphismus besitzt, welcher a_3 festläßt, während er a_1 und a_2 vertauscht. Der H entsprechende Graph G besitzt neben andern von a_0 (a_0 = Einselement) ausgehenden 6-Wegen 2 Tripel mit je einem Endpunkt. Diese 6-Wege verzweigen sich aus einem von a_0 ausgehenden Tripel von 2-Wegen. Daher ist G 1-regulär. F. Baebler.

Dirac, G. A.: A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. J. London math. Soc. **27**, 85—92 (1952).

Die vom Verf. durchgeführten Untersuchungen stehen im Zusammenhang mit dem Vierfarbenproblem. Ein Graph G heißt k -farbig, wenn es eine Einteilung seiner Ecken in k Klassen mit folgenden Eigenschaften gibt: 1. Zwei Ecken einer Klasse sind nie durch eine Kante verbunden. 2. k ist minimal. Eine Ecke E von G heißt kritisch, wenn die Entfernung des Sterns mit E als Zentrum zu einem Restgraphen mit kleinerer Farbenzahl führt. Kritisch heißt ein Graph, wenn alle seine Ecken kritisch sind. Zwei Graphen werden homöomorph genannt, wenn sie durch (evtl. wiederholte) Teilung von Kanten in zwei solche übergeführt werden können, die eine gegenseitige 1-1-Abbildung gestatten. — Die allgemeine zur Diskussion stehende Vermutung lautet: Jeder k -farbige Graph G enthält einen zum vollständigen Graphen k -ter Ordnung homöomorphen kritischen Teilgraphen G' . Die Richtigkeit dieser Vermutung für $k = 5$ zöge die Richtigkeit des Vierfarbensatzes nach sich. Für $k = 1, 2, 3$ ist sie evident, für $k = 4$ wird sie vom Verfasser untersucht. Als Basis seiner Erörterungen gibt er folgenden Sachverhalt an: Jeder k -farbige Graph G enthält einen kritischen k -farbigen Teilgraphen G^* . G^* ist endlich, zusammenhängend und ohne trennende Ecken. Der Grad jeder Ecke ist mindestens $k - 1$. Auf dieser Grundlage wird bewiesen: G^* enthält mindestens einen längsten Zykel C mit mindestens k Kanten. Jede Ecke von C ist in G^* durch mindestens einen zu C fremden Kantenweg mit einer andern Ecke dieses Zyklus verbunden. Daraus folgt dann die Existenz eines zum vollständigen Graphen 4. Ordnung homöomorphen Teilgraphen in G^* . — In einem 2. Abschnitt werden Abschätzungen für die Kantenzahl $f(n)$ eines k -farbigen kritischen Graphen n -ter Ordnung hergeleitet. Summarisch ausgedrückt lauten sie: 1. Ist $k \geq 4$, so gibt es unendlich viele n mit $f(n) < A \cdot n$. In der anderen Richtung weiß man bezüglich $k = 4$ und 5 wenig. Dagegen gibt es für $k \geq 6$ unendlich viele n , so daß $f(n) > B \cdot n^2$ ist. A und B sind i. a. von k abhängige Zahlen. F. Baebler.

Theoretische Physik.

Elastizität. Plastizität:

Lodge, A. S.: A new theorem in the classical theory of elasticity. Nature **169**, 926—927 (1952).

Gezeigt wird: Zu jeder Lösung eines Gleichgewichtsproblems in der klassischen Elastizitätstheorie isotroper Körper läßt sich durch eine geeignete Transformation die Lösung eines ganz speziellen Problems in der Elastizitätstheorie anisotroper Körper angeben. Hardtwig.

Pilatovskij, V. P.: Die Differentialgleichung des elastischen Zustandes bei Vorhandensein von verteilten Quellen gegebener Dichte. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84**, 461—462 (1952) [Russisch].

Jung, H.: Ein Beitrag zur Statik der Kreisplatten. Z. angew. Math. Mech. **32**, 46—61 (1952).

Verf. behandelt den Fall einer durch eine rotationssymmetrische Belastung beanspruchten Kreisplatte, indem er die entsprechende Differentialgleichung

$$\Delta \Delta f(r) = \frac{p(r)}{N}, \Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \text{ in zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung}$$

$$\Delta M(r) = -p(r), \Delta f(r) = -\frac{M(r)}{N} \text{ aufspaltet. Jede dieser Differentialgleichungen}$$

wird hinterher mittels folgender Transformation (Hankel) $\bar{g}(\lambda) = \int_0^\infty \Phi(\varrho) \varrho J_n(\lambda \varrho) d\varrho$,

$\Phi(r) = \int_0^\infty \bar{g}(\lambda) \lambda J_n(\lambda r) d\lambda$ (1) gelöst, wobei $J_n(\lambda r)$ — im Text wird immer die störende Bezeichnung $J_n(\lambda, r)$ benutzt — die Besselsche Funktion erster Art und n -ter Ordnung bedeutet. Es wird nämlich aus der Differentialgleichung $\Delta f(r) + \mu f(r) = w(r)$ die Formel $(\mu - \lambda^2) \int_0^\infty f(r) r J_0(\lambda r) dr = g(\lambda)$ abgeleitet, wo $g(\lambda)$ eine bekannte, durch J_0, J_1 und die Randbedingungen ausdrückbare Funktion ist, und daher mit der Transformation (1): $f(r) = \int_0^\infty \frac{g(\lambda)}{\mu - \lambda^2} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda$. — Das Verfahren

ist auch für die Kreisringplatte gültig und kann sogar auf den Fall einer stufenweise veränderlichen Biegefestigkeit N ausgedehnt werden. Zur raschen Berechnung der vorkommenden Integrale stellt Verf. vier Tabellen und zwei numerische Rechenblätter auf. Schließlich wird die Methode ebenfalls für den Fall der Knickung dieser Platten sowie für die Berechnung der Spannungen und Dehnungen der dicken Platte verwendet.

V. Válcovici.

Szabó, István: Die in Achsenrichtung rotationssymmetrisch belastete dicke Kreisplatte auf nachgiebiger und auf starrer Unterlage. Z. angew. Math. Mech. 32, 145—153 (1952).

Anschließend an frühere Untersuchungen (dies. Zbl. 44, 394), in denen das Problem der rotationssymmetrisch belasteten dicken Kreisplatte auf elastischer Unterlage ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes behandelt wurde, wird das Problem der nachgiebig bzw. starr gelagerten Platte unter Berücksichtigung einer rauhen Unterlage einer ähnlichen Lösung wie bei elastischer Unterlage zugeführt. Unter nachgiebig wird dabei eine Unterlage verstanden, bei der an Stelle des Hookeschen Gesetzes vereinbart wird, daß die Verschiebung dem örtlichen Normaldruck proportional sei („schwimmende“ Platte nach H. Hertz). Die Rauigkeit der Unterlage wird in der Weise berücksichtigt, daß die Schubspannung an der unteren Platten-seite wie beim Coulombschen Reibungsgesetz dem übertragenen Normaldruck proportional gesetzt wird. Für die eingespannte Platte gelingt es, exakte Lösungen anzugeben, während für die am Umfang kräftefreie Platte Näherungslösungen im Sinne des St. Venantschen Prinzips gefunden werden. Die gegebenen Lösungen setzen voraus, daß zwischen Platte und Unterlage stetige Verbindung besteht, d. h. daß überall Druckspannungen übertragen werden. Ergibt dagegen die Rechnung, daß zwischen Platte und Unterlage Zugkräfte auftreten, wird ein Iterationsverfahren angegeben, um zu einer der Wirklichkeit entsprechenden Lösung zu kommen. Zum Schluß wird ein Verfahren angegeben, um das Eigengewicht der Platte in exakter Weise zu berücksichtigen.

R. Gran Olsson.

Woinowsky-Krieger, S.: Über die Stabilität punktwise ausgesteifter Rechteckplatten. Ingenieur-Arch. 20, 106—108 (1952).

Prentis, J. M.: On the compression of a cube between rigid rough plates. Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 253—256 (1952).

Tumarkin, S. A.: Berechnung der symmetrisch belasteten, torusförmigen Schalen mit Hilfe trigonometrischer Reihen. Priklad. Mat. Mech. 16, 569—574 (1952) [Russisch].

Ling, Chih-Bing: Torsion of a circular cylinder having a spherical cavity. Quart. appl. Math. 10, 149—156 (1952).

Verf. behandelt einen unendlich langen Drehzylinder (z -Achse ist Drehachse) mit einem symmetrisch gelegenen kugelförmigen Loch unter Torsionsbeanspruchung. — Die Spannungskomponenten des Problems lassen sich aus einer Funktion $\psi = \psi_0 + \psi_1$ herleiten, wo ψ_0 die Lösung für den Zylinder ohne Loch, ψ_1 eine Hilfs-lösung ist, die auf der Zylinderoberfläche verschwindet. Nach Konstruktion einer Funktion ψ^* , in die eine Besselsche und eine Legendresche Funktion zweiter Ordnung eingehen, wird ψ_1 nach den Funktionen $\psi^*, \partial^2 \psi^* / \partial z^2, \partial^4 \psi^* / \partial z^4$, entwickelt. Für die Koeffizienten A_r der Reihe ergibt sich ein lineares Gleichungssystem aus der Forderung, daß ψ_1 auf der Zylinderoberfläche verschwindet. Die Änderung, die der Verdrehungswinkel des Zylinders infolge des Loches erfährt, ist proportional zu A_2 . Die numerische Behandlung einiger Beispiele ist angeschlossen. F. Reutter.

Bühler, Hans und Walter Schreiber: Beitrag zur Frage der lückenlosen Bestimmung eines Eigenspannungszustandes in metallischen Vollzylindern. Ann. Univ. Saraviensis 1, 166—186 (1952).

Davidson, J. F.: The elastic stability of bent I-section beams. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 212, 80—95 (1952).

Die übliche Theorie der Kipp-Stabilität vernachlässigt die Biegedeformation in der Ebene der größten Steifigkeit des Trägers. Eine strengere, von H. Reissner (1904) und Grober (1914) für Träger mit rechteckigem Querschnitt angegebene Theorie, dehnt Verf. auf I-Träger aus, indem er von den grundlegenden Erkenntnissen von S. Timoshenko hinsichtlich des Verhaltens solcher Träger ausgeht. Die für zwei Endmomente als Belastung entwickelte Lösung des Verf. berücksichtigt zugleich eine elastische Einspannung des Trägers am Auflager in bezug auf jede der beiden Hauptachsen seines Querschnitts. Die Ergebnisse einer numerischen Auswertung der Lösung werden durch Versuche an einem I-Träger aus Aluminium bestätigt und durch Kurven veranschaulicht. Die Abweichungen von den Ergebnissen der üblichen Theorie erweisen sich bei praktisch vorkommenden Steifigkeitsverhältnissen als unbedeutend.

S. Woinowsky-Krieger.

Conway, H. D.: Bending of orthotropic beams. J. appl. Mech. 19, 227 (1952).

Heyman, Jacques: The limit design of a transversely loaded square grid. J. appl. Mech. 19, 153—158 (1952).

Stevens, G. W. H.: The stability of a compressed elastic ring and of a flexible heavy structure spread by a system of elastic rings. Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 221—236 (1952).

Ling, Chih-Bing: On the stresses in a notched strip. J. appl. Mech. 19, 141—146 (1952).

Michielsen, H. F.: The computation of flexural-torsional buckling loads. J. appl. Mech. 19, 214—219 (1952).

Green, A. E., R. S. Rivlin and R. T. Shield: General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 211, 128—154 (1952).

Die allgemeine Theorie kleiner Deformationen, welche endlichen Deformationen überlagert sind, wird entwickelt. Speziell wird der Fall eines homogenen endlichen Deformators behandelt. Die folgenden Fälle werden ausführlich diskutiert. 1. Eindruck einer Kugel in elastisch isotropen (inkompressiblen) Halbraum mit zur Oberfläche normalen symmetrischen homogenen endlichen Deformation. Lösung durch Potentialfunktionen. 2. Biegung und ebener Verzerrungszustand einer in ihrer Ebene homogen deformierten dünnen Platte.

G. Leibfried.

Milne-Thomson, L. M.: Endliche Deformationen und Elastizität. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 9—35 (1952) [Spanisch].

The aim of these two talks is to consider some of the basic hypothesis of the general theory of deformation of a continuous medium and the conditions of existence of a density of energy of deformation. The theory is then applied to the elastic deformation and then to a particular hypothesis. The development is based on the tensor calculus.

(Autoreferat.)

Richter, Hans: Zur Elastizitätstheorie endlicher Verformungen. Math. Nachr. 8, 65—73 (1952).

Durch eine geometrische Formulierung des Verzerrungs-Spannungs-Zustandes gelingt es Verf., manche (teilweise bekannte) Tatsachen in eine elegante, gedrängte Form zu bringen. Wenn \mathfrak{A} die Verzerrungsaffinität in der Umgebung eines Punktes und $p(n; \mathfrak{A})$ die dazugehörige Spannung bedeuten, so ergibt sich unmittelbar aus der Form der Beziehungen zwischen p einerseits und der Rotation und Streckung von \mathfrak{A} andererseits, daß bei beliebigem anisotropem Material der rechte Streckanteil die thermodynamischen Größen vollkommen, dagegen die Spannungen nur bis auf die Orientierung festlegt. Bei anisotropen Material gibt es für die Spannungs-

tensormatrix \mathfrak{P} keinen Verzerrungstensor der Dimension < 9 . Es gibt aber zwei modifizierte Spannungstensoren \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 , so daß jede eindeutige Funktion des rechten Streckanteils \mathfrak{S}_r von \mathfrak{A} ein Verzerrungstensor ist; \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 liefern aber die Spannungen nur bei zusätzlicher Kenntnis der Rotation \mathfrak{R} von \mathfrak{A} . Ferner wird der Verzerrungsenergiefunktion eine allgemeine Form gegeben und damit gelangt Verf. zu den Ausdrücken von \mathfrak{P} und $\hat{\mathfrak{P}} (= \mathfrak{P}_2)$ als Funktionen der inneren Energie u und folglich zu dem allgemeinen Elastizitätsgesetz. *V. Válcovici.*

Thomas, T. Y.: On the characteristic surfaces of the von Mises plasticity equations. *J. rat. Mech. Analysis* **1**, 343—357 (1952).

In this valuable paper the author investigates the characteristics of the three dimensional problem of a perfectly plastic body. These 10 equations (9 partial differential-equations, and one finite equation, the „yield condition“) for 10 unknowns, the stress tensor, Σ , (6), the velocity vector, \bar{v} , (3), and a non negative function of proportionality, λ , have first been given by v. Mises, 1913; he also introduced a yield condition $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2k^2$, [$s_i = \sigma_i + p$, $\sigma_i =$ principal stresses, $3p = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$] different from the older (Saint-Venant and Tresca) condition, $s_1 - s_3 = 2\kappa$ (where $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$). The investigation is carried out for both these yield conditions: it is based on a „reduced system“ with only 4 unknowns, p and \bar{v} . [From these λ and Σ follow then easily]. The characteristic surfaces are found by methods of Hadamard and Levi-Civita. In general, in such a three dimensional problem, the real characteristic directions form a cone at each point where they exist. In our problem, however, there are exactly two real characteristic directions at each point and they are perpendicular to the surface elements of maximum and minimum shearing stress thus orthogonal. (Are these characteristics of a multiplicity $m > 1$?). These very remarkable results hold however, with v. Mises' yield condition only if $\dot{\epsilon}_2 = 0$, where $\dot{\epsilon}_i$ are the principal strain rates, $\dot{\epsilon}_1 \geq \dot{\epsilon}_2 \geq \dot{\epsilon}_3$. With Tresca's condition such a restriction does not appear. [A corresponding restriction in connection with Mises' condition was found by P. S. Symonds (this Zbl. **31**, 428) in a study of the characteristics of the same plasticity problem in case of axial symmetry]. Still further interesting questions are raised, and, partly, answered in this paper which is of great interest to the student of plasticity and to the applied mathematician. *H. Geiringer.*

Panferov, V. M.: Über die Anwendbarkeit von Variationsmethoden auf Probleme kleiner elasto-plastischer Deformationen. *Priklad. Mat. Mech.* **16**, 319—322 (1952) [Russisch].

Verf. beginnt mit einer knapp gefaßten Darstellung der direkten Lösungsmethoden für das Variationsproblem des rein elastischen Körpers, und zwar nach Ritz und nach Galerkin. An Hand der „Methode der elastischen Lösungen“ von A. Il'juschin (vgl. etwa I. A. Birger, dies. Zbl. **44**, 399) wird der Beweis für die Anwendbarkeit des Ritzschen Verfahrens auch auf den Fall des elastisch-plastisch deformierten Körpers erbracht. In ähnlicher Weise ließe sich die Anwendung der Galerkinschen Methode begründen. *S. Woinowsky-Krieger.*

Panferov, V. M.: Über die Konvergenz der Methode der elastischen Lösungen für ein Problem der elasto-plastischen Verbiegung von Bohlen. *Priklad. Mat. Mech.* **16**, 195—212 (1952) [Russisch].

In dieser Arbeit wird die Konvergenz der „Methode elastischer Lösungen“ (vgl. z. B. I. A. Birger, dies. Zbl. **44**, 399) in Anwendung auf die elastisch-plastische Deformation dünner Platten bewiesen. Verf. geht von einer von A. Il'juschin herührenden Integro-Differentialgleichung $w = w_0 + I$ für die Plattendurchbiegung w aus, wo w_0 die Lösung der elastischen Aufgabe und I ein Flächenintegral ist, das außer der Greenschen Funktion des elastischen Problems eine ideelle Spannung und eine ideelle Deformation enthält, deren Verhältnis experimentell festzulegen ist. Die Grenzen der plastischen Bereiche sind nach Verf. durch drei Ortsfunktionen gegeben, die einem System nicht-linearer Integralgleichungen genügen. Auf Grund einiger Existenzsätze von W. W. Nemyzkij und einiger Hilfssätze des Verf. wird nun ein Existenzbeweis für die Lösung des obigen Systems und hiermit auch für die Lösung der Integro-Differentialgleichung in Verbindung mit den vorgeschriebenen Randbedingungen erbracht. *S. Woinowsky-Krieger.*

Novožilov, V. V.: Über den physikalischen Sinn der Spannungsinvarianten, die in der Plastizitätstheorie benutzt werden. Priklad. Mat. Mech. 16, 617—619 (1952) [Russisch].

Hiedemann, E. und R. D. Spence: Zu einer einheitlichen Theorie der Relaxationserscheinungen. Z. Phys. 133, 109—123 (1952).

Sind $\varepsilon(\omega)$ und $f(\omega)$ die komplexen Fourier-Amplituden irgendeines zeitlichen Verlaufs der Dehnung $E(t)$ und Spannung $X(t)$ in einem elastischen Medium, dann ist (sofern zwischen diesen Größen ein linearer Zusammenhang besteht) eine frequenzabhängige Kompressibilität $K(\omega)$ definiert durch $\varepsilon(\omega) = K(\omega) f(\omega)$. Elastische Relaxationserscheinungen haben komplexes und frequenzabhängiges K zur Folge (Analoges gilt bei dielektrischen Relaxationserscheinungen für die Dielektrizitätskonstante). Die Modelle, die man zur Erklärung der Relaxation heranzuziehen pflegt, führen alle für K auf eine Frequenzabhängigkeit der Form

$$K(\omega) = K(\infty) - \sum \frac{i a_n}{\omega - i/\tau_n},$$

wo τ_n für das Modell charakteristische Relaxationszeiten sind. — In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß man diese Form der Frequenzabhängigkeit, ohne spezielle Modelle zu benötigen, aus folgenden allgemeinen Voraussetzungen erhält: (1) $K(\omega)$ ist in eine komplexe $u = (\omega + i\nu)$ -Ebene analytisch fortsetzbar; (2) aus reellem $X(t)$ folgt reelles $E(t)$ und umgekehrt; (3) aus $X(t) = 0$ für $t < 0$ folgt $E(t) = 0$ für $t < 0$ (Forderung der Kausalität); (4) $\lim_{u \rightarrow \infty} K(u) = K(\infty)$

existiert und ist nicht null; (5) die einzigen Singularitäten von $K(u)$ sind Pole auf der imaginären Achse (bei $u = i/\tau_n$). — Ein kontinuierliches Spektrum von Relaxationszeiten entsteht, wenn die Singularitäten in Verzweigungspunkten auf der imaginären u -Achse bestehen. An einigen Beispielen wird noch gezeigt, daß die Funktion $K(\omega)$ relativ unempfindlich gegen Änderungen des Spektrums der Relaxationszeiten ist. A. Schoch.

Dolberg, M. D.: Zur Frage der kritischen Winkelgeschwindigkeiten einer rotierenden Welle. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 45—48 (1952) [Russisch].

Trösch, A.: Stabilitätsprobleme bei tordierten Stäben und Wellen. Ingenieur-Arch. 20, 258—277 (1952).

Untersucht werden Knickung von Stäben (Teil I) und kritische Drehzahlen von Wellen (Teil II), die durch ein Torsionsmoment W und — beim Knickproblem I — auch noch durch eine achsiale Druckkraft D belastet sind. Der Momentenvektor W soll, der üblichen Annahme folgend, bei der Deformation seine achsiale Richtung beibehalten. Ein solches Moment besitzt i. a. kein Potential. Demzufolge läßt sich die Stabilität nicht mehr mit Hilfe des statischen oder energetischen Kriteriums untersuchen, sondern man hat das Problem als Schwingungsaufgabe unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte zu behandeln. — Die Knickaufgabe (in I) wird für vier Lagerungen untersucht: I beiderseits eingespannt, II eingespannt — frei, III eingespannt — gelenkig gelagert, IV beiderseits gelenkig gelagert. Nur im Falle I handelt es sich um ein konservatives System, für das die Ergebnisse der statischen Untersuchung ohne weiteres gültig bleiben. Die Fälle II und III erweisen sich bei dynamischer Untersuchung als instabil für ein beliebig kleines Torsionsmoment W , selbst für beliebig große Zuglast ($D < 0$). Fall IV ist dagegen wieder stabil und führt, obgleich nicht konservativ, auf bekannte Knickformeln (Euler, Greenhill und Kombination). Einbeziehen einer linearen Dämpfung wirkt im Falle II, III stabilisierend; Es gibt ein Grenzmoment W_0 derart, daß für $W < W_0$ das Knickproblem wieder stabil wird in Übereinstimmung mit der Erfahrung. — Die Aufgabe der kritischen Drehzahlen (Teil II) wird zunächst (in II A) ohne Kreiselwirkung betrachtet, und zwar für verschiedene Lagerungsfälle. Nur für zwei symmetrische von ihnen tritt die bekannte kritische Drehzahl auf. In den übrigen Fällen, bei denen die Auslenkung nicht mehr in Kraftrichtung fällt, gibt es eine eigentliche kritische Drehzahl nicht mehr; dafür ist jede Drehzahl kritisch geworden in dem Sinne, daß die Schwingung sich unbegrenzt aufschauelt. Eine lineare Dämpfung wirkt auch hier stabilisierend. — Mit Berücksichtigung der Kreiselwirkung (in II B) werden zwei Fälle (fliegende und zweiseitig gelagerte Welle) behandelt. Auch hier fehlt eine eigentliche kritische Drehzahl, und jede Drehzahl ist kritisch geworden. Größere Scheibenträge bewirkt indessen langsameren Anwachsen der Schwingung. Hier wirkt Dämpfung nicht mehr stabilisierend. — Auch bei Fehlen einer kritischen Drehzahl können „gefährliche“ Drehzahlbereiche auftreten, für die die Auslenkungen zwar nicht unbeschränkt, wohl aber noch unzulässig hoch werden. R. Zurmühl.

Bejlin, E. A. und G. Ju. Džanelidze: Übersicht über Arbeiten zur dynamischen Stabilität elastischer Systeme. Priklad. Mat. Mech. 16, 635—648 (1952) [Russisch].

Lembecke, H.-R.: Biege- und Torsionsschwingungen von Stäben mit beliebigen Querschnitten. Ingenieur-Arch. 20, 91—105 (1952).

Die bisher bekannten Untersuchungen beschränken sich auf die Fälle, bei denen sich nur zwei Schwingungsarten, eine Biege- und eine Torsionsschwingung gegenseitig beeinflussen.

(Zweierkopplung). Verf. gibt eine Erweiterung auf den allgemeineren Fall der Dreierkopplung bei beliebigen unverwundenen stabförmigen Gebilden. Unter Zugrundelegung der linearisierten Elastizitätstheorie und Vernachlässigung von Dämpfung, Querkraftverformung und Rotationsträgeit bezüglich der Hauptträgheitsachsen des Querschnittes werden das aus dem Hamiltonschen Prinzip folgende Variationsintegral des Problems und seine Euler-Lagrangeschen Gleichungen aufgestellt. Stimmt die elastische Achse mit der Schwereachse überein, so verschwinden die „Koppelungsglieder“ und die jetzt voneinander unabhängigen Schwingungen in den 3 Freiheitsgeraden (Biegeschwingungen um die beiden Hauptträgheitsachsen des Querschnittes und Torsionsschwingungen um die elastische Achse) lassen sich einzeln berechnen. Das Variationsproblem wird nach dem Ritzschen Verfahren behandelt, indem die unbekannten Lösungsfunktionen als n -parametrische Linearkombinationen von „freien“ Eigenfunktionen dieser entkoppelten Biege- bzw. Torsionsschwingungen angesetzt werden. Die Wurzeln der Null gesetzten Koeffizientendeterminante des entsprechenden linearen Gleichungssystems werden als obere Schranken für die exakten Eigenwerte des gekoppelten Systems benutzt. Verf. beschränkt sich im wesentlichen auf die Diskussion des zwei- und vierparametrischen Ansatzes. Für beliebige prismatische Stäbe mit konstantem Querschnitt wird jedoch die Rechnung des zweiparametrischen Ritz-Ansatzes bei Dreierkopplung und des vierparametrischen Ansatzes bei Zweierkopplung für die verschiedenen Lagerungsfälle vollständig durchgeführt. Es wird versucht, einen Anhaltspunkt für die Fehler dieses Ritzschen Verfahrens zu gewinnen, indem für den Sonderfall der Zweierkopplung (nur eine Biegeschwingung und die Torsionsschwingung beeinflussen sich) sowohl die exakte Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen des Variationsproblems als auch die Behandlung nach dem Ritzschen Verfahren bei vierparametrischem Ansatz erfolgt. Am Beispiel der Ermittlung der Eigenschwingungszahlen eines gleichschenkligen Winkeleisens (einsseitig eingespannt, anderseitig frei) zeigt sich, daß das Ritz-Verfahren schon bei einem vierparametrischen Ansatz praktisch als fehlerfrei gelten kann (größter Fehler beim Beispiel 0,2%). Verf. glaubt, hieraus schließen zu dürfen, daß auch bei Dreierkopplung nur Abweichungen dieser Größenordnung auftreten und unterstützt diese Behauptung, indem er zum Abschluß als Beispiel für den allgemeinen (nicht geschlossen integrierbaren) Fall der Dreierkopplung bei prismatischen Stäben mit willkürlichem Querschnitt die gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen eines ungleichschenkligen Winkeleisens experimentell und rechnerisch nach Ritz untersucht. — Es zeigt sich u. a.: Die gegenseitige Störung der Biege- und Torsionsschwingungen ist so gerichtet, daß sich benachbarte freie Biege- und Torsionsfrequenzen auseinanderrücken, und zwar um so stärker, je näher sie zusammenliegen. Kurze verdrehungsweiche Stäbe zeigen einen stärkeren Koppelungseinfluß als lange verdrehungssteife.

F. Reutter.

Fettis, H. E.: Torsional vibration modes of tapered bars. *J. appl. Mech.* **19**, 220—222 (1952).

Lurie, Harold: Lateral vibrations as related to structural stability. *J. appl. Mech.* **19**, 195—204 (1952).

Cydzik, P. V.: Eine Anwendung der Methode des kleinen Parameters zur Lösung von Eigenschwingungen von Platten, die sich von rechteckigen wenig unterscheiden. *Priklad. Mat. Mech.* **16**, 349—351 (1952) [Russisch].

Munakata, K.: On the vibration and elastic stability of a rectangular plate clamped at its four edges. *J. Math. Physics* **31**, 69—74 (1952).

Verf. bildet zunächst die in der z -Ebene enthaltene rechteckige Begrenzung der Platte in bekannter Weise durch ein elliptisches Integral auf einen Einheitskreis in der ζ -Ebene ab. Die in Koordinaten $z = x + i y$, $\bar{z} = x - i y$ ausgedrückte Differentialgleichung der Plattenschwingung wird dann mittels der Abbildungsfunktion in $\zeta, \bar{\zeta}$ umgeschrieben. Die Auflösung dieser Gleichung erfolgt näherungsweise nach Galerkin, wobei ein Satz von Eigenfunktionen der schwingenden eingespannten Kreisplatte mit Variablen $\zeta, \bar{\zeta}$ statt z, \bar{z} unter Einhaltung der vorgeschriebenen Randbedingungen verwendet wird. Die mit 5 Parametern berechnete Grundschwingungsfrequenz der quadratischen Platte liegt um 0,8% über dem von S. Tomotika (1936) berechneten, exakteren Wert. Verf. weist schließlich auf eine erfolgreiche Anwendung der Methode auf die Probleme der Beulung und der Biegung einer eingespannten quadratischen Platte durch gleichförmige Belastung hin.

S. Woinowsky-Krieger.

Fedjaevskij, K. K.: Eine angenäherte theoretische Bestimmung der konjugierten Massen von rechteckigen Platten. *Priklad. Mat. Mech.* **16**, 352—354 (1952) [Russisch].

Duncan, W. J.: A critical examination of the representation of massive and elastic bodies by systems of rigid masses elastically connected. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **5**, 97—108 (1952).

Bei einer weitverbreiteten Methode für die angenäherte Behandlung der dynamischen Probleme elastischer Massen wird die Masse in einer endlichen Anzahl von Teilchen (bzw. ausgedehnten festen Körpern) konzentriert angenommen, die in eine ideale massenlose Substanz eingebettet gedacht werden, welche die gleichen elastischen Eigenschaften wie der ursprüngliche Körper besitzen soll. So wird ein Körper mit unendlich vielen Freiheitsgraden durch ein System mit endlich vielen Freiheitsgraden dargestellt. Verf. interessiert sich für den durch die Idealisierung begangenen Fehler bei der Frequenz irgendeiner natürlichen Schwingungsform. Unter Zugrundelegung von elastischen Körpern von speziell linearer Gestalt (Transversalschwingungen einer gleichförmigen und vollkommen biegsamen gespannten Saite, Longitudinalschwingungen eines gleichförmigen, geraden, dünnen elastischen Stabes, Torsionsschwingungen einer gleichförmigen elastischen Welle) findet Verf., daß der Fehler der Frequenz asymptotisch umgekehrt proportional dem Quadrat der Anzahl der Abschnitte ist, wenn die Masse in den Mittelpunkten gleicher Abschnitte konzentriert wird. Wird sie außerhalb dieser Mittelpunkte konzentriert, so wird der Fehler schließlich mit dem reziproken Wert der Anzahl der Abschnitte asymptotisch proportional.

V. Garten.

Sneddon, Ian. N.: The stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semi-infinite solid. *Rend. Circ. mat. Palermo*, II. Ser. **1**, 57—62 (1952).

Verf. behandelt die elastische Halbebene $y \geq 0$, deren Berandung $y = 0$ unter der Einwirkung einer zeitlich veränderlichen Kraft steht. Für die Fälle

- a) $\sigma_y = -\frac{1}{2} \{F''(x-vt) + F''(\bar{x}-v\bar{t})\}$, $\tau_{xy} = 0$ für $y = 0$
 b) $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = -\frac{1}{2} \{G''(x-vt) + G''(\bar{x}-v\bar{t})\}$ für $y = 0$
 c) σ_y wie bei a), τ_{xy} wie bei b) für $y = 0$.

$F''(z)$ und $G''(z)$ sind gegebene Funktionen von $z = x + iy$, \bar{F}, \bar{G} sind konjugiert zu F, G , t Zeit, v konstante Geschwindigkeit. Es ergibt sich, daß in allen drei Fällen jeweils die Verschiebungen und die Spannungen aus den Ableitungen einer Funktion $f(z)$ zusammengesetzt sind, die selbst bis auf einen die elastischen Konstanten und v enthaltenden Faktor mit $F(z)$ bzw. $G(z)$ übereinstimmt. Der Fall einer punktförmigen Belastung wird eingehender behandelt.

F. Reutter.

Biot, M. A.: Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid. *J. appl. Phys.* **23**, 997—1005 (1952).

Twersky, Victor: Multiple scattering of radiation by an arbitrary planar configuration of parallel cylinders and by two parallel cylinders. *J. appl. Phys.* **23**, 407—414 (1952).

Für die Amplitude ψ der gestreuten (akustischen oder elektromagnetischen) Welle, die durch Streuung einer ebenen Primärwelle an einer beliebigen Anordnung von $N + 1$ parallelen Zylindern (zweidimensionales Problem) entsteht, hat Verf. in einer vorhergehenden Arbeit [*J. Acoust. Soc. Amer.* **24**, 42 (1952)] einen strengen Ausdruck der Gestalt abgeleitet:

$$\psi = \sum_{s=0}^N \sum_{m=1}^{\infty} {}^s\psi_m = \sum_s \sum_n {}^sA_n H_n^{(1)}(Kr_s) \exp \left[i n \left(\theta_s + \alpha + \frac{\pi}{2} \right) + i \vec{K} \vec{r}_{0s} \right] \sum_m {}^sB_m^n.$$

K = Wellenzahl; \vec{K} = Wellenvektor, α = Richtungswinkel der einfallenden Welle; \vec{r}_{0s} = Ortsvektoren der Zylindermittelpunkte; θ_s, r_s Zylinderkoordinaten bezüglich des s -ten Zylinders; $H_n^{(1)}$ = Hankelfunktion 1. Art. sA_n sind die Streuamplituden, die bei Anwesenheit des s -ten Zylinders allein entstehen würden. Die ${}^sB_m^n$ geben die durch m -fache Streuung bewirkten Korrekturen (${}^sB_n^n = 1$); sie lassen sich ausdrücken durch die sA_n und die relativen Lagen der Zylinder. — Dieses allgemeine Ergebnis wird in vorliegender Arbeit spezialisiert auf Zylinder, die in einer Ebene liegen. Für Wellenlänge \ll Zylinderabstände \ll Entfernung des Aufpunktes ergibt sich dann asymptotisch eine Amplitudenverteilung, die symmetrisch in bezug auf die Ebene durch die Zylinder ist. Für $N + 1 = 2$ Zylinder wird die asymptotische Lösung ein-

gehend untersucht, insbesondere die Frage, unter welchen Bedingungen durch Mehrfach-Streuung die größten und kleinsten Unterschiede gegenüber der Einfachstreuung auftreten. Aus der erhaltenen Lösung kann man leicht diejenige für die Beugung an halbzyllindrischen „Buckeln“ auf einer vollkommen leitenden Ebene (Reflexionsgitter) herstellen. Die oben erwähnte Symmetrie-Eigenschaft lehrt in diesem Fall, daß bei elektromagnetischen Wellen asymptotisch Mehrfachstreuungseffekte nur auftreten, wenn der elektrische Vektor senkrecht zu den Zylinderachsen polarisiert ist. *A. Schoch.*

Sveklo, V. A.: Über ein Beugungsproblem. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 51—54 (1952) [Russisch].

Die Ausbreitung elastischer Wellen in der Umgebung eines Spaltes wird für folgendes Modell untersucht: Die x -Achse teilt die Vollebene in 2 Halbebenen mit verschiedenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Für $x < 0$ liegen die Medien fest aneinander (stetiger Übergang der Verschiebungen und Normalspannungen), für $x > 0$ sind sie durch einen Spalt getrennt. Die einfallende Welle läuft in Richtung der x -Achse. Die Lösung des Problems wird in Integralform angegeben. *W. Kertz.*

Berry, F. J.: The diffraction of a sound pulse by a non-rigid semi-infinite plane screen. Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 333—343 (1952).

Berry, F. J.: The diffraction of sound pulses by an oscillating, infinitely long strip. Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 324—332 (1952).

Guptill, E. W. and A. D. MacDonald: The acoustical field near a circular transducer. Canadian J. Phys. 30, 119—122 (1952).

Im Hinblick auf die Frage, welche Fehler bei der Messung von Schallgeschwindigkeiten mit Ultraschall-Interferometern entstehen, werden Geschwindigkeitspotential und Schallschnelle im Nahfeld einer kreisförmigen Strahlerfläche berechnet, wobei eine Verteilung der Schnelle V über den Strahler von der Form $V = V_0 I_0(\gamma \varrho)$ für $0 \leq \varrho < a$, $V = 0$ für $a < \varrho$ angenommen wird (ϱ = Abstand von der Achse, a = Radius des Strahlers, $I_0(\gamma a) = 0$). Mit dieser speziellen Verteilung erhält man eine Darstellung des Feldes durch ein einfaches Integral, die einfacher ist als bei einem Kolbenstrahler ($V = V_0$, $0 \leq \varrho < a$; $V = 0$, $a < \varrho$). *A. Schoch.*

Hydrodynamik:

Mineo, Corradino: Teoria idrostatica delle configurazioni d'equilibrio dei pianeti fluidi rotanti e teoria di Stokes nel caso particolare della terra. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 635—642 (1952).

Lewy, Hans: A note on harmonic functions and a hydrodynamical application. Proc. Amer. math. Soc. 3, 111—113 (1952).

Soient $U(x, y)$ et $V(x, y)$ deux fonctions harmoniques conjuguées au voisinage de l'origine pour $y < 0$. Si $U, V, \partial U/\partial x$ existent et sont continues dans le voisinage de l'origine pour $y \leq 0$ et si les valeurs limites sur $y = 0$ vérifient $\partial U/\partial y = A(x, U, V, \partial U/\partial x)$ où A est une fonction analytique de ses quatre arguments, alors U et V sont prolongeables analytiquement à travers $y = 0$. — Application à l'étude de l'écoulement irrotationnel d'un liquide incompressible homogène au voisinage d'une surface libre où la pression est constante. *J. Dufresnoy.*

Dörr, J.: Über zwei mit der Tragflügeltheorie in Zusammenhang stehende Integralgleichungen. Ingenieur-Arch. 20, 88—90 (1952).

Verf. beweist die früher (dies. Zbl. 42, 188) aufgestellte Behauptung, daß die Integralgleichung

$$f(x) = \frac{1}{2h} \int_{-1}^1 g(y) \operatorname{ctg} \frac{\pi(x-y)}{h} dy$$

bei stückweise stetigem und stückweise stetig differenzierbarem $f(x)$ auch für

beliebige (nicht reelle oder rein imaginäre) Parameterwerte h durch

$$g(x) = \frac{k \sin \frac{\pi}{h} \operatorname{Co} \frac{\pi x}{h}}{\pi \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{h} - \sin^2 \frac{\pi x}{h}}} + \frac{2}{h \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{h} - \sin^2 \frac{\pi x}{h}}} \int_{-1}^1 \frac{f(y) \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{h} - \sin^2 \frac{\pi y}{h}}}{\sin \frac{\pi(y-x)}{h}} dy$$

mit einer beliebigen Konstanten k allgemein gelöst wird.

J. Weissinger.

Manwell, A. R.: Constant velocity aerofoils with circulation. Proc. London math. Soc., II. Ser. 54, 168—183 (1952).

Es wird eine Verallgemeinerung der symmetrischen Riabouchinsky-Profilen mit konstanter Geschwindigkeit gesucht, welche für endliche Dickenverhältnisse genau gleichförmige Auftriebsverteilung über der Flügeltiefe besitzen. Diese haben aber nicht die Eigenschaft der kleinsten Übergeschwindigkeiten, ausgenommen im Grenzfall des Nullauftriebs. Verf. hat an anderer Stelle (dies. Zbl. 41, 540) die Bedingungen für Profile mit kleinster Übergeschwindigkeit unter der Annahme dünner Profile mit ziemlich hohem Auftrieb abgeleitet und dabei Profile gefunden, die zwar an der Saugseite konstante, an der Druckseite aber eine völlig anders geartete Geschwindigkeitsverteilung besitzen.

J. Pretsch.

Gaugh, William J. and Joseph K. Slap: Determination of elastic wing aerodynamic characteristics. J. aeronaut. Sci. 19, 173—182 (1952).

Unter gewissen vereinfachenden Annahmen wird für die Anstellwinkelverteilung $\alpha(y)$ eines (hinsichtlich Biegung und Torsion) elastischen, gepfeilten Trapezflügels eine Integralgleichung von der Form $\alpha = \alpha_0 + q P \alpha$ aufgestellt, in der α_0 eine vom Staudruck q und den elastischen und aerodynamischen Eigenschaften des Flügels abhängige, als bekannt anzusehende Funktion und P einen linearen Operator bedeutet, der sich im wesentlichen aus Integrationen über die zu α gehörige Auftriebs- bzw. Momentenverteilung zusammensetzt. Für genügend kleine q läßt sich die Lösung als Neumannsche Reihe $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} q^i P^i \alpha_0$ schreiben. Diese Reihe konvergiert für $q < |q_1|$, wobei $q_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n \alpha_0 / P^{n+1} \alpha_0$ der kleinste Eigenwert von P

ist. Da i. a. durch den Einfluß der Elastizität an ungepfeilten und vorwärts gepfeilten Flügeln ein positiver Anstellwinkel vergrößert wird, tritt hier mit wachsendem q , erstmalig für $q = q_1 > 0$, eine Instabilität auf, so daß für $q > q_1$ eine Lösung nicht interessiert. Rückgepfeilte Flügel dagegen besitzen diese Instabilität nicht; hier ist $q_1 < 0$, und die Lösung läßt sich für beliebiges q mit passendem $\theta = \theta(q)$ schreiben

als $\alpha = \left\{ \frac{1}{\theta} I + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\theta-1}{\theta} \right)^i \left[I + \frac{q}{\theta-1} P \right]^i \right\} \alpha_0$, I = Einheitsoperator. — Mittels

dieser allgemeinen Theorie wird der Einfluß der Elastizität, insbesondere des Staudrucks auf Gesamtauftrieb und -momente und andere praktisch interessierende Beiwerte (z. B. flugmechanische Stabilitätscharakteristiken) untersucht. Vergleiche mit Meßergebnissen zeigen ausgezeichnete Übereinstimmung.

J. Weissinger.

Papon, André: Sur une méthode de construction de profils par combinaison de deux ou plusieurs profils analytiques. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 939—941 (1952).

Adams, Mac C. and W. R. Sears: On an extension of slenderwing theory. J. aeronaut. Sci. 19, 424—425 (1952).

Prosciutto, Aristide: Sulle proprietà caratteristiche di particolari tipi di schiere di pale, generate mediante trasformazioni conformi. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser. 8, 75—81 (1952).

Chang, Chieh-Chien: On Theodorsen function in incompressible flow and C-function in supersonic flow. J. aeronaut. Sci. 19, 717—718 (1952).

Lessen, Martin: Note on a sufficient condition for the stability of general plane parallel flows. Quart. appl. Math. 10, 184—186 (1952).

Gadd, G. E.: Some hydrodynamical aspects of the swimming of smakes and eels. *Philos. Mag.*, VII. Ser. 43, 663—670 (1952).

Jevlev, V. M.: Einige Fragen der hydrodynamischen Theorie des Wärmeaustauschs bei der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 86, 1077—1080 (1952) [Russisch].

Strscheletzky, M.: Berechnung der Schaufelform von Kaplan-Laufrädern bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung auf der Schaufeloberfläche. *Z. angew. Math. Mech.* 32, 276—277 (1952).

Kufarev, P. P.: Über die Strömung eines Strahles um einen Kreisbogen. *Priklad. Mat. Mech.* 16, 589—598 (1952) [Russisch].

Hahnemann, H. W.: Konturen von freien Ausfluß-Strahlen und ihre technischen Anwendungen. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 18, 45—55 (1952).

Gerber, Robert: Un théorème d'unicité pour les écoulements d'un liquide parfait, pesant. *C. r. Acad. Sci., Paris* 235, 693—694 (1952).

Cabannes, Henri: Étude de quelques propriétés caractéristiques des solutions des équations de Navier. *Bull. Soc. math. France* 80, 37—46 (1952).

Lösungen der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen, bei denen die Geschwindigkeitskomponenten in Potenzreihen nach $1/r$ entwickelbar sind und die Geschwindigkeit im Unendlichen konstant ist, sind wirbelfrei, d. h. es existieren keine zähen Lösungen dieser Art. Ähnliche Folgerungen kann man auch im ebenen Fall ziehen, wenn man die Stromfunktion als Polynom in $u = x + iy$ und $v = x - iy$ voraussetzt. Man erhält dabei für ein Polynom 3. Grades den trivialen Fall der Poiseuilleströmung, für Polynome 4. und höheren Grades können dagegen die Lösungen nur von u oder v allein abhängen, woraus man den Schluß ziehen kann, daß in diesem Fall überhaupt keine Lösungen außer der Ruhe existieren.

W. Wuest.

Lighthill, M. J.: On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small Reynolds numbers. *Commun. pure appl. Math.* 5, 109—118 (1952).

Squire, H. B.: Some viscous fluid flow problems. I. Jet emerging from a hole in a plane wall. *Philos. Mag.*, VII. Ser. 43, 942—945 (1952).

Es wird eine Schar von exakten Lösungen der Bewegungsgleichungen der zähen Flüssigkeit für achsensymmetrische Strömungen angegeben. Diese können gedeutet werden als der Ausfluß eines runden Strahles aus einer kleinen Öffnung in einer ebenen Wand. Es werden die Stromlinienbilder für verschieden große Ausflußgeschwindigkeiten dargestellt.

H. Schlichting.

Lambossy, Paul: Oscillations forcées d'un liquide incompressible et visqueux dans un tube rigide et horizontal. Calcul de la force de frottement. *Helvet. phys. Acta* 25, 371—386 (1952).

Für die Strömung durch ein kreiszylindrisches Rohr, an dessen Enden ein zeitlich harmonisch veränderlicher Druckunterschied wirkt, werden die Geschwindigkeitsverteilungen über dem Rohrquerschnitt und der Reibungswiderstand an der Rohrwand berechnet. Die Beiträge von P. Szymanski (dies. Zbl. 4, 83; S. 67 der Arbeit) scheinen dem Verf. unbekannt gewesen zu sein.

J. Pretsch.

Deemter, J. J. van: Bernoulli's theorem for viscous fluids. *Phys. Review*, II. Ser. 85, 1094 (1952).

Durch innere Multiplikation der Bewegungsgleichung mit dem Vektor der Geschwindigkeit wird unter Benutzung der Kontinuitätsgleichung und der Energiegleichung, wobei der Wärmefluß berücksichtigt wird, eine Gleichung abgeleitet, welche die zeitliche Änderung des Bernoullischen Energieausdruckes als einen Gradienten erscheinen läßt. Es handelt sich um eine Vervollständigung der Ergebnisse von Madelung und von Lohr.

G. Hamel.

Andersson, Bengt: On the stress-tensor of viscous isotropic fluids. Ark. Fys. 4, 501—503 (1952).

Es wird die Frage aufgeworfen, ob aus der Gültigkeit der Hagen-Poiseuille- und der Couette-Strömung auf die Linearität der Beziehung zwischen Spannungs- und Deformationstensor der Geschwindigkeit geschlossen werden kann. Die Frage ist zu verneinen. *G. Hamel.*

Lessen, Martin: On the stability of plane parallel laminar flows to two- and three-dimensional disturbances. J. aeronaut. Sci. 19, 431—432 (1952).

Tatsumi, Tomomasa: Remarks on „Stability of the laminar parabolic flow“. Phys. Review, II. Ser. 87, 1127—1128 (1952).

Görtler, H.: Eine neue Reihenentwicklung für laminare Grenzschichten. Z. angew. Math. Mech. 32, 270—271 (1952).

Schlichting, H. und E. Truckenbrodt: Die Strömung an einer angeblasenen rotierenden Scheibe. Z. angew. Math. Mech. 32, 97—111 (1952).

Um die rotationssymmetrische, laminare Grenzschichtströmung an einer ebenen, unendlich ausgedehnten, um ihre Normale (z) mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden und normal angeströmten Scheibe zu berechnen, leiten Verf. aus den in Zylinderkoordinaten z, r, φ hingeschriebenen Navier-Stokesschen Gleichungen zwei Impulsgleichungen (für die radiale und die azimutale Richtung) her. Entsprechend den bekannten Spezialfällen der nicht-rotierenden und der nicht angeströmten Scheibe wird für die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w in radialer, azimutaler und axialer Richtung der Ansatz $u = r f(z), v = r g(z), w = h(z)$ gemacht, wobei außerhalb der Grenzschicht die „Staupunktströmung“ $U = ar, V = 0, W = -2az$ (a konstant) herrschen soll. Die Funktionen f bzw. g werden als Polynome n -ten bzw. $(n-1)$ -ten Grades in $t = z/\delta$ (δ = Grenzschichtdicke) angesetzt mit $n = 4$ für die erste, $n = 5$ für die zweite Näherung. Einsetzen in die Impulsgleichungen und Randbedingungen liefert eine bi-quadratische Gleichung für δ^2 , aus der δ und dann alle andern interessierenden Größen (z. B. u, v, w , Wandschubspannungen und Drehmoment) in Abhängigkeit von a, ω und der kinematischen Zähigkeit berechnet werden können. Zwecks praktischer Verwertung der Ergebnisse für eine mit W_∞ angeströmte Kreisscheibe vom Radius R ist $a = 2W_\infty/R\pi$ zu setzen, damit die Normalgeschwindigkeitsgradienten für die endliche und die unendliche Scheibe im Staupunkt übereinstimmen. Die in zahlreichen Tafeln und Schaubildern wiedergegebenen Resultate zeigen eine starke Abhängigkeit von a/ω , insbesondere nimmt mit wachsender Anströmungsgeschwindigkeit bei fester Drehzahl das Drehmoment stark zu. *J. Weissinger.*

Quick, August Wilhelm und Kurt Schröder: Verhalten der laminaren Grenzschicht bei periodisch schwankendem Druckverlauf. Math. Nachr. 8, 217—238 (1952).

An eine längs angeströmte ebene Platte der Tiefe L schließt stromabwärts eine periodisch gewellte Platte an. Die von der Anschlußstelle stromabwärts durch die als sinusförmig angesetzten Schwankungen der äußeren Geschwindigkeit beeinflusste laminare Grenzschicht wird für vier Zahlenbeispiele (4 verschiedene relative Schwankungsamplituden, 2 verschiedene auf die Tiefe L bezogene Wellenlängen) numerisch in umfangreichen Rechnungen verfolgt. Benutzt wird hierbei das Differenzen-Verfahren des zweitgenannten Verf. (dies. Zbl. 42, 429). Die Ergebnisse werden sehr ausführlich diskutiert und in zahlreichen Diagrammen veranschaulicht. Es wird die Vermutung ausgesprochen, daß jede noch so schwache Wellung schließlich, hinreichend weit stromabwärts numerisch verfolgt, zur Ablösung der Grenzschicht führen wird. Auf die Bedeutung der Ergebnisse für die Frage des laminar-turbulenten Umschlags wird eingegangen. *H. Görtler.*

Truckenbrodt, E.: An approximate method for the calculation of the laminar and turbulent boundary-layer by simple quadrature for two-dimensional and axially symmetric flow. J. aeronaut. Sci. 19, 428—429 (1952).

Truckenbrodt, E.: Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung. Ingenieur-Arch. 20, 211—228 (1952).

Laminare und turbulente Grenzschicht werden nach einheitlichem Gesichtspunkt behandelt und 2 Quadraturformeln für die Berechnung der Grenzschicht-

größen angegeben. Diese Formeln stellen eine wesentliche Erleichterung gegenüber den bisherigen Berechnungsverfahren dar; Ableitungen der Geschwindigkeit und der Körperradius brauchen nicht bekannt zu sein. Die Behandlung des laminaren und des turbulenten Falles unterscheiden sich nur dadurch voneinander, daß für 2 Zahlengrößen verschiedene Werte einzusetzen sind. Die bei der Herleitung der Formeln notwendigen Vereinfachungen werden sich in der Regel quantitativ nicht stark auswirken, so daß das Verfahren sehr brauchbar ist, solange nicht auf besonders große Genauigkeit Wert gelegt wird. An zwei Beispielen wird die Übereinstimmung des Verfahrens mit Methoden anderer Autoren und Meßergebnissen geprüft.

J. Rotta.

Rotta, J.: Ein neues Verfahren zur Berechnung turbulenter Grenzschichten. Z. angew. Math. Mech. **32**, 273—274 (1952).

Le, Nguyen Van: The von Kármán integral method as applied to a turbulent boundary layer. J. aeronaut. Sci. **19**, 647—648 (1952).

Rotta, J.: Schubspannungsverteilung und Energiedissipation bei turbulenten Grenzschichten. Ingenieur-Arch. **20**, 195—207 (1952).

Verf. versucht (im Fall stationärer zweidimensionaler Grenzschichten in inkompressiblen Medien) den Zusammenhang zwischen der Dissipationsfunktion und der Form des Geschwindigkeitsprofils auf theoretischem Wege zu klären. Dabei wird angenommen, daß sich das Geschwindigkeitsprofil (außer in Wandnähe) als einparametrische Kurvenschar darstellen läßt und jedem Geschwindigkeitsprofil bestimmte Verteilungen der turbulenten Schwankungsgeschwindigkeit entsprechen. Durch Einführung eines geeigneten Näherungsansatzes für die Schubspannungsverteilung gelingt die Berechnung des Dissipationsintegrals bis auf eine empirische Konstante. Den Fortschritt seiner Methode erblickt Verf. darin, daß jetzt Quadraturen an die Stelle von Differentiationen treten.

V. Garten.

Wuest, Walter: Grenzschichten an zylindrischen Körpern mit nichtstationärer Querbewegung. Z. angew. Math. Mech. **32**, 172—178 (1952).

Unter den dreidimensionalen (laminaren, inkompressiblen) Grenzschichtströmungen bot der Fall des schräg angeblasenen Zylinders einen besonders bequemen Zugang deswegen, weil hier das sog. „Unabhängigkeitsprinzip“ gilt, wonach die gegenüber dem Falle der senkrechten Anblasung (ebene Strömung) hinzukommende Querkomponente der Geschwindigkeit keinen Einfluß auf die Strömungskomponenten in Ebenen senkrecht zu den Zylindererzeugenden hat, diese also unverändert läßt, mit dem Vorteil, daß zusätzliche Querkomponenten nur nachträglich — obendrein aus einer linearen Differentialgleichung — berechnet zu werden brauchen. Dies gilt auch noch, wenn der Zylinder beschleunigte Bewegungen in Richtung seiner Erzeugenden ausführt. Verf. untersucht für den Fall des senkrecht angeströmten Zylinders bei stationärer Anströmung verschiedene und sehr allgemeine nichtstationäre Querbewegungen des Zylinders und verfolgt diese in Sonderfällen bis zu numerischen Resultaten. Betrachtet werden insbesondere die Staupunktströmung an einer in sich beschleunigten oder auch schwingenden Wand, die Grenzschicht an der längs angeströmten, in sich seitlich beschleunigten Platte sowie die Grenzschicht an einem angeströmten und in Achsenrichtung instationär bewegten Kreiszyylinder. Während die Ansätze allgemein sind, werden auch in den behandelten Sonderfällen die numerischen Auswertungen nur so weit ausgeführt, wie dies für eine erste Orientierung gerechtfertigt erschien.

H. Görtler.

Sestopalov, V. P.: Über eine partielle Lösung für die Wärmegrenzschicht im Diffusor. Priklad. Mat. Mech. **16**, 613—616 (1952) [Russisch].

Batchelor, G. K.: Diffusion in a field of homogeneous turbulence. II. The relative motion of particles. Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 345—362 (1952).

Bei der Diffusion örtlicher Eigenschaften, die in keiner Weise die Flüssigkeitsbewegung dynamisch beeinflussen (auch kleine Temperaturschwankungen rechnen bei Vernachlässigung

der Schwerewirkung näherungsweise hierzu), handelt es sich offenbar nur darum, die statistische Geschichte der Flüssigkeitsteilchen zu verfolgen. Bei einem räumlich homogenen und unendlich ausgedehnten Turbulenzfeld besteht das einfachste Problem dann darin, die „Ortscharakteristiken“ zu bestimmen, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß an einer bestimmten Stelle des Raumes sich vorher etwa durch Farbe gekennzeichnete Flüssigkeitsteilchen befinden. Dieses Problem war Gegenstand einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 36, 256), deren Ergebnisse hier noch einmal zusammengestellt werden. Das hier behandelte nächsthöhere Problem besteht dann darin, die „Formcharakteristiken“ einer Gruppe von Flüssigkeitsteilchen zu beschreiben, also die Dispersion der Teilchen um ihr Massenzentrum zu ermitteln. Als Grundlage hierzu ist die Wahrscheinlichkeit aufzustellen, daß zwei Teilchen mit bekannter Ausgangslage sich zur Zeit t an ganz bestimmten Stellen des Raumes befinden („joint p. d. f. = probability distribution function“), wobei man die Relativediffusion der beiden Teilchen („separation p. d. f.“) von der gemeinsamen Translation („displacement p. d. f.“) absondern kann. Die „separation p. d. f.“ ist übrigens identisch mit der bereits von Richardson (1929) eingeführten „distance-neighbour function“. Verf. macht nun die Hypothese, daß die Translationsbewegung im wesentlichen von den großen, die Relativbewegung von den kleinen Turbulenzelementen herrührt und daß beide Prozesse im statistischen Gleichgewicht unabhängig voneinander verlaufen. Unter der Voraussetzung, daß die Entfernung der beiden Teilchen klein im Verhältnis zum Längenmaßstab der energieenthaltenden Wirbel ist, erhält Verf. für kleine Zeitintervalle die Beziehung, daß sich die „joint p. d. f.“ als Produkt aus der „separation p. d. f.“ und der „displacement p. d. f.“ zusammensetzt. Zum Schluß wird noch die Frage untersucht, ob die Relativediffusion durch eine Differentialgleichung beschrieben werden kann.

W. Wuest.

Batchelor, G. K.: The effect of homogeneous turbulence on material lines and surfaces. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 213, 349—366 (1952).

Eine materielle Linie (d. i. eine Linie, die dauernd von den gleichen Flüssigkeitsteilchen gebildet wird) erfährt im statistischen Mittel durch die konvektive Wirkung der Turbulenzbewegung eine Zunahme ihrer Länge. Ebenso wächst auch eine materielle Fläche (d. i. eine Fläche, die dauernd aus dem gleichen Flüssigkeitsteilchen besteht) im Mittel zeitlich an. Auf Grund des Erhaltungsgesetzes der Flüssigkeitsmasse nimmt der senkrechte Abstand zweier materieller Flächen mit der Zeit ab. Die zeitlichen Änderungen der genannten Größen folgen nach hinreichend langer Zeit Exponentialgesetzen, die untereinander im einfachen Zusammenhang stehen. — Diese Ergebnisse werden dazu benutzt, die Einwirkung der Turbulenz auf die Verteilung zweier Arten von Stoffeigenschaften, nämlich einer skalaren Quantität, dargestellt durch θ , deren Gesamtbetrag in einem materiellen Flüssigkeitsvolumen konstant bleibt (z. B. Massendichte einer fremden Substanz) und einer Quantität, die durch einen Vektor \mathfrak{F} dargestellt wird, deren Fluß durch eine materielle Fläche konstant bleibt (z. B. Wirbelfluß) zu untersuchen. Danach ist \mathfrak{F} jederzeit proportional dem Vektor eines materiellen Linienelementes; der Gradient von θ ist proportional dem Vektor eines materiellen Flächenelementes. Beide Größen wachsen also exponentiell. — In weiteren Abschnitten wird der kombinierte Einfluß der Konvektion und der molekularen Diffusion untersucht.

J. Rotta.

Corrsin, Stanley: Heat transfer in isotropic turbulence. J. appl. Phys. 23, 113—118 (1952).

Es gibt bisher noch keine statistische Theorie der turbulenten Wärmeübertragung, wohl hauptsächlich deswegen, weil der Wärmeübergang vorwiegend in turbulenten Reibungsschichten vor sich geht, die einer statistischen Theorie ohnehin kaum zugänglich sind. Man kann sich immerhin ein erheblich idealisiertes Modellbild des Vorganges machen, wenn man eine stationäre homogene Wärmeübertragung in einem Feld isotroper nicht abklingender Turbulenz annimmt, wobei im ganzen Feld der Temperaturgradient dT/dy als konstant und so klein vorausgesetzt wird, daß die Dichte als konstant angesehen werden darf. In der vorliegenden Untersuchung wird zunächst die Lagrangesche Darstellung entsprechend G. I. Taylors Theorie [Proc. London math. Soc., II. Ser. 20, 196—211 (1921)] benutzt. Verf. erhält so für große Zeiten t oder bei Vorhandensein einer mittleren Geschwindigkeit U für sehr große x eine asymptotische Beziehung für den turbulenten Wärmeübergang, die nur vom Geschwindigkeitsfeld abhängt. Dieser asymptotische Endzustand wird dann nach der Eulerschen Darstellung untersucht und in Zusammenhang mit der vorigen Darstellung gebracht. Schließlich wird noch eine vorläufige Beziehung für eine „turbulente Prandtlsche Zahl“ in einer homogenen Scherströmung in Abhängigkeit von den Impuls- und Wärmeübertragungs-Korrelationskoeffizienten abgeleitet.

W. Wuest.

Proudman, I.: The generation of noise by isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **214**, 119—132 (1952).

Es wird der spezielle Fall untersucht, daß sich innerhalb eines mit kompressibler Flüssigkeit gefüllten Raumes ein endliches Gebiet mit festen Grenzen in turbulenter Bewegung befindet. Das hierbei erzeugte und in die Umgebung abgestrahlte Geräusch wird untersucht. Es wird vorausgesetzt, daß die Reynoldszahl der Turbulenz groß und die Mach-Zahl klein ist. Das Geräusch wird im wesentlichen von solchen Turbulenzelementen erzeugt, deren Beitrag zur Energiedissipation infolge der Zähigkeit vernachlässigbar ist. Die je Masseneinheit in Geräusch umgesetzte Leistung ist der Energiedissipation proportional und wächst mit der 5. Potenz der Machzahl. Eine quantitative Abschätzung wird unter Benutzung des Heisenbergsehen Ähnlichkeitsspektrums für isotrope Turbulenz durchgeführt. *J. Rotta.*

Frenkiel, François N.: On the statistical theory of turbulent diffusion. Proc. nat. Acad. Sci. USA **38**, 509—515 (1952).

Die hauptsächlich von G. I. Taylor angegebenen Beziehungen für turbulente Diffusion von Teilchen, die sich von einer kontinuierlichen punktförmigen Quelle ausbreiten, werden auf den Fall erweitert, daß die turbulenten Geschwindigkeitschwankungen nicht klein gegen die mittlere Geschwindigkeit sind. Das Turbulenzfeld wird als homogen und isotrop vorausgesetzt. Die beiden Grenzfälle sehr kleiner und sehr großer Abstände von der Quelle werden behandelt. *J. Rotta.*

Bass, Jean: Les équations générales des corrélations spatio-temporelles dans un fluide turbulent. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 806—808 (1952).

Verf. betrachtet den turbulenten Ausfluß einer inkompressiblen Flüssigkeit mit der Gesamtgeschwindigkeit (U, O, O) . Er bezeichnet die Turbulenz als homogen, wenn die für zwei Punkte x_α, x'_α und zwei Zeiten t, t' genommenen Mittelwerte allein Funktionen der Größen $x'_\alpha - x_\alpha = \xi_\alpha, t, t'$ darstellen, als stationär, wenn sie Funktionen von $t' - t = \tau, x_\alpha, x'_\alpha$ sind. Nach Einführung der räumlichen und zeitlichen Korrelationen zur Untersuchung homogener und stationärer Turbulenz wird die Isotropie der Turbulenz in bezug auf ein mit der Flüssigkeit mitgeführtes Achsensystem erklärt und es werden die Differentialgleichungen für die zwei- und dreifachen raumzeitlichen Korrelationen aufgestellt. *V. Garten.*

Bass, Jean: La structure locale des corrélations spatio-temporelles dans un fluide turbulent. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1033—1034 (1952).

Es wird die lokale Lösung der fundamentalen Differentialgleichungen für die zwei- und dreifachen raumzeitlichen Korrelationen untersucht. Die Flüssigkeit wird als unzusammendrückbar und die Turbulenz als homogen und isotrop und zunächst als stationär vorausgesetzt. Lösungen existieren nur, wenn die Reibung vernachlässigt werden kann. Verzichtet man auf den stationären Charakter, so ergeben sich, jetzt ohne Einschränkungen, Lösungen von entsprechender Form. Kann der Einfluß der Reibung jedoch nicht mehr vernachlässigt werden, so wird die Turbulenz mit der Zeit immer schwächer. *V. Garten.*

Bass, Jean: Sur un type d'écoulement turbulent non homogène. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2256—2257 (1952).

Es handelt sich um den turbulenten Ausfluß einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit. Die Turbulenz wird (zeitlich) stationär, in einer Richtung λ unhomogen, dagegen in jeder zu λ senkrechten Ebene homogen angenommen und besitzt um die Richtung λ als Achse Drehsymmetrie. Verf. untersucht die allgemeine Struktur und die lokale Form der raumzeitlichen Korrelationen in dieser Strömung, die ein verallgemeinertes Turbulenzmodell der von G. K. Batchelor [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **186**, 480—502 (1946)] untersuchten achsensymmetrischen Turbulenz darstellt. *V. Garten.*

Moyal, J. E.: The spectra of turbulence in a compressible fluid; Eddy turbulence and random noise. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 329—344 (1952).

Die turbulente Bewegung in einem kompressiblen Gas setzt sich aus der eigentlichen Turbulenz („eddy turbulence“) und dem durch fluktuierende Schallwellen hervorgerufenen Rauschen („random noise“) zusammen. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, wie das Geschwindigkeitsspektrum in einem Feld homogener Turbulenz in diese beiden Komponenten zerlegt werden kann und daß diese nur durch die nichtlinearen Trägheitsglieder in den Bewegungsgleichungen miteinander verknüpft sind. Die gegenseitige Wirkung ist bei hohem Turbulenzgrad und großen Reynoldsschen Zahlen am größten, während die beiden Prozesse bei niedrigem Turbulenzgrad und kleinen Reynoldszahlen nahezu unabhängig voneinander verlaufen. Während sich das Rauschen als akustische Wellen mit Schallgeschwindigkeit fortpflanzt, ist der Wellencharakter der eigentlichen Turbulenz nur durch die mittlere Bewegung des Gases bedingt. Die Messung der Rauschkomponente, ihre Schwächung durch die Absorption der Wände in Windkanälen und ihre Wirkung auf die eigentliche Turbulenz werden diskutiert. Verf. ist der Meinung, daß die experimentelle Untersuchung der kompressiblen Effekte von Korrelations- und Spektralanalysatoren Hitzdrahtverstärker mit wesentlich höherer Frequenzgrenze als bisher üblich erfordert. *W. Wuest.*

Kolmogorov, A. N.: Zur Frage nach dem Widerstand und dem Geschwindigkeitsprofil bei turbulenter Strömung in Röhren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 38, 29—30 (1952) [Russisch].

Prim, 3rd, R. C.: Steady rotational flow of ideal gases. J. rat. Mech. Analysis 1, 425—497 (1952).

Der vorliegende Bericht gibt einen zusammenfassenden Überblick über stationäre wirbelbehaftete Gasströmungen bei Vernachlässigung der Zähigkeit und Wärmeleitung. Vor allem sollen dabei allgemeine Eigenschaften solcher Strömungen und exakte Lösungen untersucht werden. Fortschritte auf diesem Sondergebiet sind in einer Reihe vorangehender Arbeiten des Verf. besonders durch die Entdeckung des Substitutionsprinzips und der kanonischen Bewegungsgleichungen erzielt worden, die in Kap. II erneut eingehend dargestellt werden. In idealen Gasen kann eine Wirbelströmung nur durch den Durchgang einer gekrümmten Stoßfront verursacht werden. Die an sich bekannten Beziehungen, die sich hierfür ergeben, werden daher eingehend untersucht. Die folgenden Kap. III, IV und V sind Anwendungen der vorher entwickelten Gesetzmäßigkeiten auf ebene, axial-symmetrische und dreidimensionale Strömungsprobleme gewidmet. Für den Fall ebener Strömungsprobleme wird der Nachweis geführt, daß für Gase mit der vorausgesetzten Zustandsgleichung nur bei der zum Potentialwirbel analogen Strömung auf konzentrischen Kreisen die Strömungsgeschwindigkeit längs einer Stromlinie konstant ist. Ferner ist die Quellströmung einschließlich des Grenzfalles der Parallelströmung die einzige Strömungsform mit geraden Stromlinien. Die bisher genannten Strömungsformen sind auch die einzigen mit isometrischem Stromliniennetz. Ein breiter Raum ist der auf Wirbelströmungen erweiterten Prandtl-Meyer-Strömung um die Ecke gewidmet. Im Gegensatz zur einzigen wirbelfreien Lösung erhält man hier eine zweiparametrische Lösungsschar. Es ergeben sich dabei 7 qualitativ verschiedene Lösungstypen, von denen berechnete Beispiele bildlich dargestellt und deren Grenzen in Abhängigkeit von den beiden Parametern untersucht werden. Weitere Lösungsklassen ergeben sich ferner für reduzierte Geschwindigkeitsfelder von der Form $W = i u(y) + j v_1(x) v_2(y)$. Hierzu gehörige Lösungen sind bereits in einer russischen Arbeit von I. Kiebel (1946) untersucht worden. Kap. III wird abgeschlossen durch eine Erweiterung des Croccoschen Wirbelsatzes auf Strömungsfelder mit ungleichförmiger Ruheenthalpie. Unter den axialsymmetrischen Strömungen werden in Kap. IV u. a. solche untersucht, deren reduziertes Geschwindigkeitsfeld nur vom Radius abhängt. Als einfacher Sonderfall ergibt sich dabei die Überlagerung einer Quelllinienströmung mit einer gleichförmigen Strömung in Richtung der Quelllinie. Der Croccosche Wirbelsatz für axialsymmetrische Strömungen wird auf nicht-isoenergetische Strömungen ausgedehnt. H. Poritsky gewinnt eine bestimmte Klasse von dreidimensionalen Gasströmungen dadurch, daß er einer ebenen Strömung eine gleichförmige Strömung in der dritten Koordinatenrichtung überlagert. Verf. erweitert in Kap. V dieses Überlagerungsprinzip durch Anwendung des Substitutionsprinzips. Dabei ergeben sich Strömungsfelder, bei denen die Geschwindigkeit in der dritten Koordinatenrichtung von Ort zu Ort wechselt. Die von Hamel (1937) entdeckten Potentialströmungen mit konstanter Geschwindigkeit werden auf Wirbelströmungen erweitert. Eine weitere Klasse von exakten Lösungen ergibt sich durch die Annahme, daß in einem allgemeinen zylindrischen Koordinatensystem, dessen Schnittebenen

ein isometrisches Netz bilden, alle drei Geschwindigkeitskomponenten nur von einer der beiden isometrischen Koordinaten abhängen. Bei all diesen Fortschritten darf man nicht übersehen, daß die praktischen Anwendungsmöglichkeiten vorläufig nur gering sind, da gekrümmte Stoßfronten selten gerade so beschaffen sein werden, daß sich hinter ihnen exakte Lösungen ergeben.

W. Wuest.

Cabannes, Henri: *Contribution à l'étude théorique des fluides compressibles.*

Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 69, 1—63 (1952).

Die Arbeit umfaßt ausschließlich schallnahe Strömungen ohne und mit Stoß. Sie bedarf mit Rücksicht auf Inhalt und Umfang einer eingehenden Besprechung. Im ersten Kapitel werden stetige Strömungen behandelt. Eine neue Lösung der gasdynamischen Gleichung enthält als Spezialfälle die Lösungen von Tschapligin, Tollmien und Ringleb. — Mit Hilfe von Stromlinienkoordinaten, durch Linearisierung einer Geschwindigkeitsfunktion und Übergang in den Hodographen wird die Tricomi-Gleichung (auf zwei unterschiedlichen Wegen) gewonnen. Die erwähnte Linearisierung kann als modifiziertes Kompressibilitätsgesetz für Schallnähe gedeutet werden. Als praktisches Resultat ergibt sich dabei eine ebene beschleunigte Lavaldüsenströmung. Bei diesem Abschnitt wäre die Arbeit von H. Behrbohm (dies. Zbl. 36, 118) zu zitieren gewesen, die im wesentlichen alle diese Resultate vorwegnimmt. Die Linearisierung der Geschwindigkeitsfunktion wird bei größeren Abweichungen vom Schall sehr schlecht, wodurch die Vorteile dieser Vereinfachung beschränkt sind. Auch hier wird eine Verallgemeinerung gegeben. — Im zweiten Kapitel werden Stöße studiert bei Beibehalten der Potentialströmung. Eine Tollmiensche Spiralströmung kann durch Stoß in eine analoge übergeführt werden. Das dritte Kapitel umfaßt lokale Unterschallgebiete vor Körpern bei 3 Dimensionen. Die Zustandsgrößen werden als Potenzreihen in y und z mit unbekannten Funktionen von x als Koeffizienten entwickelt. Mit diesen Ansätzen werden die Randbedingungen an der Stoßfront und am Körper verknüpft. Es leuchtet ein, daß eine solche Methode vor allem bei den kleinen Unterschallgebieten (Anströmung mit hoher Mach-Zahl) Aussicht auf gute Ergebnisse hat. Für die Gebiete werden auch Beispiele an Rotationskörpern gegeben. In einer zweiten Methode wird die Unterschallströmung als inkompressibel angenommen. — Im vierten Kapitel wird die anliegende ebene Kopfwelle behandelt. Hier sind wohl die unabhängig vom Verf. gewonnenen Resultate von T. Y. Thomas zitiert, nicht aber die älteren deutschen Arbeiten (H. Richter, dies. Zbl. 35, 420, M. Schäfer, Göttinger Monographie C 41 (1946)], mit den bekannten Zusammenhängen von Wandkrümmung und Stoßkrümmung. Abschließend wird noch auf das rotationssymmetrische Gegenstück eingegangen und auf seine besonderen Schwierigkeiten unter Erwähnung neuerer Arbeiten des Verf. hingewiesen. Auch das im letzten Kapitel behandelte Abklingen der Kopfwelle in großer Entfernung ist in einer, dem Verf. offenbar unbekannten Arbeit vom Ref. schon längere Zeit veröffentlicht. (K. Oswatitsch, dies. Zbl. 40, 412.)

K. Oswatitsch.

Pai, S. I.: *Axially symmetrical jet mixing of a compressible fluid.* Quart. appl. Math. 10, 141—148 (1952).

Verf. behandelt den axial-symmetrischen Strahl einer kompressiblen Flüssigkeit, der in eine gleichförmige Strömung mündet. Zunächst wird der laminare Fall unter Annahme einer Prandtl-Zahl von 1 untersucht. Durch Linearisierung der Bewegungsgleichung wird eine Näherungslösung gewonnen und ferner die exakte Lösung berechnet. Beim Vergleich der letzteren mit der Näherungslösung zeigt sich bei einem heißen Strahl ein stärkerer Abfall der Geschwindigkeit auf der Strahlachse. — Der Bearbeitung des turbulenten Strahles wird die Taylorsche Wirbeltransporttheorie zugrunde gelegt. Unter der Annahme, daß die Austauschgröße über den Strahlquerschnitt konstant ist, und sich in Achsrichtung nach einem Potenzgesetz ändert, kann die Lösung des turbulenten Falles nach Einführung neuer Variabler auf die des laminaren zurückgeführt werden.

J. Rotta.

Sauer, Robert: *Unterschallströmungen um Profile bei quadratisch approximierter Adiabate.* S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1951, 65—71 (1952).

Die Bergmannsche Methode der Integraloperatoren führt im Falle einer Linearapproximation der $p, 1/\rho$ -Beziehung zum bekannten v. Kármán-Tsien-Verfahren, bei welchem eine kompressible Unterschallströmung mit der Tschapligin-Transformation auf eine inkompressible Strömung zurückgeführt wird. Hier wird nun gezeigt, daß eine gleich einfache Abbildung auf das Inkompressible auch noch bei quadratischer Näherung der $p, 1/\rho$ -Beziehung möglich ist und zwar sowohl mit der Molenbroek- als auch mit der Legendre-Transformation. Dabei bleibt man aller-

dings stets im Elliptischen und kommt nicht über die kritische Geschwindigkeit hinaus.

K. Oswatitsch.

Wu, Chung-Hua and Curtis A. Brown: A theory of the direct and inverse problems of compressible flow past cascade of arbitrary airfoils. *J. aeronaut. Sci.* 19, 183—196 (1952).

Zur Berechnung der ebenen, stationären, reibungslosen, isentropischen Strömung durch ein Flügelgitter wird zunächst ein einfaches, schnelles Näherungsverfahren beschrieben, das — besonders für dicke Profile — überraschend genaue Resultate liefert. Exakte Lösungen zeigen, daß die mittlere Stromlinie im Kanal zwischen zwei aufeinanderfolgenden Profilen nahezu mit der geometrischen Mittellinie des Kanals zusammenfällt, und daß der spezifische Massenfluß ρW_z (W_z = Geschwindigkeit senkrecht zum Gitter) auf ihr ziemlich genau umgekehrt proportional zur örtlichen Kanalbreite ist. Aus ρW_z kann man mittels der gasdynamischen Gleichungen die Größen ρ , W_z und W_y (y senkrecht zu z) und ihre Ableitungen beliebiger Ordnung nach y auf der mittleren Stromlinie berechnen und daraus mittels Taylorentwicklung nach y die Strömung auch außerhalb der mittleren Stromlinie gewinnen. Dieses Strömungsfeld liefert zusammen mit dem vorgegebenen gesamten Massenfluß eine Profilkontur, die beim direkten Problem durch iterative Abänderung der mittleren Stromlinie und des spezifischen Massenflusses auf ihr in Übereinstimmung mit der gegebenen Kontur gebracht wird. — Für höhere Genauigkeitsansprüche wird vorgeschlagen, die Stromfunktion nach einem Differenzenverfahren höherer Ordnung zu berechnen, wobei die obige Näherung als Ausgangslösung benutzt werden kann. Zur Lösung des linearen Gleichungssystems wird das Verfahren von Gauß-Banachiewicz benutzt, wenn zahlreiche Strömungsfelder für dasselbe Gitter benötigt werden, sonst die Relaxationsmethode. — Einige bis in Einzelheiten durchgeführte Beispiele illustrieren das Gesagte. Die Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen ist gut.

J. Weissinger.

Alden, Henry L. and Leon H. Schindel: The lift, rolling moment, and pitching moment on wings in nonuniform supersonic flow. *J. aeronaut. Sci.* 19, 7—14 (1952).

Für einen ebenen Flügel mit Überschall-Vorder- und Hinterkante in einer Strömung, deren Normalkomponente $w(y)$ längs der Spannweite variiert (z. B. im Abwindfeld genügend weit hinter einem andern Flügel), läßt sich der Gesamtauftrieb im Rahmen der linearen Theorie schreiben als $\int_{-b/2}^{b/2} F(y) w(y) dy$. Die Einflußfunktion $F(y)$ ist gleich der Auftriebsverteilung desselben Flügelgrundrisses mit konstantem Anstellwinkel in der umgekehrten Strömung (reverse flow). Analog lassen sich Roll- und Kippmoment des Flügels durch Einflußfunktionen ausdrücken, die gleich der Auftriebsverteilung des rollenden bzw. kippenden Flügels in der umgekehrten Strömung sind. Für die drei Einflußfunktionen des allgemeinen Trapezflügels werden explizite Formeln angegeben. Der (hier nicht betrachtete) Dicken-einfluß läßt sich unabhängig erfassen.

J. Weissinger.

Flax, A. H.: General reverse flow and variational theorems in lifting-surface theory. *J. aeronaut. Sci.* 19, 361—374 (1952).

Gegeben sei eine tragende Fläche mit dem Grundriß F in der xy -Ebene und der Anstellwinkelverteilung $w(x, y)$, die in Richtung der positiven x -Achse mit der Geschwindigkeit U angeströmt wird. Dann bestimmt sich die Zirkulationsverteilung $\gamma(x, y)$ auf F unter den üblichen Linearisierungen als einzige, der Kuttaschen Hinter- (bzw. auch Seiten-) Kantenbedingung genügende Lösung der Gleichung $w = \mathfrak{K} \gamma$, in der \mathfrak{K} einen linearen Integrodifferentialoperator bedeutet, der für den Fall inkompressibler und kompressibler Unter- und Überschallströmung bekannt ist. Verf. zeigt, daß die Zirkulationsverteilung $\gamma(x, y)$ einer Umkehrströmung (reverse flow), bei der also ein Flügel gleichen Grundrisses aber u. U. anderer Anstellwinkelverteilung $\bar{w}(x, y)$ mit U in Richtung der negativen x -Achse angeströmt wird, sich entsprechend aus $\bar{w} = \mathfrak{K} \bar{\gamma}$ bestimmt, wobei \mathfrak{K} der adjungierte Operator zu \mathfrak{K} ist, so daß dann $\int_F w \gamma dx dy = \int_F w \bar{\gamma} dx dy$ gilt. Mittels dieser Gleichung lassen sich viele wichtige Beziehungen zwischen den Charakteristiken (Auftrieb, Widerstand und Momente) einer Strömung und einer Umkehrströmung einheitlich herleiten und überdies „Einflußfunktionen“ zur unmittelbaren Berechnung dieser

Charakteristiken aus $w(x, y)$ gewinnen, insbesondere für den Grenzfall unendlicher Flügelstreckung λ die Munkschen Formeln der ebenen Theorie für Auftrieb und Moment. Ferner sind bei gegebenen w, w die Verteilungen γ, γ Lösungen des Variationsproblems

$$\delta \left\{ \int_{\bar{F}} [w\gamma + w\bar{\gamma}] dx dy - \int_{\bar{F}} \bar{\gamma} \int_{\bar{F}} \Re \gamma d\bar{z} d\eta dx dy \right\} = 0.$$

Hieraus lassen sich die Theorien von Prandtl, Weissinger, Reissner (für großes λ) und von Lawrence (für kleines λ) sowie numerische Lösungsverfahren wie das Lotzsche nach einem einheitlichen Prinzip ableiten. *J. Weissinger.*

Oswald, Telford W.: The effect of nonlinear aerodynamic characteristics on the dynamic response to a sudden change in angle of attack. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 302—316 (1952).

Die „klassische“ linearisierte Theorie des Einflusses kleiner Störungen auf den stationären Flug ist im Unterschallbereich auch für endliche Störungen noch gut brauchbar, versagt dagegen bei hohen Geschwindigkeiten für Störungen endlicher Amplitude. Dieses Versagen hängt zum Teil auch damit zusammen, daß bei hohen Geschwindigkeiten Flügel sehr kleiner Streckung oder gar geschoßartige Flugkörper verwendet werden und somit die nichtlinearen Interferenzeinflüsse stärker hervortreten. In der vorliegenden Arbeit wird daher der Einfluß einer nichtlinearen Änderung des Auftriebs und des Längsmomentes mit dem Anstellwinkel untersucht. Das Problem führt auf eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die exakt nur numerisch zu lösen ist. Verf. gibt außerdem ein Näherungsverfahren an, das darauf beruht, daß die ursprüngliche Differentialgleichung abschnittsweise durch eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ersetzt wird, wobei die Koeffizienten von Abschnitt zu Abschnitt wechseln. Sieben durchgerechnete repräsentative Beispiele zeigen gute Übereinstimmung zwischen der numerischen Lösung und der Näherungslösung, dagegen große Abweichungen von der linearisierten Theorie. Der Einfluß einer nichtlinearen Momentenkurve für die Auswertung von Flugversuchen hinsichtlich der Stabilitätskenngrößen wird an Hand dieser Beispiele erörtert. *W. Wuest.*

Manwell, A. R.: A note on the hodograph transformation. *Quart. appl. Math.* **10**, 177—184 (1952).

Hermann, Rudolf: Diffuser efficiency of free-jet supersonic wind tunnels at variable test chamber pressure. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 375—384 (1952).

Carrière, Pierre: Nouvelle conception du tracé des tuyères supersoniques pour souffleries. *C. r. Acad. Sci., Paris* **235**, 697—698 (1952).

Goodman, Theodore R.: The quarter-infinite wing oscillating at supersonic speeds. *Quart. appl. Math.* **10**, 189—192 (1952).

Klunker, E. B. and Keith C. Harder: Comments on „Supersonic flow of a two-dimensional jet“. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 427—428 (1952).

Fuller, Frederic E.: Computation of Possio's integral for linearized supersonic flow. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 640—642 (1952).

Dugundji, John: A Nyquist approach to flutter. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 422—423 (1952).

Geršuni, G. Z.: Über die freie Wärmekonvektion im Raume zwischen vertikalen koaxialen Zylindern. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **86**, 697—698 (1952) [Russisch].

Ludloff, H. F. and M. B. Friedman: Diffraction of blasts by axisymmetric bodies. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 425—426 (1952).

Packham, B. A.: The theory of symmetrical gravity waves of finite amplitude. II. The solitary wave. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **213**, 238—249 (1952).

Die Einzelwelle (Solitary wave) in einem Kanal hat bei Linearisierung der Randbedingungen an der freien Oberfläche nur eine triviale Lösung. Wenn man

die Randbedingungen jedoch durch die von Davies (dies. Zbl. 44, 199) benutzte nichtlineare Randbedingung ersetzt, kann man als erste Näherung eine Wellenform bestimmen, die ähnlich der Stokesschen Lösung am Kamm die Form eines Keiles mit 120° Öffnungswinkel besitzt.

J. Pretsch.

Elektrodynamik. Optik:

Jouvet, Bernard: Les fondements d'un nouvel électromagnétisme. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 819—822 (1952).

Donder, Th. de: Sur les équations électromagnétiques de Maxwell. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 693—694 (1952).

Ledinegg, E. und P. Urban: Zum ersten Randwertproblem der Maxwellschen Gleichungen. Ann. der Physik, VI. F. 10, 349—360 (1952).

Die Verf. beschäftigen sich mit dem Problem, ein schwingungsfähiges elektromagnetisches System von außen anzuregen durch Koppel- oder Anregungsflächen, welche zur Hüllfläche des Systems gehören und welche den Energiefluß vom Generator zum betrachteten System ermöglichen. Als erstes Randwertproblem betrachteten Verf. die Vektor-Schwingungsgleichung, deren Komponenten auf der Randfläche bestimmte Werte annehmen sollen. Sie beweisen zunächst die Existenz der Lösung und befassen sich dann mit der Konstruktion derselben. Die Randwertbestimmung wird auf die Auflösung einer Integralgleichung der Flächenstromdichte zurückgeführt. Durch mengentheoretische Überlegungen gelingt es, die erste Randwertaufgabe in koordinatenfreier Form zu formulieren.

M. J. O. Strutt.

Hinteregger, H.: Ein elektrisches Modell zum Verständnis der sogenannten Lorentzkraft. Acta phys. Austr. 5, 398—403 (1952).

Aspdén, Harold: Eddy-currents in solid cylindrical cores having non-uniform permeability. J. appl. Phys. 23, 523—528 (1952).

Colombani, Antoine et Marcel Gourceaux: Sur la résistance apparente en haute fréquence d'une couche conductrice de largeur finie parallèle à un plan conducteur indéfini. Champ antagoniste et courants induits. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 605—608 (1952).

Gourceaux, Marcel et Antoine Colombani: Sur les courants induits produits dans une plaque conductrice de grande largeur par une nappe plane de faible largeur parcourue par un courant de haute fréquence. Formules approchées donnant les variations de résistance et de self de l'inducteur. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 650—652 (1952).

Ashour, A. A.: The induction of electric currents in a uniformly conducting circular disk by the sudden creation of magnetic poles. Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 379—384 (1952).

Haacke, Wolfhart: Über die freien Schwingungen in n -fachen Netzwerken mit pulsierenden Parametern. Arch. elektr. Übertragungen 6, 114—119 (1952).

1. Verf. untersucht bei einem System von n ungedämpften Schwingungskreisen mit konstanten Induktivitäten, deren sämtliche Kapazitäten (diejenigen, C_{kk} , der einzelnen Kreise „Maschen“ — sowohl wie die Kopplungskondensatoren $C_{ik} = C_{ki}$) nach dem selben analytischen Gesetz periodisch schwanken, $C_{ik}/[1 + \tau h(\alpha t)]$, $h(\alpha t) = h(\alpha t + 2\pi)$, $0 < \tau \leq 1$, die freien Schwingungen, d. h.: ein System von n homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Ladungen q_k der C_{kk} mit konstanten Gliedern zweiter Ordnung, ohne Glieder erster Ordnung und mit periodisch (siehe oben) schwankenden Gliedern nullter Ordnung. Durch eine Transformation gelangt Verf. auf ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem

$$(1) \quad \ddot{x}_\nu + \lambda_\nu^2 [1 + \tau h(\alpha t)] x_\nu = 0, \quad \nu = 1, \dots, n; \quad \lambda_\nu^2 > 0,$$

wo die x_ν lineare Kombinationen der q_k sind und die λ_ν die Größenordnung hoher Kreisfrequenzen haben, so daß in der Praxis immer $\alpha < \lambda_\nu$, meist $\alpha \ll \lambda_\nu$ sei, also $\alpha \tau / \lambda_\nu < 1$ vorausgesetzt werden kann. Auf das gleiche System (1) werden, für solche Parameter, bei denen sämtliche n Differentialgleichungen (1) nur beschränkte Lösungen besitzen, unmittelbar die Ergebnisse von Erdélyi (dies. Zbl. 8, 393) angewendet. Bedingungen für das Auftreten der stabilen Lösungen

werden angegeben. Es zeigt sich, daß zwischen breiten stabilen Bereichen nur sehr schmale instabile Bereiche liegen. Bei instabilen Lösungen treten „Zieheffekte“ auf. Aus den Lösungen der Hilfsvariablen x_v werden die gesuchten Ladungen q_k zusammengesetzt. Der Einfluß etwa vorhandener Ohmscher Widerstände wird „qualitativ“ berücksichtigt. Die Ladungen q_k führen gedämpfte Schwingungen mit einer von der Schwingungsfrequenz abhängigen zeitveränderlichen Amplitude aus. — 2. Durch eine andere Entkopplungstransformation als die unter 1 erwähnte gelangt Verf. „angenähert“ auf ein formal gleiches Differentialgleichungssystem wie unter 1, wenn er bei festen Kapazitäten C_{ik} und bei — im gleichen Maße — periodisch schwankenden Induktivitäten L_{ik} die Ströme i_k in den einzelnen Schwingungskreisen berechnet.

O. Emersleben.

Zadeh, Lotfi A. and Kenneth S. Miller: Generalized ideal filters. J. appl. Phys. 23, 223—228 (1952).

Die Verf. identifizieren ein elektrisches Filter mit einer Transformation $v = Nu$ des Eingangssignales $u(t)$ in das Ausgangssignal $v(t)$; in vielen Fällen ist N als Transformation eines Hilbertschen Raumes aufzufassen. \mathfrak{M} und \mathfrak{N} seien zwei Klassen von Signalen. Ein Filter heißt ideal, wenn für $\mu \in \mathfrak{M}$, $v \in \mathfrak{N}$ stets $N(\mu \mp v) = \mu$ ist. Alle folgenden Aussagen beziehen sich auf lineare N . Ein Filter ist genau dann ideal, wenn die Transformation N idempotent ist. \mathfrak{M} und \mathfrak{N} sind dann disjunkte lineare Mannigfaltigkeiten, die zusammen den Signalraum Σ aufspannen; die Wirkung von N besteht in der Projektion von Σ auf \mathfrak{M} längs \mathfrak{N} . Die Wirkung einiger Zusammenschaltungen idealer Filter wird in dieser Symbolik ausgedrückt. Neben der Operatorschreibweise wird eine Integralschreibweise verwendet. Ist bei einem beliebigen linearen Filter das Eingangssignal $u(t)$ aus Komponenten $k(t, \lambda)$ linear kombiniert: $u(t) = \int_C k(t, \lambda) U(\lambda) d\lambda$,

wobei λ ein i. allg. komplexer Parameter ist und für die Bildung der Spektralfunktion $U(\lambda)$ auch δ -Funktionen zugelassen sind, so kann das Ausgangssignal $v = Nu$ in der Gestalt $v(t) = \int_C K(t, \lambda) U(\lambda) d\lambda$ geschrieben werden, wo $K(t, \lambda)$ nur vom Filter und von $k(t, \lambda)$ abhängt

und seinerseits in der Gestalt $K(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t, \xi) k(\xi, \lambda) d\xi$ geschrieben werden kann. Ein

ideales Filter liegt insbesondere dann vor, wenn es auf dem Integrationsweg C eine Teilmenge A so gibt, daß $K(t, \lambda) = k(t, \lambda)$ für $\lambda \in A$, $K(t, \lambda) = 0$ für $\lambda \notin A$ ist. Ideale Filter lassen sich i. allg. nicht physikalisch realisieren, wohl aber läßt sich oft mit beliebig guter Näherung ein Filter realisieren, das sich bei Vorgabe einer genügend großen Konstante β von einem gewünschten idealen Filter mit dem Ausgangssignal $v(t)$ nur dadurch unterscheidet, daß es das zeitlich verzögerte Ausgangssignal $v(t - \beta)$ liefert. Als Anwendung werden u. a. Bedingungen diskutiert, unter denen ein Signal $\mu(t)$ mittels eines Filters von einem störenden Geräusch $v(t)$ getrennt werden kann.

A. Stöhr.

Cunningham, W. J.: Equivalences for the analysis of circuits with small nonlinearities. J. appl. Phys. 23, 653—657 (1952).

Ergänzt man eine bei einem Widerstand zwischen Spannung und Strom bestehende lineare Beziehung $E = r i$ durch kleine nichtlineare Zusatzglieder:

$$E = r \left[i + \alpha(\beta i^2 + \gamma i^3 + \delta di/dt + \varepsilon \int i dt) \right],$$

so treten bei Anlegen eines sinusförmigen Stromes oder einer sinusförmigen Spannung Zusatzeffekte auf, für die näherungsweise gültige Ersatzschaltbilder mit zusätzlichen Spannungs- oder Stromquellen angegeben werden. Ferner wird der Fall betrachtet, daß dem betreffenden Widerstand ein linear arbeitender Widerstand in Serie oder parallel geschaltet ist. Einige der hergeleiteten Formeln wurden experimentell geprüft.

A. Stöhr.

Puppini, Raffaele: Criterio di equivalenza per reti lineari passivi. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser. 8, 65—73 (1952).

Jones, D. S.: A simplifying technique in the solution of a class of diffraction problems. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 189—196 (1952).

Bei verschiedenen Aufgaben in der Theorie der elektromagnetischen Wellen sowie der Schallwellen geringer Amplitude, in denen vollkommen leitende bzw. starre Parallelplatten oder zylindrische Strukturen auftreten, wird man zu Integralgleichungen vom Typus Wiener-Hopf geführt, deren Lösung oft schwierig ist. Verf. weist darauf hin, daß sich die Behandlung jener Gleichungen vereinfachen läßt, wenn man sie vor Einführung der Grenzbedingungen der Laplace-Trans-

formation unterwirft. Er zeigt dies an einzelnen Beispielen, u. zw. behandelt er: 1. das Sommerfeld-Problem der halbumendlichen Ebene, 2. die Beugung von Schallwellen geringer Amplitude an einem halbumendlich starren Zylinder, 3. Beugung einer nicht ebenen elektromagnetischen Welle durch einen unendlich langen „Wellenleiter“ (wave guide), 4. ein Vektorfeld.

J. Picht.

Jones, D. S.: Diffraction by a wave-guide of finite length. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 118—134 (1952).

Verf. betrachtet zwei in der Ebene $y = 0$ bzw. $y = d$ liegende parallele Ebenen. Unendlich breite, aber endlich lange Teile dieses Ebenenpaares seien vollkommen leitend. Sie bilden die Seitenflächen eines Wellenleiters. Die elektrische Intensität auf diesen Platten sei nicht bekannt. Es wird die Beugung einer ebenen harmonischen elektromagnetischen Welle, die parallel zu den Begrenzungsflächen des Wellenführers polarisiert sei, behandelt. Zunächst bespricht Verf. allgemein die verschiedenen Methoden, die zur Lösung angewendet werden können bzw. schon angewandt wurden. Verf. behandelt das Problem mittels Integralgleichungen. Die Länge der zur xz -Ebene parallelen leitenden Platten — in der x -Richtung sei l . In Richtung der z -Achse seien sie unbegrenzt. Die elektrische Erregung liege in der z -Richtung, so daß die einfallende Welle gekennzeichnet ist — bei Fortlassung des Zeitfaktors $e^{i\omega t}$ — durch $\mathfrak{E}_0 \cdot e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}$ mit $0 < \theta \leq \pi/2$. Außerdem wird $\pi < kd < 2\pi$ vorausgesetzt. Das Problem wird gelöst, indem die Werte von \mathfrak{E} in der Ebene $y = 0$ und $y = d$ für $x > 0$ und $x < -l$ bestimmt werden. (Für $-l \leq x \leq 0$ ist $\mathfrak{E} = 0$.) Der Punkt (x, y) wird durch eine nur Punkte des freien Raumes enthaltende geschlossene Kurve C umgeben. Innerhalb C genügt \mathfrak{E} der Gleichung $(1 + k^2) \mathfrak{E} = 0$. Mit der Greenschen Funktion $\mathfrak{G}(x, y, x', y')$, für die $(1 + k^2) \mathfrak{G} = -\delta(x - x') \delta(y - y')$ mit $\delta(x) = \text{Dirac-Funktion}$ gilt, ergibt sich dann

$$\oint_C \{ \mathfrak{G}(x, y, x', y') \text{ grad}' \mathfrak{E}(x', y') - \mathfrak{E}(x', y') \text{ grad}' \mathfrak{G}(x, y, x', y') \} \cdot d\mathbf{n} = \mathfrak{E}(x, y),$$

wo (x, y) ein Beobachtungspunkt (innerhalb C) und (x', y') ein Punkt auf C ist. $d\mathbf{n}$ = äußere Normale von C . Für beide Ränder $x = 0$ und $x = -l$ gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \oint_S ([\mathfrak{E} \mathfrak{B}^*] + [\mathfrak{E}^* \mathfrak{B}]) \cdot \mathbf{n} ds = 0,$$

zu erstrecken über den Umfang S eines Kreises vom Radius ρ . Für die Gebiete $y < 0$; $0 < y < d$; $y > d$ ergeben sich durch entsprechende Wahl von C die benötigten (simultanen) Integralgleichungen, für die die Greenschen Funktionen angebar sind und angegeben werden. Um die Integralgleichungen zu transformieren, wird angenommen, daß k einen kleinen negativen imaginären Anteil besitzt ($k = k_r - i k_i$). Die Transformation wird so vorgenommen, daß die in den Integralgleichungen auftretenden Ableitungen der Greenschen Funktionen $(\partial \mathfrak{G}_j / \partial y)_{y' \rightarrow m}$ mit $m = -0$; $+0$; $d-0$; $d+0$ und für $j = 1, 2$ eliminiert werden und die partiellen Integralgleichungen neben $\mathfrak{G}_j(x')$ nur noch die $\mathfrak{G}_j(x)$ enthalten und die ursprünglich auftretenden

$\lim_{y \rightarrow m} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty}$ übergeführt sind in $-\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}$. Durch Addition und Subtraktion der beiden so erhaltenen simultanen Integralgleichungen lassen sie sich weiter vereinfachen. Verf. erhält

$$e^{-ikx \cos \theta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \{ H_1(s) e^{sx} + J_1(s) e^{-s(x+l)} \} K(s) ds = 0,$$

$$e^{-ikx \cos \theta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \{ H_2(s) e^{sx} + J_2(s) e^{-s(x+l)} \} L(s) ds = 0,$$

gültig für $x > 0$ bzw. $x < -l$ und $k_i \cos \theta < \sigma < k_i$, wo $\sigma = |\text{Im}(\kappa_m)|$ und $\kappa_m^2 = k^2 - m^2 \pi^2 / d^2$. Dabei ist κ_m selbst positiv reell bzw. negativ imaginär zu nehmen. Die Funktionen $K(s)$ und $L(s)$ sind Abkürzungen von Funktionen, die außer von der Integrationsvariablen s von d^2 und k^2 abhängen und in der Arbeit angegeben sind. — Anschließend werden einige Eigenschaften der Lösung diskutiert, soweit dies ohne explizite Kenntnis der Lösungen selbst möglich ist. Der folgende Abschnitt gibt eine Näherungslösung der Integralgleichungen für den Fall, daß l groß ist, was durch sukzessive Substitutionen geschieht. Verf. weist darauf hin, daß der entgegengesetzte Fall, nämlich daß l klein ist, von geringer praktischer Bedeutung ist. Ferner wird das Feld in großen Entfernungen R vom Koordinatenursprung bestimmt und es werden die hier auftretenden Integrale näherungsweise nach der Sattelpunktmethode ausgewertet. Für $y \geq d$ ergibt sich so, daß

$$\mathfrak{E}(x, y) \sim \mathfrak{E}_0 - \left(\frac{2\pi k^3}{R} \right)^{1/2} \sin \theta \sin \Phi [H_1(s_0) - H_2(s_0) + e^{s_0 l} \{J_1(-s_0) - J_2(-s_0)\}] \cdot \exp(-ikR + ikd \sin \frac{3}{4} + i\pi)$$

und für $y \leq 0$

$$\mathfrak{E}(x, y) \sim \mathfrak{E}_0 + \left(\frac{2\pi k^3}{R} \right)^{1/2} \sin \theta \sin \Phi [H_1(s_0) + H_2(s_0) + \epsilon^{s_0 l} \{J_1(-s_0) + J_2(-s_0)\}] \\ \cdot \exp(-ikR + \frac{3}{4}i\pi),$$

während sich für $0 \leq y \leq d$ der gemeinsame Grenzwert beider vorhergehender Ausdrücke ergibt. — Anschließend erfolgt ein Vergleich der Formel für $\mathfrak{E}(x, y)$ in großem Abstand vom Nullpunkt und bei endlicher Länge l des Wellenführers mit dem Fall, daß $l \rightarrow \infty$ geht, für die die Formeln für $R \gg l$ ja nicht mehr gelten können. In einem Anhang beschäftigt sich Verf. mit einer von Fox angegebenen Gleichung und zeigt, daß die von Fox angegebene Lösung durch sukzessive Substitutionen abgeleitet werden kann. J. Picht.

Suhl, H. and L. R. Walker: Faraday rotation of guided waves. Phys. Review, II. Ser. 86, 122—123 (1952).

Namiki, Mikio and Hiroshi Takahashi: Some variational principles for problems in transmission lines. J. appl. Phys. 23, 1056—1057 (1952).

Hönl, H.: Eine strenge Formulierung des klassischen Beugungsproblems. Z. Phys. 131, 290—304 (1952).

Um die Beugung einer ebenen skalaren Welle an einem ebenen Diaphragma zu behandeln, wird die Wellenfunktion in den zwei durch den Schirm getrennten Halbräumen nach ebenen Wellen entwickelt, welche vom Schirm auslaufen bzw. gedämpft werden. Die Randbedingung am Schirm und die Stetigkeit in der Öffnung liefern zwei Integralgleichungen für die Fouriertransformierte der Wellenfunktion. Wellengleichung, Randbedingung und Ausstrahlungsbedingung werden auf Grund des Ansatzes befriedigt. Ob die Meixnersche Kantenbedingung ebenfalls befriedigt wird, kann Verf. allgemein nicht zeigen, doch erweist sie sich in dem späteren Beispiel (s. folgendes Referat) als erfüllt. Walter Franz.

Groschwitz, E. und H. Hönl: Die Beugung elektromagnetischer Wellen am Spalt. I. Z. Phys. 131, 305—319 (1952).

Nach der in der voranstehenden Arbeit angegebenen Methode wird die Beugung einer senkrecht zum Schirm einfallenden Welle am unendlich langen Spalt behandelt, und zwar in dem vorliegenden Teil I der Arbeit für Randbedingung $u = 0$ (optisch: elektrischer Vektor parallel zu Spalträndern). Die Fouriertransformierte wird so nach Besselfunktionen entwickelt, daß die Randbedingung gliedweise befriedigt wird. Die Entwicklungskoeffizienten sind aus der zweiten Integralgleichung (Stetigkeit in der Öffnung) zu bestimmen. Für die Erregung in der Öffnung ergibt sich eine Entwicklung nach Tschebyscheffschen Polynomen, deren Konvergenz plausibel, jedoch nicht erwiesen ist; im Gegensatz dazu sind ähnliche Entwicklungen, welche Levine-Schwinger und Sommerfeld angegeben haben, bei breiten Spalten bestimmt divergent. — Im Limes schmaler Spalte müssen nur die ersten Glieder der Entwicklung berücksichtigt werden; dies wird bis zum zweiten Glied durchgerechnet. Walter Franz.

Maecker, H.: Die Grenze der Totalreflexion. I. Strahlenoptische Näherung mit der Wolterschen Strahldefinition. Ann. der Physik, VI. F. 10, 115—128 (1952).

Verf. benutzt zur Untersuchung der Verhältnisse bei der Totalreflexion die „Woltersche Strahldefinition“, bei der zur Definition eines „Strahlers“ zwei ebene Wellen benutzt werden, die sich in ihrer Richtung um einen differentiellen Winkelbetrag unterscheiden. Hiermit erhält er für die Strahlversetzung entlang der Grenzfläche in Übereinstimmung mit K. Artmann und H. Wolter die von diesen auch experimentell bestätigten Werte. Er untersucht sodann die totalreflektierte Wellenfront einer Kugelwelle und findet hierfür, daß die Wellenfront aus zwei Anteilen besteht, von denen der eine einer Kugelwelle entspricht, die vom geometrisch-optisch gedachten Spiegelpunkt der punktförmigen Lichtquelle auszugehen scheint, während der andere Teil der Wellenfront die „Flankenwelle“ darstellt. Beide Wellenfronten haben einen Punkt gemeinsam, der dem Grenzwinkel der Totalreflexion entspricht. Die totalreflektierten Strahlen bilden hierbei eine Einhüllende, auf der

die Umkehrpunkte der Wellenfronten liegen und die die Evolute der Wellenfronten als Evolvente ist. Es folgt eine näherungsweise Berechnung der Intensitätswerte der reflektierten Welle. Um die Intensitäten in einem bestimmten Punkt zu erhalten, muß beachtet werden, daß sich im allgemeinen die beiden Teilwellen mit verschiedener Phase durchsetzen, was sich durch eine Einführung der komplexen Schreibweise leicht berücksichtigen läßt und vom Verf. durchgeführt wird. Für ein bestimmtes Zahlenbeispiel des Verhältnisses der Brechungsindizes und des Abstandes vom Spiegelpunkt werden die resultierenden Formeln durchgerechnet. *J. Picht.*

Maecker, H.: Die Grenze der Totalreflexion. II. Strenge wellenoptische Berechnung. Ann. der Physik, VI. F. 10, 153—160 (1952).

Im Anschluß an den ersten Teil der Arbeit (s. vorsteh. Referat) untersucht Verf. die Vorgänge in der unmittelbaren Umgebung des Grenzwinkels der Totalreflexion, indem er die zugehörigen Formelausdrücke für einen Spezialfall — für den Abstand $R' \approx 6$ cm des Aufpunktes in der reflektierten Welle vom Spiegelpunkt, wobei $k \cdot R' = 10^6$, $k = 2\pi n_1/\lambda$, $n = n_2/n_1 = 1/1,52$ angenommen wird — durchrechnet. Verf. gibt zunächst den Gedankengang der von H. Ott (dies. Zbl. 27, 175) durchgeführten wellenoptischen Berechnungen zur Totalreflexion wieder, in denen der Integrationsweg zum Teil in der komplexen Ebene gewählt wird und die Integration über die Sattelpunkte längs der Paßstraße ausgeführt wird. Abweichend hiervon führt Verf. die Integration nicht über die Paßstraße selbst, sondern längs einer Parallelen zu dieser durch, da dies — nach Angaben des Verf. — eine Vereinfachung bedeutet. (Wie Verf. dem Ref. mitteilt, ist er darauf aufmerksam gemacht worden, daß in Gl. 12 seiner Arbeit im Exponenten der e -Funktion der Faktor i vor der geschweiften Klammer fortfallen muß, und daß sich dadurch auch die Gl. 14 und 15 ändern. Bei den zahlenmäßigen Ergebnissen macht sich dies Versehen indessen nicht bemerkbar, da beim Übergang zur Intensität eine Multiplikation mit dem konjugierten komplexen Wert erfolgt. Nach Angabe des Verf. bleiben auch seine Ergebnisse bez. der Phase der reflektierten Welle, der Amplitude der Kugelwelle und der Grenzschichtwelle und der Gesamterregung richtig.) *J. Picht.*

Theimer, O., G. D. Wassermann and E. Wolf: On the foundation of the scalar diffraction theory of optical imaging. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 212, 426—437 (1952).

Bei beugungs- und wellentheoretischer Behandlung der optischen Abbildung wird im allgemeinen eine skalare Funktion u_p benutzt, die mit einer Komponente von \mathfrak{C} oder \mathfrak{H} oder des Hertzschen Vektors \mathfrak{J} identifiziert wird. Da — wie die Verff. angeben — die bisher einzige, von Picht [Ann. der Physik, IV. F. 77, 685—782 (1925)] in seiner Arbeit über wellen- und beugungstheoretische Behandlung beliebig deformierter Wellen, also mit beliebigen Aberrationen behafteter Strahlenbündel durchgeführte kurze Betrachtung über den Zusammenhang zwischen der skalaren und der exakten vektoriellen Behandlung gewisse, nur näherungsweise geltende Vereinfachungen enthält — er benutzt bei der Darstellung monochromatischer Verhältnisse eine feste Wellenlänge λ statt eines Wellenlängenbereiches $\lambda - \frac{1}{2}\Delta\lambda \dots \lambda + \frac{1}{2}\Delta\lambda$ und berücksichtigt nicht die bei einer reellen Quelle vorhandene Richtungsabhängigkeit der Polarisations- und Amplitudenverhältnisse sowie deren Änderung beim Durchgang der Strahlung durch abbildende Linsen —, halten es die Verff. für erforderlich, den Zusammenhang zwischen der skalaren und der vektoriellen Behandlung optischer Abbildungen unter Berücksichtigung jener Korrekturen durchzuführen, was jedoch auch nicht ganz ohne einige, die Verhältnisse vereinfachende Vernachlässigungen geschieht. Die Ergebnisse der Verff. sind, wie sie selbst schreiben, naturnotwendig qualitativen, nicht quantitativen Charakters. Sie glauben aber, durch ihre Untersuchungen gleichfalls (und strenger) die Berechtigung dafür erbracht zu haben, daß es im allgemeinen bei optischen Abbildungsfragen ausreichend ist, die skalare Theorie zu benutzen. *J. Picht.*

Stokes, A. R.: Three-dimensional diffraction theory of microscope image formation. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **212**, 264—274 (1952).

Verf. untersucht — insbesondere bez. des Auflösungsvermögens — die Eigenschaften des Bildes eines drei-dimensionalen Objektes, abgebildet durch ein Mikroskop, u. zw. für den Fall, daß das Objekt in allen drei Dimensionen periodische Struktur besitzt. Für das „laterale Auflösungsvermögen“ erhält er die bekannte Beziehung, daß der kleinste auflösbare Abstand, also in diesem Fall die kleinste auflösbare Periode den Wert $a (>) \lambda/2 \sin \beta$ hat, wenn β den halben Öffnungswinkel des einfallenden Strahlenkegels bedeutet. Für das „achsiale Auflösungsvermögen“, das man durch Auf- und Abwärtsbewegung des Mikroskops erreichen kann, indem man die dabei auftretenden Änderungen des Bildes beobachtet, erhält Verf. den achsialen Abstand $b (>) \lambda/(1 - \cos \beta)$. Auch auf den Fall, daß es sich um ein vollkommen gleichmäßig durchsichtiges Objekt handelt, dessen Brechungsindex in achsialer und lateraler Richtung periodisch variiert, geht Verf. kurz ein. Dieser Fall läßt sich bekanntlich auf den Fall periodisch variabler Durchlässigkeit zurückführen.

J. Picht.

Bousquet, Paul: Détermination graphique des coefficients de Fresnel en incidence oblique à la surface de séparation d'un milieu transparent et d'un milieu absorbant. J. Phys. Radium **13**, 294—296 (1952).

Lense, Josef: Über einen geometrischen Satz der Kristalloptik. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1951**, 61—64 (1952).

Für die Lagebeziehungen der Wellennormalen n , des Strahlvektors \mathfrak{S} , der elektrischen Induktion \mathfrak{D} und der Feldstärke \mathfrak{E} bei der Lichtausbreitung in einem Kristall gelten gewisse Beziehungen, aus denen sich auch die Erscheinung der konischen Refraktion erklärt, jener Erscheinung, daß bekanntlich zu einer mit der optischen Achse des Kristalls zusammenfallenden Wellennormale n unendlich viele Strahlrichtungen \mathfrak{S} gehören, unter denen sich auch die Richtung n selbst befindet und die einen Kegel bilden, der von den zu n senkrechten Ebenen in Kreisen geschnitten wird. Dieser Satz, dessen bisheriger Beweis dem Verf. wegen seines Rechenaufwandes und der Heranziehung physikalischer Tatsachen mißfällt, wird vom Verf. in anderer, rein geometrischer Art bewiesen, wobei er insbesondere eine Vereinfachung dadurch erzielt, daß er das Indexellipsoid, das ja von der zur optischen Achse senkrechten Ebene in einem Kreise geschnitten wird, durch den das Ellipsoid in jenen Kreisen berührenden elliptischen Zylinder ersetzt, soweit es sich um die in den Punkten jenes Schnittkreises zu errichtenden Normalen des Ellipsoids handelt, die ja mit den entsprechenden Normalen des elliptischen Zylinders identisch sind.

J. Picht.

Fedorov, F. I.: Die Bestimmung der optischen Parameter von einachsigen Kristallen am reflektierten Licht. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84**, 1171—1174 (1952) [Russisch].

Aus einem isotropen Medium falle eine Lichtwelle auf einen einachsigen nicht leitenden, unmagnetischen Einkristall, dessen optische Parameter aus dem reflektierten Licht bestimmt werden sollen. Verf. definiert als „Refraktionsvektoren“ das Produkt aus Brechungsindex und Vektor der Wellennormale der gegebenen Welle und bezeichnet sie durch m , m' , m_0 , m_e für die einfallende, reflektierte sowie die ordentlich- und außerordentlich-gebrochene Welle. Es werden das Reflexionsgesetz und die Brechungsgesetze mit Hilfe der Refraktionsvektoren ausgedrückt und für \mathfrak{E} und \mathfrak{S} die Ansätze gemacht

$$\mathfrak{E} = A a + B [a^* n], \quad \mathfrak{E}' = A' a + B' [a n'], \quad \mathfrak{E}_0 = C [m_0 c]$$

$$\mathfrak{S} = A [m a] + B n a, \quad \mathfrak{S}' = A' [m' a] + B' n a, \quad \mathfrak{S}_0 = C [m_0 [m_0 c]]$$

$$\mathfrak{E}_e = D(\varepsilon_0 c - m_e c \cdot m_e), \quad \mathfrak{S}_e = D\varepsilon_0 [m_e c],$$

in denen

$$a = \{m \hat{s}\} = \{m' \hat{s}\} = \{m_0 \hat{s}\} = \{m_e \hat{s}\}; \quad m' = [\hat{s} a] - (m \hat{s}) \hat{s}; \quad m_0 = [\hat{s} a] + (m_0 \hat{s}) \hat{s}; \\ m_e = [\hat{s} a] + (m_e \hat{s}) \hat{s}$$

ist. \hat{s} ist der Einheitsvektor der Normalen zur Grenzfläche, gerichtet vom isotropen Medium zum Kristall, n, n', n_0, n_e sind die Einheitsvektoren der Normalen der einfallenden, der reflektierten, der ordentlichen und außerordentlichen Welle. c ist der Einheitsvektor der optischen Achse des Kristalls. Ferner ist $(c \cdot \hat{s}) = \cos \chi$. $A, B, A', B'; C, D$ sind den Amplituden der Wellen proportional. Der Tensor der dielektrischen Verschiebung ist $\varepsilon = \varepsilon_0 + (\varepsilon_e - \varepsilon_0) c \cdot c$, wo $c \cdot c$ Dyade ist mit $(c \cdot c)_{ik} = c_i \cdot c_k$. Aus den Grenzbedingungen werden A', B', C, D berechnet. Weiter wird aus dem Azimut Θ (mit $\tan \Theta = A/B$) der einfallenden Welle das Azimut Θ' (mit $\tan \Theta' = A'/B'$) der reflektierten Welle berechnet, deren \tan -Werte für $\Theta = 0, \pi/2, \pi/4$ durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bezeichnet werden. Als Haupteinfallsebene wird die Einfallsebene definiert, die die Doppelnormale des Kristalls enthält. ψ ist das gegen die Haupteinfallsebene gemessene Azimut der einfallenden Welle. Es wird eine Beziehung angegeben, aus der sich schließen läßt, ob der Kristall einachsig oder zweiachsig ist. Für drei Einfallssazimute $\psi = \psi_1, \psi = \psi_1 + \psi', \psi_3 = \psi_2 + \psi'$ gegen die Haupteinfallsebene müssen die Ausdrücke $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — definiert durch

$$\gamma = \frac{(n_0 \hat{s}) \hat{s} [(n_0 \hat{s}) c]}{[(n_0 \hat{s})^2 (\hat{s} \cdot c)]} \quad \text{— der Bedingung } \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{2} = \gamma_2 \cos \psi'$$

genügen. Ist die Bedingung nicht erfüllt, dann ist der vorgelegte Kristall zweiachsig. Verf. weist darauf hin, daß es sich bei der praktischen Untersuchung eines Kristalls um beliebige kleine Stücke der Kristalloberfläche handeln kann, an denen die Reflexion erfolgt. Es ist nur erforderlich, daß tatsächlich noch einwandfreie Reflexion stattfindet, um daraus die genannten Größen messen zu können, die zur Bestimmung der optischen Orientierungsdaten erfüllt sind. Verf. geht weiter auf die Polarisationsverhältnisse ein. Vollständige Polarisation des reflektierten Lichtes ergibt sich für $\Theta' = \pi/2$ (Brewstersches Gesetz). Für zwei zueinander senkrechte Einfallsebenen, nämlich für die Haupteinfallsebene sowie für die dazu senkrechte, werden die Brewstersehen Winkel durch ihre \tan -Werte formelmäßig angegeben:

$$\tan^2 \varphi_{||} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_0 - n^2)}{n^2 (\varepsilon_0 - n^2)} \quad \text{ sowie } \quad \tan^2 \varphi_{\perp} = \frac{\varepsilon_0}{n^2}. \quad J. Picht.$$

Schopper, Herwig: Zur Optik dünner doppelbrechender und dichroitischer Schichten. Z. Phys. 132, 146—170 (1952).

Verf. untersucht theoretisch sehr eingehend die Verhältnisse, die vorliegen, wenn eine ebene Welle schräg auf eine dünne Schicht trifft, die auf Glas als Träger aufgebracht (etwa aufgedampft) und optisch ein- oder zweiachsig sein kann, wobei aber eine optische Symmetrieachse senkrecht auf der Schichtebene stehen muß. Die Formeln werden sehr allgemein abgeleitet und diskutiert, auch werden die Permeabilitäten nicht von vornherein gleich 1 gesetzt. Die Dielektrizitätskonstante für die Schicht ist im allgemeinen ein komplexer Tensor, der Diagonalgestalt annimmt, wenn die optischen Symmetrieachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Es werden die allgemeinen Formeln für das Verhältnis der reflektierten zur einfallenden und der reflektierten zur durchgehenden Amplitude angegeben, und zwar für beide Fälle, nämlich daß das Licht von der Glasseite bzw. von der Luftseite aus auf die dünne, auf das Glas aufgetragene Schicht trifft. Die in diesen Ausdrücken auftretenden Exponentialfunktionen entwickelt der Verf. in Reihen, in denen man bei extrem dünnen Schichten bereits alle Glieder von höherer als der ersten Potenz vernachlässigen kann. Näher diskutiert werden auch die Verhältnisse bei mitteldicken und dicken Schichten. Mit den hierfür geltenden Formeln lassen sich die optischen Konstanten sowie die Dicke der Schicht berechnen, wenn man die Intensitäten und Phasen gemessen hat. Weiter werden die Formeln so umgeformt, daß man umgekehrt aus den optischen Konstanten und der Schichtdicke die Intensitäten und Phasen berechnen kann. Auch auf die Verhältnisse bei der Totalreflexion geht Verf. näher ein, wobei als Grenzwinkel der Totalreflexion stets derjenige angesehen wird, der für die schichtfreie Glasunterlage (gegen Luft) gilt. Bei vorhandener Schicht spricht Verf. dann von „gestörter Totalreflexion“, für die er die Verhältnisse im einzelnen diskutiert. J. Picht.

Wolter, Hans: Spiegelsysteme streifenden Einfalls als abbildende Optiken für Röntgenstrahlen. Ann. der Physik, VI. F. 10, 94—114 (1952).

Verf. diskutiert, ob und unter welchen Bedingungen es möglich ist, mit Benutzung von (weichen) Röntgenstrahlen, die an geeigneten Rotationsflächen streifend reflektiert werden, eine Mikroskopoptik zu schaffen, die ein über das der Lichtmikroskope hinausgehendes Auflösungsvermögen besitzt und neben der Aufhebung der sphärischen Aberration auch die Sinusbedingung erfüllt. Es werden die Gründe besprochen, die es erforderlich machen, Spiegelsysteme von mehr als drei Spiegeln zu benutzen. Als Spiegelsystem 1. Art bezeichnet er solche, bei denen alle — in Kanten zusammenstoßenden — Spiegel als Konkavspiegel benutzt werden. Spiegelsysteme, bei denen Konkav- und Konvexspiegel benutzt werden, nennt Verf. Spiegelsysteme 2. bzw. 3. Art. Zur annähernden Erfüllung der Sinusbedingung

bei gleichzeitiger Beseitigung der sphärischen Aberration müssen die als Rotationsflächen mit gemeinsamen Rotationsachsen gewählten Spiegel in gerader Anzahl vorhanden sein und paarweise gemeinsame Brennpunkte besitzen. *J. Picht.*

Wolter, Hans: Verallgemeinerte Schwarzschildsche Spiegelsysteme streifender Reflexion als Optiken für Röntgenstrahlen. *Ann. der Physik*, VI. F. 10, 286—295 (1952).

In den Gleichungen von Schwarzschild, nach denen ein aus zwei Spiegeln bestehendes Spiegelsystem berechnet werden kann, das frei von sphärischer Aberration ist und die Sinusbedingung erfüllt, und in denen als Konstante d_0 der Abstand des Systembrennpunktes vom zweiten Spiegel auftritt, setzt Verf. diese Konstante gleich einem komplexen Wert $g \exp(i\pi \frac{2D}{D-f})$, wo D den Abstand beider Spiegelscheitel voneinander, f die Brennweite des ersten Spiegels bedeutet. Es ergeben sich so alle aplanatischen Spiegelsysteme streifender Reflexion, insbesondere auch die, bei denen sich beide Spiegel zu einer geschlossenen Fläche zusammensetzen lassen. Verf. diskutiert diese Spiegelsysteme näher, insbesondere mit Rücksicht auf ihre Benutzung als Optiken für Röntgenstrahlen. *J. Picht.*

Wynne, C. G.: Primary aberrations and conjugate change. *Proc. phys. Soc., Sect. B* 65, 429—437 (1952).

Fünf Fehlerausdrücke für Öffnungsfehler, Koma, Astigmatismus, Verzeichnung und Blendenabweichung werden in einer von H. H. Hopkins (dies. Zbl. 40, 275) angegebenen Form mitgeteilt. Sodann werden die Beziehungen zu den entsprechenden Ausdrücken abgeleitet, die entstehen, wenn man Ding und Eintrittspupille miteinander vertauscht. Mit deren Hilfe kann man Formeln erhalten, wie die Fehlerausdrücke sich bei Verschiebung des Gegenstandes ändern; die Verschiebung tritt bei der Verzeichnung linear auf, beim Astigmatismus quadratisch, bei der Koma in dritter, beim Öffnungsfehler in vierter Ordnung. Es wird nun untersucht, wann ein Fehlerausdruck konstant, insbesondere auch Null werden kann, wobei z. B. die Unvereinbarkeit von Herschelscher und Sinusbedingung bestätigt wird. Endlich werden auch die Formeln abgeleitet dafür, daß Astigmatismus, Koma und Öffnungsfehler für zwei, oder daß Koma und Öffnungsfehler für drei Punkte im Seidelschen Gebiet verschwinden. Hier wird über die Maxwellsche Behauptung gesprochen, daß die scharfe Abbildung zweier Flächen unmöglich sei, man vgl. hierzu die Untersuchung von M. Herzberger und Ref. (dies. Zbl. 11, 44). *H. Boegehold.*

Marx, Helmut: Durchrechnungs- und Rekursionsformeln für die Bildfehlerkoeffizienten beliebiger Ordnung bei optischen Systemen aus Kugel- und Planflächen. *Z. Phys.* 131, 408—419 (1952).

Verf. zeigt, daß es durch zweckentsprechend gewählte Symbole, durch Einführung von Größen, die er als „Vektorskalare“ bezeichnet und die die Summe aus einem zweidimensionalen Vektor und einem Skalar sind, möglich ist, die Durchrechnung optischer Systeme und ihre Analyse hinsichtlich der Bildfehler beliebiger Ordnung wesentlich zu erleichtern. Für die Vektorskalar-Größen werden die Rechenoperationen definiert und gezeigt, daß für die Addition das kommutative, das assoziative, für die Multiplikation das kommutative, nicht aber das assoziative Gesetz gilt. Das distributive Gesetz ist erfüllt. Es wird ferner die Potenzreihenentwicklung eines Vektorskalares angegeben. Dabei sind die Cauchyschen Produktschritte über drei Indizes wesentlich. Zum Schluß werden die neuen Rechengrößen und Symbole auf die Durchrechnung eines Lichtstrahles durch ein optisches System angewendet und die Durchrechnungs- und Rekursionsformeln angegeben. *J. Picht.*

Smith, T.: Supplementary note on ray tracing. *Proc. phys. Soc., Sect. B* 65, 822—823 (1952).

Bernard, Michel: Une équation réduite des trajectoires dans un miroir électronique. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 606—608 (1952).

Da die Pichtsche Gleichung zur Bestimmung des Verlaufs der paraxialen Elektronenstrahlen für die theoretische Behandlung der elektrischen und elektrisch-magnetischen Linsen besondere Vorteile bietet, untersucht Verf., ob es möglich ist, eine entsprechende Differentialgleichung für den Elektronenspiegel aufzustellen, auf den die Pichtsche Formel zunächst nicht ohne weiteres übertragen werden kann, da die Strahlen hier für $\Phi^*(z) = 0$, wo $\Phi^*(z) = \Phi(z) - U = -(m/2e) \dot{z}^2$ und $\Phi(z)$ die Potentialverteilung längs der Achse des rotationssymmetrischen Feldes ist, einen Umkehrpunkt besitzen, in dem $d\varrho/dz = \infty$ wird. Verf. führt daher als neue unabhängige Variable statt z die Größe s ein, definiert durch $z = s^2$. Ersetzt man dann in der auf s bezogenen ursprünglichen Differentialgleichung der paraxialen Elektronenstrahlen ϱ durch $P(s) = (\varrho(s)/\sqrt{s}) \Phi(s)^{1/4}$ [bei Picht: $P(z) = \varrho(z) \Phi^*(z)^{1/4}$], so kommt man zu der reduzierten Formel $P'' + (3/16) T P = 0$, die in ihrer Form mit der Pichtschen Formel übereinstimmt. Hier ist $T = \left(\frac{1}{\Phi^*} \frac{d\Phi}{ds} \right)^2 - \frac{4}{s^2}$ [bei Picht: $T = \left(\frac{1}{\Phi^*} \frac{d\Phi}{dz} \right)^2$ für das rotationssymmetrische elektrische und $T = \left(\frac{1}{\Phi^*} \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{-e}{m} \right) \mathfrak{H}^2(z)$ für das rotationssymmetrische elektrisch-magnetische Feld]. Verf. wendet sodann diese reduzierte Differentialgleichung auf den Strahlenverlauf im Elektronenspiegel an und diskutiert den Verlauf in der Nähe des Umkehrpunktes sowie im Unendlichen. Desgleichen gibt er den Ort des Brennpunktes des Elektronenspiegels an. *J. Picht.*

Bertein, F.: Les trajectoires dans les lentilles électroniques: Une méthode d'approximation. J. Phys. Radium **13**, Suppl. au Nr. 2, 41 A—49 A (1952).

Bedeutet $v(z)$ das elektrische Potential längs der Achse und $s(z)$ die radiale Koordinate des Elektrons, so ist die Differentialgleichung der achsennahen Elektronenbahnen bekanntlich durch $4 v s'' + 2 v' s' + v'' s = 0$ gegeben. Verf. entwickelt zur Lösung dieser Differentialgleichung folgendes Näherungsverfahren. Setzt man für s ein Polynom $s = s_0 + s_1 z + \dots + s_n z^n$ in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich im allgemeinen eine nicht verschwindende Funktion $p(z)$ von z . Die Koeffizienten des approximierenden Lösungspolynoms werden nun so gewählt, daß $p(z)$ „möglichst klein“ wird. Als Definition für „möglichst klein“ benützt Verf. die Forderung, daß möglichst viele von den Momenten der Funktion $p(z)$ d. h. der Größen $P_k = \int_{-1}^{+1} z^k p dz$ der Reihe nach verschwinden. Die s_k ergeben sich dann als lineare Funktionen der Momente des Potentials v . *W. Glaser.*

Grivet, Pierre: Un nouveau modèle mathématique de lentille électronique. J. Phys. Radium, **13**, Suppl. au Nr. 2, 1 A—9 A (1952).

Ausführlichere Berechnung von Brennweiten und Brennpunktslagen des magnetischen Abbildungsfeldes $B_z(z) = B_0 \operatorname{sech}(z/b)$. (Vgl. Verf., dies. Zbl. **43**, 417; Lenz, dies. Zbl. **43**, 417). *W. Glaser.*

Jennings, J. C. E.: The virtual optics of the median plane of axially symmetric magnetic prisms. Proc. phys. Soc., Sect. B **65**, 256—265 (1952).

Die Ablenkung von Elektronenstrahlen, die in einer achsensenkrechten Ebene eines rotationssymmetrischen Magnetfeldes verlaufen, wird untersucht, indem der Ablenkwinkel, d. h. der Winkel zwischen den Asymptoten des Ein- und Austrittsstrahls als Funktion des Asymptotenabstandes von der Feldachse (des sog. Stoßparameters b_1) betrachtet wird. Es wird angenommen, daß die Ablenkung Θ für einen benachbarten Stoßparameter $b = b_1 + x$ in der Gestalt $\Theta = \Theta_1 + \lambda x + \mu x^2 + \nu x^3 + \sigma x^4 + \dots$ gegeben ist, wobei die Koeffizienten λ, μ usw. bekannte Funktionen von b_1 und der Elektronenenergie $H_0/H \varrho$ sein sollen. Unter dieser

Voraussetzung werden die Aberrationen diskutiert. Man erkennt so unmittelbar, daß die Aberrationen zweiter Ordnung stets zum Verschwinden gebracht werden können, wenn nur der Hauptstrahl geeignet gewählt wird. Auch die Bedingungen für das Nullwerden der höheren Aberrationen werden diskutiert. *W. Glaser.*

Franke, H. W.: Spektrographische und elektronenoptische Kenngrößen bei Richtungs Doppelfokussierung. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 105—113 (1952).

In Fortführung einer früheren Arbeit [Österreich. Ingenieur-Arch. 5, 371—387 (1951)] wird die anastigmatische Fokussierung in rotationssymmetrischen elektrisch-magnetischen Feldern durch Elektronenbündel, deren Hauptstrahl ein zur Feldachse symmetrisch liegender Kreis ist, weiter untersucht. Die Felder werden durch Reihenentwicklungen dargestellt und Massen- und Geschwindigkeitsdispersion, Neigung der Auffangebene und sphärische Aberration werden durch diese die Felder kennzeichnenden Entwicklungskoeffizienten ausgedrückt. Die Bedingungen für die einfache und erweiterte Richtungs Doppelfokussierung werden als Beziehungen zwischen den Feldkoeffizienten dargestellt. Die Existenz eines Feldes mit korrigierter sphärischer Aberration zweiter Ordnung wird nachgewiesen. *W. Glaser.*

Parzen, Philip: Space-charge-wave propagation in a cylindrical electron beam of finite lateral extension. J. appl. Phys. 23, 215—219 (1952).

Durch Anwendung der WKB-Methode zur Lösung der entsprechenden Wellengleichung einer Raumladungswelle in einem zylindrischen Elektronenstrahl wird versucht, den Einfluß der geometrischen Verhältnisse approximativ zu erfassen. *W. Glaser.*

Ljubarskij, G. Ja. und L. È. Pargamanik: Statistische Theorie des Magnetrons. (Statistischer Fall.) Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 491—494 (1952) [Russisch].

Quantentheorie:

Fantappiè, Luigi: Determinazione di tutte le grandezze fisiche possibili in un universo quantico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 553—558 (1952).

L'A. discute les conditions qu'il a montré précédemment [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 285—290 (1952)] être nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur fonctionnel linéaire caractérise une grandeur physique observable et objective. L'introduction des éléments de la théorie des groupes topologiques et de la notion d'indicatrice projective de l'A. [Ann. mat. pura Appl., IV. Ser. 22, 181—289 (1943)] permet de préciser la portée de ces conditions. *G. Petiau.*

Payne, W. T.: Elementary spinor theory. Amer. J. Phys. 20, 253—262 (1952).

Verf. führt die Spinoren (1. Stufe) elementargeometrisch als Größen ein, die durch eine Länge und drei Eulersche Winkel gegeben sind. Die Komponenten des Spinors, die Transformationsformeln, skalares und äußeres Produkt werden anschaulich gedeutet und der Zusammenhang mit dem Quaternionen-Begriff erläutert. Auf physikalische Anwendungen und auf die Darstellungen der Lorentz-Gruppe geht Verf. nicht ein. Die Arbeit, als didaktischer Beitrag gedacht, und dazu geeignet, enthält nur bekannte Resultate. *W. Urich.*

Jordan, P.: Zur axiomatischen Begründung der Quantenmechanik. Z. Phys. 133, 21—29 (1952).

Verf. gibt drei Postulate für den Meßprozeß an, durch welche die Quantentheorie (im wesentlichen) vollständig bestimmt ist. (I) Postulat der Potenzierung $a^n a^m = a^{n+m}$, (II) Postulat der Addierbarkeit beobachtbarer Größen, (III) Distributives Postulat $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$; a, b bedeuten meßbare Größen. Für eine Verallgemeinerung der Quantentheorie kommt nur ein Verzicht auf (III) in Betracht, was physikalisch einen Verzicht auf das Prinzip reproduzierbarer Messung

bedeuten würde. Die algebraische Seite des Problems hat Verf. in einem Vortrag behandelt, der in den Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg erscheinen wird. *G. Höhler.*

Nishiyama, T.: On the velocity operator in quantum mechanics. Progress theor. Phys. 7, 417—418 (1952).

Kohn, Walter: The validity of Born expansions. Phys. Review, II. Ser. 87, 539—540 (1952).

Wiskott, D.: Eine graphische Methode zur Integration der Schrödinger-Gleichung. Z. Phys. 133, 443—448 (1952).

Baumann, Kurt: Bericht über die neuere Entwicklung der Quantenelektrodynamik. I, II, III. Acta. phys. Austr. 5, 554—558, 6, 53—70, 195—208 (1952).

Kimura, T. and Y. Miyachi: On the rôle of longitudinal and scalar photons. Progress theor. Phys. 7, 419—421 (1952).

Kothari, L. S.: The mass of a photon. Phys. Review, II. Ser. 87, 536—537 (1952).

Utiyama, R., S. Sunakawa and T. Imamura: On the Green-functions of the quantum-electrodynamics. Progress. theor. Phys. 7, 328 (1952).

Katayama, Y.: Transformation function in quantum electrodynamics. Progress theor. Phys. 7, 265—267 (1952).

Snyder, Hartland S.: The gauge invariance problem. Phys. Review, II. Ser. 87, 164 (1952).

Brown, L. M. and R. P. Feynman: Radiative corrections to Compton scattering. Phys. Review, II. Ser. 85, 231—244 (1952).

Die strahlungstheoretischen Korrekturen der relativen Ordnung α^2 (α = Feinstrukturkonstante) zur Formel von Klein-Nishina für den Wirkungsquerschnitt des Comptoneffekts für unpolarisiertes Licht werden in expliziter Form für alle Energien ausgewertet. Das Resultat stimmt mit früheren Berechnungen für die Grenzfälle hoher und tiefer Energie (Ref., dies. Zbl. 34, 132; 37, 281) nicht überein.

M. R. Schafroth.

Goto, S.: Note on the non-relativistic limit of the Compton scattering. Progress theor. Phys. 7, 585—586 (1952).

Levinger, J. S.: Small angle coherent scattering of gammas by bound electrons. Phys. Review, II. Ser. 87, 656—662 (1952).

Rohrlich, F. and R. L. Gluckstern: Forward scattering of light by a Coulomb field. Phys. Review, II. Ser. 86, 1—9 (1952).

Calcul effectif de la diffusion de la lumière par un champ coulombien (effet Delbrück) d'abord suivant les techniques de Feynman, ensuite au moyen du procédé de prolongement analytique proposé par Jost et alii. Afin d'obtenir une formule explicite, on se limite à la diffusion dans la direction d'incidence; le résultat, donné en fonction de l'énergie des photons incidents, confirme les résultats partiels antérieurs dus à d'autres AA.

O. Costa de Beauregard.

Bethe, H. A. and F. Rohrlich: Small angle scattering of light by a Coulomb field. Phys. Review, II. Ser. 86, 10—16 (1952).

Extension des résultats de l'étude précédente au cas de la diffusion par effet Delbrück à de petits angles, ceci afin de permettre une confrontation avec l'expérience. On obtient des formules approximatives valables pour des photons γ de grande énergie, formules qui confirment les résultats partiels antérieurs d'Achieser et Pomerantschuk.

O. Costa de Beauregard.

Greiffinger, P., J. Levinger and F. Rohrlich: Elastic scattering of gammas by bound electrons. Phys. Review, II. Ser. 87, 663 (1952).

Olsen, H. and H. Wergeland: Radiation loss of electrons in the synchrotron. Phys. Review, II. Ser. 86, 123—124 (1952).

Judd, D. L., J. V. Lepore, M. Ruderman and P. Wolff: Radiation from an electron in a magnetic field. Phys. Review, II. Ser. 86, 123 (1952).

Jauch, J. M.: Radiative correction for the collision loss of fast particles. Phys. Review, II. Ser. 85, 950—952 (1952).

Davies, Handel and H. A. Bethe: Integral cross section for Bremsstrahlung and pair production. Phys. Review, II. Ser. 87, 156—157 (1952).

Maximon, L. C.: and H. A. Bethe: Differential cross section for Bremsstrahlung and pair production. Phys. Review, II. Ser. 87, 156 (1952).

Drell, S. D.: Recoil correction to Bremsstrahlung cross section. Phys. Review, II. Ser. 87, 753—755 (1952).

Wick, G. C., A. S. Wightman and E. P. Wigner: The intrinsic parity of elementary particles. Phys. Review, II. Ser. 88, 101—105 (1952).

Havas, Peter: A note on the absorber theory of radiation. Phys. Review, II. Ser. 86, 974—975 (1952).

Wolfenstein, L. and J. Ashkin: Invariance conditions on the scattering amplitudes for spin $1/2$ particles. Phys. Review, II. Ser. 85, 947—949 (1952).

Es wird gezeigt, daß die Invarianz der Streumatrix bei Bewegungsumkehr notwendig ist, damit ein wichtiger Zusammenhang zwischen den Wirkungsquerschnitten für Streuung von polarisierten und von nicht-polarisierten Spin- $\frac{1}{2}$ -Partikeln an einen nicht-polarisierten „Target“ gilt. Der Beweis wird für einen beliebigen Spin des „Targets“ geführt. *G. Källén.*

Eden, R. J.: Threshold behaviour in quantum field theory. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 210, 388—404 (1952).

Etude de la matrice S dans le cas où l'énergie relative d'un système de particules incidentes est suffisante pour la création de particules de masse propre non nulle. Considéré comme fonction des impulsion-énergies incidentes, chaque élément de matrice peut ainsi présenter un seuil de création, et aussi des seuils d'interférence, correspondants à l'apparition d'un processus compétitif. L'A. montre qu'en ces derniers points la fonction considérée reste analytique, mais qu'elle présente un point de branchement (il s'agit essentiellement d'une théorie de champ quantique renormalisée, dans laquelle on utilise l'analyse de la matrice S selon Dyson). Pour obtenir le prolongement analytique aux points de branchement, l'A. s'impose la condition que l'interaction est du type purement retardé (usage des fonctions δ_+ bien connues). — Cette méthode de prolongement analytique diffère de celle proposée par Dyson dans son étude des opérateurs de Heisenberg.

O. Costa de Beauregard.

Itô, D.: „Weisskopf-Wigner method“ in S -matrix formalism. Progress theor. Phys. 7, 326—327 (1952).

McConnell, James: Vacuum polarisation by spin one particles. Progress theor. Phys. 7, 421—422 (1952).

Henley, Ernest M.: π -meson production by protons on nuclei. Phys. Review, II. Ser. 85, 204—215 (1952).

Bethe, H. A. and N. Austern: Angular distribution of π^+ production in $n-p$ collisions. Phys. Review, II. Ser. 86, 121—122 (1952).

Wentzel, G.: Pseudoscalar coupling in pseudoscalar meson theory. Phys. Review, II. Ser. 86, 802—803 (1952).

L'A. discute l'équivalence des couplages pseudoscalaire et pseudovectoriel que l'on démontre facilement par la transformation de Foldy (ce Zbl. 34, 215). L'Analyse des processus de diffusion méson-nucléon montre qu'il est possible que l'un des termes considéré jusqu'ici comme une perturbation soit suffisamment grand pour rendre inutilisable les transformations de Dyson et de Foldy. *G. Petiau.*

Sil, N. C.: Pseudoscalar meson field and the scattering of fast neutrons by protons. Indian J. Phys. 26, 269—275 (1952).

Basu, D.: Pseudoscalar meson field and relativistic scattering of neutrons by protons. Indian J. Phys. **26**, 291—296 (1952).

Smith, A. M.: On the theory of beta-radioactivity. Philos. Mag., VII. Ser. **43**, 915—933 (1952).

Hanawa, Sigeo and Tatuoki Miyazima: Radiative correction to decay processes. III. Forbidden beta-transitions caused by radiation processes. Progress theor. Phys. **7**, 391—398 (1952).

Ahrens, T., E. Feenberg and H. Primakoff: Pseudoscalar interaction in the theory of beta-decay. Phys. Review, II. Ser. **87**, 663—664 (1952).

Ahrens, T. and E. Feenberg: First-forbidden beta-decay matrix elements. Phys. Review, II. Ser. **86**, 64—68 (1952).

Die allgemeine Theorie der verbotenen Beta-Übergänge erster Ordnung $\left(\sum_m |M|^2 \sim 10^{-3}\right)$ liefert in nichtrelativistischer Näherung sieben Kernmatrixelemente, die durch die Auswahlregeln $\Delta I = 0, \pm 1$ gekennzeichnet sind. Sie lassen sich in zwei Gruppen vom Koordinaten- bzw. Momententyp unterteilen. Zur eindeutigen Diskussion der experimentellen Ergebnisse ist die Kenntnis der Verhältnisse entsprechender Matrixelemente der verschiedenen Typen von Interesse. Zur Bestimmung dieser Beziehungen gehen die Verf. von dem allgemeinen Hamiltonoperator H des Kernes aus und erhalten eine Relation zwischen den Energieeigenwerten, den Matrixelementen des Operators X vom „first-forbidden“-Koordinatentyp und denjenigen des Kommutators $HX - XH$, die nach geeigneter Umformung den gesuchten Proportionalitätsfaktor bestimmt. Schwierigkeiten bereitet hierbei das Glied H_v der Hamiltonfunktion, welches der Kernkraftwechselwirkung Rechnung trägt, deren Charakter bei komplizierteren Kernen nicht hinreichend bekannt ist. Glücklicherweise lassen sich jedoch die Matrixelemente des Kommutators $[H, X]$ auf Grund allgemeiner physikalischer Überlegungen an Hand des Schalenmodells abschätzen.

G. Ecker.

Takahashi, Y. and H. Umezawa: The general discussion of the self-stress. Progress theor. Phys. **7**, 330—331 (1952).

Bhabha, H. J.: An equation for a particle with two mass states and positive charge density. Philos. Mag., VII. Ser. **43**, 33—47 (1952).

Verf. gibt ein Wellengleichungssystem zum formalen Spin $3/2$ an, das positiv-definite Energiedichten besitzt. Das 20-komponentige System stellt eine spezielle Kopplung von Systemen vom Fierz-Paulischen Typus dar.

F. L. Bauer.

Höhler, G.: Zur neuen klassischen Theorie des Elektrons von Dirac. Ann. der Physik, VI. F. **10**, 196—200 (1952).

Verf. zeigt, daß die kürzlich von Dirac (dies. Zbl. **43**, 428) vorgeschlagene neue klassische Elektrodynamik aus der Maxwellschen Theorie folgt, falls man darin entweder die Elektronen als geladene Massenpunkte beschreibt und bei festem e/m den Grenzübergang $m \rightarrow 0$ macht oder die Elektronen durch Materiewellen beschreibt und die Eikonalnäherung anwendet.

M. R. Schafroth.

Brunin, O. and S. Hjalmar: Wave equations for integer spin particles in gravitational fields. Ark. Fys. **5**, 163—174 (1952).

Die Wellengleichung für Teilchen mit ganzzahligem Spin ist für ein willkürliches Koordinatensystem, bzw. für den Fall eines nichtverschwindenden Gravitationsfeldes, verallgemeinert. Die Rechnung ist nach dem Vorbild der bekannten Verallgemeinerung der Diraeschen Theorie des Elektrons durchgeführt.

A. Papapetrou.

Witt, Bryce Seligman de and Cécile Morette de Witt: The quantum theory of interacting gravitational and spinor fields. Phys. Review, II. Ser. **87**, 116—122 (1952).

Ausgehend von der von Pirani-Schild und Bergmann und Mitarbeitern

entwickelten kanonischen Formulierung der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitäts-Theorie betrachten die Verff. das kombinierte Gravitations- und Elektron-Feld. Nach einer Besprechung der Darstellung von Spinoren in allgemeinen Koordinaten leiten sie die Gleichungen des kombinierten Feldes in kanonischer Form ab. Schließlich diskutieren sie den Übergang zur quantisierten Theorie.

A. Papapetrou.

McLennan jr., James A. and Peter Havas: Conservation laws for fields of zero rest mass. I. Phys. Review, II. Ser. 87, 898 (1952).

Havas, Peter: Conservation laws for fields of zero rest mass. II. Phys. Review, II. Ser. 87, 898—899 (1952).

Ludwig, Günther: Wie kann die unitäre Feldtheorie Strahlungsemission, Selbstenergie und Lambshift erklären? Z. Naturforsch. 7a, 248—250 (1952).

In einer ersten Arbeit (dies. Zbl. 41, 572) hat Verf. angegeben, es sei möglich, eine divergenzfreie Quantenelektrodynamik aufzustellen, wenn man die Löchertheorie vermeidet, das elektromagnetische Vakuumfeld durch einen „Absorber“ ersetzt und gewisse, spezielle Randbedingungen bei der Lösung der Differentialgleichungen verwendet. (Die Schwierigkeiten der Lösungen mit negativer Energie der Diracgleichung werden nicht diskutiert. Für das freie Diracfeld werden aber die gewöhnlichen Antikommutatoren vorausgesetzt, wo bekanntlich über alle vier Lösungen eines gegebenen Impulses summiert wird.) In der vorliegenden Arbeit wird der Absorber durch ein Feld von freien Photonen dargestellt und mit einem Verfahren, das der gewöhnlichen Störungstheorie vollständig gleichwertig ist, wird die Selbstenergie des Elektrons berechnet. Da sowohl die Voraussetzungen wie die Rechenmethode die gewöhnlichen sind, erhält Verf. in dieser Arbeit das gewöhnliche, unendliche Ergebnis. Die Angabe, die „Absorbertheorie“ sei endlich, wird zurückgezogen. Am Ende wird vorgeschlagen, daß man durch Regularisierung versuchen soll, die Theorie endlich zu machen.

G. Källén.

Gombás, P.: Über die statistische Theorie der Atomkerne. Ann. der Physik, VI. F. 10, 253—264 (1952).

Klinkenberg, P. F. A.: Tables of nuclear shell structure. Reviews modern Phys. 24, 63—73 (1952).

Stenberg, N. R.: The angular distribution of γ -radiation from aligned nuclei. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 791—800 (1952).

Novožilov, Ju. V.: Über die Selbstenergie des Elektrons und Strahlungskorrekturen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 207—210 (1952) [Russisch].

Es wird das allgemeine Problem der Berechnung strahlungstheoretischer Korrekturen zu quantenelektrodynamischen Prozessen bei Anwesenheit äußerer Felder mit Hilfe der „Funktionalmethode“ von W. A. Fock formuliert. Das Verfahren ist äquivalent zu der üblichen Behandlungsweise, insbesondere ist man auch hier an die Störungstheorie nach der Feinstrukturkonstanten gebunden, Explizite Resultate werden keine gegeben.

M. R. Schafroth.

Kalinowski, Walbert C. and Francis Regan: A postulational treatment of the probability for certain types of emissions. Math. Mag. 25, 175—181 (1952).

Die vorliegende Untersuchung über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Emissionsprozesse einer radioaktiven Substanz gibt zunächst eine recht vollständige Übersicht der bereits auf diesem Gebiet vorliegenden Ergebnisse. Den Überlegungen der Verff. liegen fünf allgemeine Forderungen zugrunde, die das Verhalten der Emissionsverteilungsfunktion charakterisieren. Mit Hilfe dieser Beziehungen läßt sich nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitslehre die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, daß keine Impulse (Teilchen- oder Strahlungsemission) in einem Zeitintervall a mit willkürlichem Anfangspunkt liegen, daß n Impulse in einem Zeitintervall a zur Zeit $t = 0$, bzw. daß n Impulse in einem Zeitintervall a mit einem beliebigen anderen Anfangspunkt liegen. Die gefundenen Resultate stimmen mit den entsprechenden Ergebnissen von Fry überein. Darüber hinaus wird die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, daß n Impulse in eine bestimmte Folge nicht angrenzender Zeitintervalle fallen, woraus wiederum die Wahrscheinlichkeit dafür ermittelt werden kann, daß n Impulse emittiert werden, während das Zählgerät k -mal geschlossen ist.

G. Ecker.

Kronenberg, Stanislaus: Streuung schneller Elektronen an leichten Atomkernen. *Acta phys. Austr.* **5**, 536—543 (1952).

Die Streuung schneller Elektronen an leichten Atomkernen wurde zunächst von Mott ausgehend von der Diracschen Gleichung unter Berücksichtigung der Spinwechselwirkung und der relativistischen Effekte behandelt. Eine entsprechende Berechnung von Sexl an Hand des Bornschen Näherungsverfahrens lieferte ein Ergebnis, welches im Relativitätsterm von der Mottschen Formel Abweichungen zeigte. Nachfolgende Untersuchungen von Urban schienen die Überlegungen von Sexl zu bestätigen, jedoch macht Verf. der vorliegenden Arbeit auf einen Fehler in der Urbanschen Rechnung aufmerksam. Schließlich liegt noch eine jüngere Untersuchung von McKinley und Feshbach vor, die in zweiter Näherung ebenfalls ein von dem Mottschen Resultat abweichendes Ergebnis zeigt. Zur Nachprüfung dieser Differenzen unternimmt Verf. nochmals eine Berechnung des Problems nach den Mottschen Gedankengängen und kommt zu der Feststellung, daß nur das Ergebnis von Feshbach und McKinley richtig ist und für alle Streuwinkel gilt.

G. Ecker.

Feshbach, Herman: The Coulomb scattering of relativistic electrons and positrons by nuclei. *Phys. Review*, II. Ser. **88**, 295—297 (1952).

Schiff, L. I.: Radiative correction to the angular distribution of nuclear recoils from electron scattering. *Phys. Review*, II. Ser. **87**, 750—752 (1952).

Hess, F. G.: Some directional correlation functions for successive nuclear radiations. *Canadian J. Phys.* **30**, 130—146 (1952).

Die Theorie der Richtungskorrelationen aufeinanderfolgender Kernemissionsprozesse beliebiger Teilchen oder Photonen ist von Falkoff und Uhlenbeck gegeben worden. Die Auswertung und Anwendung der entsprechenden Ergebnisse erfordert die Ausführung bestimmter Summationen über die Drehimpulscoeffizienten, für deren Berechnung vom Verf. ein allgemeines Verfahren entwickelt wird. Die Methode ist im allgemeinen mühsam. Nur wenn die Drehimpulse von Kern und Teilchen bestimmte Bedingungen befriedigen, läßt sich das Verfahren leicht durchführen. Entsprechende Bestimmungen für spezielle α - γ - und γ - γ -Korrelationsfunktionen werden vorgenommen.

G. Ecker.

Stech, Berthold: Die Lebensdauer isomerer Kerne. *Z. Naturforsch.* **7a**, 401—410 (1952).

Die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit eines Nukleons im Kern unter Aussendung einer elektrischen oder magnetischen Multipolstrahlung wird an Hand des Einteilchenmodells (Schalenmodell) mit starker Spin-Bahn-Kopplung durchgeführt. Diese Wahrscheinlichkeiten bestimmen sich nach dem bekannten Formalismus von Fermi und Heitler als gewisse Integrale über die Eigenfunktionen des Nukleons, den Spinoperator und die Vektorpotentiale des elektromagnetischen Feldes. Während für die Vektorpotentiale die bekannten Operatordarstellungen verwendet werden, ergeben sich die Eigenfunktionen des Nukleons aus der entsprechenden Diracgleichung, wobei allerdings der Einfluß des für eine starke Spin-Bahn-Kopplung notwendigen Zusatzgliedes der Diracgleichung nur diskutiert werden kann. Die Auswahlregeln lassen sich für elektrische und magnetische Strahlung an Hand der vorliegenden Integrale leicht bestimmen. Die gefundene Energieabhängigkeit für magnetische 2^4 -Pol- und elektrische 2^3 -Pol-Strahlung ist graphisch aufgetragen und zeigt insbesondere bei den Übergängen mit magnetischer Multipolstrahlung gute Übereinstimmung mit den Experimenten. Die theoretischen Werte weichen allerdings alle um einen näherungsweise konstanten Faktor 30 von den experimentell gefundenen Werten ab. Die Ursache dieser Differenz wird diskutiert.

G. Ecker.

Nataf, R. et R. Bouchez: Sur les transitions β et la structure nucléaire. I. Considérations théoriques: Structure nucléaire. *J. Phys. Radium* **13**, 81—93 (1952).

Untersuchung der Zusammenhänge zwischen β -Zerfallstheorie und Schalenmodell der Atomkerne, vgl. auch Arbeiten von Feenberg u. M. sowie von Nordheim [Phys. Review, II. Ser. 75, 1786, 1877, 1894 (1949)]. Vertiefung der Theorie gegenüber den genannten Arbeiten durch Einbeziehung einer Quantenzahl L des Bahndrehimpulses der Nukleonen im Schalenkern. Näherung durch Trennung in abgesättigte Schalen und Leuchtnukleonen, nichtrelativist. Rechnung. (L, S) -Kopplung erfaßt die Wechselwirkung der Leuchtnukleonen untereinander; diese Wechselwirkung enthält einen nichtzentralen Anteil, vgl. phänomenologische Theorie des Deuterons. — Teil I der Arbeit bringt eine ausführliche Zusammenstellung der Konfigurationen der leichten Kerne mit 1, 2 und 3 unabgesättigten Nukleonen und zeigt, daß auf der Basis der (LS) -Kopplung die Werte für die magn. Momente in meist guter Übereinstimmung mit dem Experiment berechnet werden können.

B. Ilschner.

Nataf, R. et R. Bouchez: Sur les transitions β et la structure nucléaire. II. Considérations théoriques: Probabilités de transition β . J. Phys. Radium 13, 190—199 (1952).

Ableitung der Auswahlregeln und Übergangswahrscheinlichkeiten für den β -Zerfall unter Berücksichtigung des Schalenmodells der Atomkerne und Einführung des Bahndrehimpulses L , vgl. vorsteh. Referat. Diskussion der 5 relativistischen Invarianten für den Kopplungsterm in der Energiedichte; Verff. führen ihre Rechnung lediglich für Tensor-Kopplung durch, welche die Nukleon-Lepton-Wechselwirkung in 1. Näherung ausreichend beschreibt. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für den Übergang eines Nukleons aus einem Zustand (J, L) in (J', L') mit der Methode von Marshak [Phys. Review, II. Ser. 61, 431 (1942)] liefert diese Ausdrücke in Abhängigkeit von ΔJ und ΔL .

B. Ilschner.

Thellung, A.: Höhere mesontheoretische Näherungen zum magnetischen Moment des Protons. Helvet. phys. Acta 25, 307—338 (1952).

Eine ganze Reihe von Autoren stellten in den letzten Jahren an Hand verschiedener Methoden übereinstimmend fest, daß die pseudoskalare Kopplung eines pseudoskalaren Mesonfeldes an ein Nukleon-Dirac-Feld die anomalen magnetischen Momente von Proton und Neutron nicht befriedigend zu erklären gestattet. Allerdings stützten sich diese Resultate auf Störungsrechnungen, welche bis zu Gliedern zweiter Ordnung in der Kopplungskonstante durchgeführt wurden. — Verf. hat für ein reelles Mesonfeld die Rechnungen mit Hilfe des Feynman-Dyson'schen Formalismus bis zur vierten Ordnung in der Kopplungskonstanten durchgeführt. Es zeigt sich, daß auch in dieser Näherung alle Divergenzen durch Renormierung der Massen von Proton und Meson, der elektrischen Ladung sowie der mesischen Ladung des Protons (Kopplungskonstante Meson-Proton-Feld) sich beseitigen lassen. Die Regularisierung wird entsprechend den Vorschriften von Pauli und Villars (dies. Zbl. 37, 125) durchgeführt. Die auftretenden Parameter-Integrationen lassen sich geschlossen nur im Grenzfall

$$\delta^2 = \left(\frac{\text{Meson-Masse}}{\text{Proton-Masse}} \right)^2 = 0$$

durchführen. Tatsächlich ist für π -Mesonen bekanntlich $\delta^2 = 0,022$. — Das Resultat zeigt, daß auch die vierte Ordnung als eine gegenüber der zweiten Ordnung sicher nicht zu vernachlässigende Korrektur des magnetischen Momentes des Protons erscheint; jedoch verkleinert diese Korrektur die Diskrepanz zwischen theoretischem und experimentellem Wert nicht, sondern vergrößert sie sogar. — Verf. vergleicht sein Ergebnis mit demjenigen zweier japanischer Autoren [Nakabayasie u. Sato, dies. Zbl. 43, 427; Tôhoku math. J., I. Ser. 34, 170 (1931)], welche numerische Integrationen der Parameter-Integrale mit $\delta^2 = 0,022$ durchführten. Bis auf einen Term findet er Übereinstimmung innerhalb der Fehlergrenzen. — Es sei erwähnt, daß Verf. zufolge die zitierten japanischen Autoren auch Mischungen von reellen und komplexen Mesonfeldern in Betracht gezogen haben. Es zeigte sich dann, daß die oben erwähnten Schwierigkeiten einer Erklärung der magnetischen Momente der Nukleonen bei geeigneter Mischung der Mesonfelder bis zu einem gewissen Grade verschwinden.

G. Heber.

Adair, Robert K.: Conservation of isotopic spin in nuclear reactions. Phys. Review, II. Ser. 87, 1041—1043 (1952).

De-Shalit, A.: Cosine interaction between nucleons. Phys. Review, II. Ser. 87, 843 (1952).

Werle, J.: The influence of relativistic corrections upon singular nuclear potentials. Phys. Review, II. Ser. 87, 159—160 (1952).

French, J. B. and M. L. Goldberger: The Coulomb scattering of deuterons. Phys. Review, II. Ser. 87, 899—900 (1952).

Austern, N.: Angular distribution in the high energy deuteron photoeffect. Phys. Review, II. Ser. 85, 283—290 (1952).

Huang, Su-Shu: The variational method for problems of neutron diffusion and of radiative transfer. Phys. Review, II. Ser. 88, 50—52 (1952).

Le Levier, Robert E. and David S. Saxon: An optical model for nucleon-nuclei scattering. Phys. Review, II. Ser. 87, 40—41 (1952).

Verzaux, P.: Étude de la section de choc du lithium pour les neutrons. J. Phys. Radium 13, 21—27 (1952).

Hauser, Walter and Herman Feshbach: The inelastic scattering of neutrons. Phys. Review, II. Ser. 87, 366—373 (1952).

Die Verf. teilen die unelastischen Prozesse, entsprechend der Gültigkeit des statistischen Modells für den Compound- und Restkern, in zwei Gruppen ein. In Gruppe I, wenn die Neutronenenergie so klein ist, daß nur einige Niveaus angeregt werden können und der streuende Kern zu den mittleren bis schweren Kernen zählt, kann das statistische Modell nur auf den Compound-Kern angewendet werden. Dann ergibt sich eine anisotrope Verteilung der Neutronen. Sind die Bahndrehimpulse der einfallenden oder gestreuten Neutronen klein gegen $3\hbar$, so kann mittels angegebener Tabellen die Verteilung vorausbestimmt werden. In der Gruppe II wird die Neutronenenergie so groß angenommen, daß viele Niveaus des streuenden Kernes angeregt werden, so daß die statistische Theorie sowohl auf den Compound- als auf den Restkern angewendet werden kann. In diesem Falle werden die unelastisch gestreuten Neutronen isotrop sein. Dann erhält man die bekannte Abhängigkeit der Energieverteilung von der Niveaudichte. — Schließlich werden Beispiele für die Bestimmung der totalen Wirkungsquerschnitte angeführt, die die Abhängigkeit der Ergebnisse von den Quantenzahlen des angeregten Zustandes zeigen. P. Urban.

Hittmair, Otto: Zur inelastischen Streuung in der Kontinuumtheorie. Z. Phys. 132, 553—558 (1952).

Verf. behandelt die unelastische Kernstreuung unter der Voraussetzung der Bildung eines Zwischenkernes. Für die Energieniveaus dieses Compound-Kernes wird die sog. statistische Annahme gemacht, d. h., wenn die Ordnungszahl des Kernes und die Energie des einfallenden Teilchens groß ist, wird die diskrete Folge der Energieniveaus durch ein Kontinuum ersetzt, innerhalb dessen jeder Energiewert Niveaus aller möglichen Spins und beider Paritäten aufweist. Die Berechnung des Wirkungsquerschnittes für Streuvorgänge mit bestimmter Kernspinänderung und Teilchenemission stößt auf Schwierigkeiten, die sich aber umgehen lassen, wenn man den Wirkungsquerschnitt nicht für eine bestimmte Teilchenemission sondern für eine bestimmte γ -Strahlung berechnet. Die unsichere Abschätzung der erforderlichen γ -Übergangswahrscheinlichkeit wird vermieden, indem man das Verhältnis zweier Wirkungsquerschnitte für Streuprozesse mit verschiedenen Einfallsennergien aber gleichem γ -Übergang betrachtet. Als Beispiel wird Cd^{111} untersucht. G. Ecker.

Hittmair, Otto: Die Richtungskorrelationen bei inelastischer Streuung mit folgender Gamma-Strahlung. Z. Phys. 132, 559—564 (1952).

Wie in einer vorausgegangenen Arbeit (siehe vorsteh. Referat) erörtert wurde, vereinfacht und verbessert die Berücksichtigung der γ -Emission die Berechnung der Wirkungsquerschnitte unelastischer Streuprozesse. Die Richtungskorrelation der γ -Strahlung ist außerdem experimentell einfacher zu bestimmen, als ein totaler Wirkungsquerschnitt und hängt in noch stärkerem Maße von den Spins und Pari-

täten der beteiligten Niveaus ab, so daß sich aus entsprechenden Messungen der Winkelverteilung Rückschlüsse auf diese Eigenschaften gewinnen lassen. Zu diesem Zweck bestimmt Verf. zunächst allgemein die Wahrscheinlichkeit für verschiedene Emissions-Richtungen des Teilchens und der γ -Strahlung. Die komplizierte Formel vereinfacht sich wesentlich, wenn man von der Beobachtung des gestreuten Teilchens absieht, d. h. mathematisch, wenn man über alle entsprechenden Richtungen integriert. Unter Zugrundelegung der statistischen Annahme für den Zwischenkern läßt sich dann durch energieempfindliche γ -Messung ein Niveau des angeregten Ausgangskernes festlegen. Als Beispiel dient Cd^{111} . *G. Ecker.*

Ekstein, H.: Scattering by many-body systems in terms of two-body collision parameters. *Phys. Review, II. Ser.* 87, 31—39 (1952).

Die Streuung eines Teilchens an einer Gesamtheit von N Teilchen wird streng beschrieben durch ein System von Gleichungen, welche zwar nicht die Hamiltonschen Wechselwirkungen, aber eine unbegrenzte Zahl von Parametern enthalten, welche den Zusammenstoß je zweier Teilchen charakterisieren. Diese Zweikörperprobleme werden in der üblichen Weise als Potentialstreuung behandelt. Im einfachsten Fall, wo der einzige relevante Parameter die Fermische Streulänge ist, erhält man in erster Näherung das Fermische Ergebnis für die Streuung von Neutronen an Protonen. Im allgemeinen wird das Problem in beliebiger Annäherung durch sukzessive Approximationen gelöst und die Konvergenz des Verfahrens aufgezeigt. Als Anwendungsbeispiel wird die Streuung von langsamen Neutronen in Kristallen diskutiert. *Th. Sestl.*

Weinberg, Alvin M.: Current status of nuclear reactor theory. *Amer. J. Phys.* 20, 401—412 (1952).

Hazen, W. E., R. E. Heineman and E. S. Lennox: Application of the Fermi model to cosmic-ray events of primary energy greater than 10^{13} ev. *Phys. Review, II. Ser.* 86, 198—204 (1952).

Peierls, R. E., K. S. Singwi and D. Wroe: The polynutron theory of the origin of the elements. *Phys. Review, II. Ser.* 87, 46—50 (1952).

Bau der Materie:

Dewar, M. J. S. and H. C. Longuet-Higgins: The correspondence between the resonance and molecular orbital theories. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 214, 482—493 (1952).

Galanin, A. D. und I. Ja. Pomerančuk: Über das Spektrum des μ -Mesohydrogens. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 86, 251—253 (1952) [Russisch].

Gombás, P. und R. Gáspár: Über eine theoretische Begründung der Slaterischen halbempirischen Atomeigenfunktionen. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* 1, 317—324 (1952).

Buckmaster, H. A.: Radial matrix element for the quadrupole transition with the Morse potential. *Canadian J. Phys.* 30, 314—316 (1952).

Treffitz, Eleonore und Ludwig Biermann: Wellenfunktionen und Oszillatorenstärken des Calciumions Ca II : Die Zustände $4s$, $4p$, und $3d$. *Z. Astrophys.* 30, 275—281 (1952).

Mishra, Brahmananda: Wave functions for excited states of mercury and potassium. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 48, 511—515 (1952).

Basierend auf den Rechnungen von Hartree und Hartree [*Proc. Roy. Soc. London, Ser. A.* 149, 210—231 (1935)] werden die Wellenfunktionen für die $(6s)$ (nl) -Terme des neutralen Hg mitgeteilt, wobei $(nl) = (6p)$, $(6d)$, $(7s)$, $(7p)$ und $(7d)$ ist. Es ist die einfache Hartreesche S. C. F.-Gleichung ohne Austausch für die betr. Fälle gelöst und dabei angenommen worden, daß in den $(6s)$ (nl) -Konfigurationen für die (nl) -Funktionen dasselbe Feld benutzt werden darf wie für $(6s)$

in der $(6s)^2$ -Konfiguration. — Bei der Berechnung der $4p$ -Funktion des angeregten K -Atoms ist der Einfluß der Rumpfpolarisation durch das $4p$ -Elektron durch ein Potential der Form

$$V_p(r) = -\alpha/2(r^2 + r_0^2)^2$$

berücksichtigt worden. Die Polarisierbarkeit α und der Rumpfradius r_0 wurde in Übereinstimmung mit experimentellen Daten festgelegt. — Auch hier wurde die S. C. F.-Gleichung ohne Austausch gelöst. In 2 Tabellen werden die Wellenfunktionen des Hg und K wiedergegeben. Die errechnete Energie des K $\varepsilon(4p) = -0,1931 e^2/a_0$ liegt in guter Nähe des experimentellen Wertes $\varepsilon = -0,201 e^2/a_0$. *H. J. Kopineck.*

Ferigle, Salvador M. and Arnold G. Meister: Selection rules for vibrational spectra of linear molecules. *Amer. J. Phys.* **20**, 421—428 (1952).

Lennard-Jones, J. E.: The spatial correlation of electrons in atoms and molecules. II. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **38**, 496—502 (1952).

Sverdlov, L. M.: Eine Beziehung zwischen den Frequenzen der Schwingungen isotroper Moleküle. (Regeln für die Summen von Produkten.) *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **86**, 513—516 (1952) [Russisch].

Freud, G.: Über die Mohrensteinsche Berechnung des H_2 -Moleküls. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **1**, 325—328 (1952).

March, N. H.: Thomas-Fermi fields for molecules with tetrahedral and octahedral symmetry. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **48**, 665—682 (1952).

Suryanarayana Rao, K.: High multiplicity states in diatomic molecules. *Indian J. Phys.* **26**, 254—261 (1952).

Kovács, L.: Über die Berechnung der Rotationskonstanten von zweiatomigen Molekültermen auf Grund von Störungsdaten. III. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **2**, 141—150 (1952).

Kastler, Daniel: Sur le théorème du viriel relatif aux molécules diatomiques. *Ann. Univ. Saraviensis* **1**, 91—92 (1952).

Vincent, J.: Contribution à l'étude de l'intensité des raies et bandes d'absorption dans l'infrarouge. *J. Phys. Radium* **13**, 59—67 (1952).

Erskine, G. A. and H. S. W. Massey: The application of variational methods to atomic scattering problems. II. Impact excitation of the $2s$ level of atomic hydrogen-distorted wave treatment. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **212**, 521—530 (1952).

Friedel, J.: X-ray transition probabilities with special reference to K absorption in lithium. *Philos. Mag., VII. Ser.* **43**, 1115—1139 (1952).

Schmitz, Georg: Rechnungen zur elektrodenstabilisierten Bogenentladung. *Z. Phys.* **132**, 23—29 (1952).

Man nennt eine Bogenentladung „wandstabilisiert“, wenn sie in einem gegen den Elektrodenabstand engen Rohr brennt und ihre (zylindrische) Gestalt bestimmt ist durch die Wärmeabgabe zur Rohrwand. Brennt die Entladung frei, ist also die begrenzende Wand sozusagen ins Unendliche gerückt, so ist eine Stabilisierung durch die ins Unendliche abfließende Wärme nur zu verstehen, wenn die Bogensäule endlicher Länge von Elektroden begrenzt wird; man nennt sie deshalb „elektrodenstabilisiert“. Solche Bogen haben die Gestalt gestreckter Ellipsoide und zu ihrer Beschreibung sind deshalb elliptische Koordinaten geeignet. Die Theorie der wandstabilisierten Bogen führt auf die bereits in zahlreichen Untersuchungen integrierte Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung, die der elektrodenstabilisierten Bogen auf eine analoge Gleichung, die in der vorliegenden Arbeit integriert wird. Sie reduziert sich in elliptischen Koordinaten μ, ν, φ bei achsialer Symmetrie in der Mittelebene des Bogens zu

$$\frac{d}{d\mu}(\mu^2 - 1) R \frac{dT}{d\mu} = \frac{a^2}{4} \mu^2 (s - n e b_e \mathfrak{E}_v^2),$$

worin die Trägerdichte n aus der Saha-Gleichung und die Strahlungsdichte s aus dem üblichen Exponentialansatz als Funktionen der Temperatur und des Druckes einzusetzen sind. Führt man statt T eine reduzierte Temperatur ϑ ein, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{d}{d\mu}(\mu^2 - 1) \frac{d\vartheta}{d\mu} = F(\vartheta)$$

mit den Randbedingungen

$$\mu = \infty, \quad \vartheta = \vartheta_{\infty}; \quad \mu = 1 \quad \text{grad}_{\mu} \vartheta = 0.$$

Die Gleichung wird numerisch integriert für einige Parameterwerte und die Lösungen werden diskutiert und mit den Lösungen für den wandstabilisierten Bogen verglichen, wobei insbesondere der Vergleich mit den experimentellen Befunden von Steenbeck an einem freifallenden d. h. konvektionsfreien Bogen von Interesse ist. (Dies alles leider in reichlich kurzer Darstellung.)

R. Seeliger.

Ecker, G.: Der Einfluß der Kontraktion auf den Temperatur- und Feldstärkeverlauf vor der Kathode. Z. Phys. 132, 248—260 (1952).

In den kathodischen Entladungsteilen eines Lichtbogens nimmt der Entladungsquerschnitt gegen die Kathode hin zuerst allmählich, dann unmittelbar vor dieser sehr schnell bis auf einen fast punktförmigen Bereich (Brennfleck) ab; mit dieser Brennfleckbildung hängt nach den Untersuchungen von Weizel, Rompe und Schön und von Weizel und Thouret der um eine Größenordnung gegenüber dem der Glimmentladung kleinere Kathodenfall zusammen. Dieser kleine Kathodenfall liegt in einem Raumladungsgebiet unmittelbar vor der Kathode, dessen Dicke nur von der Größenordnung einer freien Weglänge ist. Das Raumladungsgebiet ist theoretisch bereits untersucht. Hier wird nun die Theorie des ausgedehnten sog. Kontraktionsgebietes entwickelt, in dem die Kontraktion des Säulenquerschnitts auf den im Raumladungsgebiet vor sich geht. Numerisch ergibt sich z. B. für einen Quecksilberbogen bei einem Druck von 35 Atm, einer Stromstärke von 6 A und einem Säulengradienten von 170 V/cm eine Kontraktion auf $1/200$ des Säulenquerschnitts, ein Anwachsen der Stromdichte auf 35000 A/cm² und eine Steigerung der Temperatur auf das 1,5fache der Säulentemperatur in befriedigender Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden. Mathematisch handelt es sich um die Lösung des Gleichungssystems

$$\text{rot } \mathfrak{E} = 0, \quad \text{div } \mathfrak{E} = 0, \quad \text{div } i = 0, \quad i = e b_e n \mathfrak{E} + e D_e \text{grad } n,$$

$$\mathfrak{E} i = S - \text{div } \{x \text{ grad } T\} - U_i \text{div } i_e; \quad n = \gamma_i \exp \{-e U_i / 2 k T\}, \quad S = \gamma_A \exp \{-e U_A / k T\}$$

für die fünf Größen \mathfrak{E} = Feldstärke, i = Stromdichte, n = Trägerdichte, T = Temperatur und S = spez. Ausstrahlung; die übrigen Größen sind Konstante. Diese Gleichungen und die Randbedingungen genügen noch nicht zu einer eindeutigen Festlegung der Sachlage. Es wird deshalb noch das Steenbecksche Minimumprinzip hinzugenommen, aber es ergeben sich bei dieser allgemeinen Problemstellung unüberwindliche Schwierigkeiten. Verf. baut daher die Lösung sozusagen schrittweise unter Verwertung physikalisch jeweils erlaubter Vereinfachungen auf und zwar in einem der Sachlage angepaßten orthogonalen krummlinigen rotationssymmetrischen Koordinatensystem.

R. Seeliger.

Gabor, D.: Wave theory of plasmas. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 213, 73—86 (1952).

Die Arbeit liefert insofern einen wichtigen Hinweis zur Lösung des schon vielfach, bisher jedoch stets mit negativem Erfolg diskutierten Problems der Kürze der Langmuirschen Relaxationsstrecke der Elektronen in einem Plasma, als gezeigt werden kann, daß der Energie- und Impulsaustausch der Elektronen mit den ungeordneten Plasmawellen zu einer quantitativen Erklärung ebenfalls nicht ausreicht, und man sich nun zu der Vermutung veranlaßt sieht, daß dabei geordnete Wellen eine Rolle spielen müssen. — Das Mikrofeld des Plasmas wird zerlegt in einen Anteil, der von den Feldern einzelner Ladungsträger herrührt, und in einen Anteil, der von der gleichzeitigen Wirkung vieler Träger aus größeren Entfernungen stammt. Dieser letztere wird aufgefaßt als Superposition von sich regellos durchkreuzenden Wellen und sein Energiespektrum nach der klassischen Methode von Jeans untersucht. Wo dieses Spektrum nach oben hin abzuschneiden ist, kann abgeschätzt werden, wozu ergänzend auch thermodynamische Betrachtungen über den maximal möglichen Energieinhalt der Wellen herangezogen werden. Die seinerzeit viel besprochene Untersuchung des Verf. von 1933 findet also nun in der vorliegenden ihre befriedigendere Neufassung.

R. Seeliger.

Bernard, Michel: Expression du champ électromagnétique dans les accélérateurs linéaires d'ions. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1862—1865 (1952).

Csada, I. K.: On the magnetic effects of turbulence in ionized gases. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 1, 235—246 (1952).

Turbulente Strömungen in Plasmen können Anlaß zu lokalen fluktuierenden Magnetfeldern geben. Ähnlich wie in einer Arbeit von Batchelor (dies. Zbl. 40,

142) werden aus den Gleichungen der Hydro- und Elektrodynamik die beiden Grundgleichungen der „Magnetohydrodynamik“ abgeleitet und auf eine symmetrische Form gebracht. Unter Verwendung einer von Batchelor gefundenen Analogie zwischen Wirbelstärke (rot v) und Magnetfeld können diese Gleichungen auf turbulente Strömungen übertragen werden. Hierbei tritt ein Koeffizient auf, der als turbulenter Viskositätskoeffizient gedeutet werden muß. In Übertragung eines entsprechenden Zusammenhanges zwischen den molekularen Größen können dieser turbulenten Viskosität eine turbulente Leitfähigkeit und turbulente Permeabilität zugeordnet werden. Die größenordnungsmäßige Abschätzung dieser Koeffizienten erscheint dem Ref. nicht überzeugend.

G. Burkhardt.

Boer, J. de: Theories of the liquid state. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 215, 4—29 (1952).

Kronig, R., A. Thellung and H. H. Woldringh: On the theory of the propagation of sound in He II. Physica 18, 21—32 (1952).

Die phänomenologische Theorie der Bi-Flüssigkeit wird für das He II angesetzt. Für die Umwandlung des normalflüssigen Anteils in den superfluiden und umgekehrt wird eine nicht verschwindende Relaxationszeit angenommen. Unter Berücksichtigung der Viskosität und der Wärmeleitfähigkeit der normalflüssigen Komponente und der Volumen- und Druckabhängigkeit des Gleichgewichts zwischen beiden Komponenten des He II wird dann die Dämpfung der normalen Schallwellen berechnet. Vergleich mit experimentellen Werten zeigt, daß die Relaxationszeit in der Nähe des λ -Punktes $\lesssim 10^{-12}$ s oder $\gtrsim 10^{-4}$ s angenommen werden muß. — Auf derselben Grundlage wird der Temperatursprung an einer materiellen Oberfläche für stationären Wärmefluß behandelt.

J. Meixner.

Krishnan, K. S. and S. K. Roy: Evjen's method of evaluating the Madelung constant. Phys. Review, II. Ser. 87, 581—582 (1952).

Nabarro, F. R. N.: The mathematical theory of stationary dislocations. Advances Phys., Quart. Suppl. philos. Mag. 1, 269—394 (1952).

Verf. gibt eine vollständige Übersicht über die Theorie ruhender Versetzungen. Zunächst werden die Versetzungen des elastischen Kontinuums behandelt, ausführlich diskutiert werden: Bewegungsmöglichkeiten einer Versetzung, Wechselwirkung mit äußeren und inneren Spannungen und Oberflächen, stabile Versetzungsanordnungen sowie Probleme der Aktivierungsenergie verschiedener Modelle. Im zweiten Teil wird auf die Gittertheorie der Versetzungen näher eingegangen, speziell auf die Peierls'sche Näherung und verwandte Probleme, sowie auf die in einem Gitter möglichen Versetzungsstrukturen. Ausführliches Lit.-Verzeichnis aller bisher erschienenen Arbeiten.

G. Leibfried.

Jaswon, M. A. and A. J. E. Foreman: The non-Hookean interaction of a dislocation with a lattice inhomogeneity. Philos. Mag., VII. Ser. 43, 201—220 (1952).

Gleichgewichtslagen und Spannungsverhältnisse von Stufenversetzungen in Nähe von Gitterstörungen (Korngrenze, Riß) werden untersucht. Die Peierls'sche Integralgleichung wird für diese Fälle durch ein Näherungsverfahren gelöst.

G. Leibfried.

Karunes, B.: On the distribution of initial stress due to dislocation in an infinite plate containing two unequal circular holes. Indian J. Phys. 26, 317—328 (1952).

Cottrell, A. H.: The formation of immobile dislocations during slip. Philos. Mag., VII. Ser. 43, 645—647 (1952).

Ein spezieller Fall einer Versetzungsreaktion im kubisch flächenzentrierten Gitter wird diskutiert. Dieser, bereits von Lomer behandelte, Fall wird vom Verf. dahingehend erweitert, daß er auch Halbversetzungen in Betracht zieht. Die Reaktion zweier Versetzungen in verschiedenen Gleitebenen führt zu einem räumlich

fixierten Reaktionsprodukt und damit zu einem Hindernis für die normalen beweglichen Versetzungen, was für die Theorie der Verfestigung von Wichtigkeit ist.

G. Leibfried.

Jones, H.: A calculation of the elastic shear constante of β -brass. Philos. Mag., VII. Ser. 43, 105—112 (1952).

Der Beitrag der Fermi-Energie zum Schubmodul von β -Messung in der (110)-Ebene und in (110)-Richtung wird abgeschätzt. Die Brillouin-Zone wird bei einer Scherung deformiert, dadurch wird auch die Fermi-Energie beeinflusst, vorausgesetzt, daß die Oberfläche der Brillouin-Zone noch mit Elektronenzuständen besetzt ist. Der Hauptanteil zur elastischen Energie wird von der Fermi-Energie geliefert, damit ist auch der Fermi-Anteil der Energie verantwortlich für die Stabilität gegen die obige Scherung.

G. Leibfried.

Stora, Cécile: Étude théorique de l'influence, en faisceau divergent, de l'absorption dans le bâtonnet et des conditions expérimentales sur l'homogénéité des raies de Debye-Scherrer et Hull. J. Phys. Radium 13, 28—34 (1952).

Scott, W. T.: Mean-value calculations for projected multiple scattering. Phys. Review, II. Ser. 85, 245—248 (1952).

Galloni, Ernesto E.: Röntgeninterferenzen an Bündeln parallel angeordneter Kettenstrukturen, welche längs ihrer eigenen Achse verschoben sind. Anais Acad. Brasil. Ci. 24, 203—212 (1952).

Vol'kenštejn, M. V. und O. B. Pticyn: Rotationsisomere Theorie des Schmelzens von kristallinen Polymeren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 677—680 (1952) [Russisch].

Fues, E. und H. Statz: Ersatzpotentiale mit verwandtem Eigenwertspektrum in Schrödinger-Gleichungen. Z. Naturforsch. 7a, 2—9 (1952).

Verff. untersuchen die Frage, weshalb man in manchen Metallen die Valenzelektronen als fast freies Elektronengas behandeln darf, obwohl in der Umgebung der Atomkerne (im Inneren des Atomrumpfes) tiefe Potentialmulden vorhanden sind. Am ein- und dreidimensionalen Fall wird dargelegt, daß die Eigenfunktion eines Valenzelektrons als Folge einer Mulde einige radiale Knoten besitzt. Man kann nun zu einem Ersatzpotential übergehen, indem man innerhalb einer Kugel den Potentialverlauf der Mulde durch konstantes Potential ersetzt. Wählt man den Kugelradius so, daß die wahre Wellenfunktion in ihr gerade eine stehende Welle mit verschwindender Normalableitung ist, dann hat der Übergang zum Ersatzpotential einfach das Herausschneiden dieser stehenden Welle aus der Wellenfunktion des Valenzelektrons zur Folge, und die Schnittränder können stetig zusammengefügt werden. Somit wird die Wellenfunktion außerhalb der Mulde, und ebenso das Energiespektrum, durch die Verstümmelung kaum verändert. Das entstehende Ersatzpotential ist räumlich nur wenig veränderlich, und läßt daher fast ebene Wellen als Lösung zu.

Walter Franz.

Artmann, Kurt: Wellenmechanische Theorie der Kristalloberfläche unter dem Einfluß der Metallelektronen. Z. Phys. 131, 244—268 (1952).

Verf. baut die Goodwinsche Theorie des begrenzten Kristalls aus und gelangt zu folgenden Ergebnissen: Falls die am Rand gelegenen Potentialmulden sich beträchtlich von den inneren unterscheiden, kann eine Oberflächenwelle im verbotenen Energieband nur auftreten, wenn die angrenzenden erlaubten Bänder sich nicht zu nahe kommen; dies sind die Oberflächenwellen, welche der Tammschen Theorie entsprechen. Unterscheiden sich dagegen die Randmulden nur wenig oder gar nicht von den inneren, dann treten Oberflächenwellen im verbotenen Band nur bei geringem Abstand der erlaubten Energiebänder auf; Wellen dieser Art wurden erstmals von Shockley behandelt. Die Tammschen Wellen sind aus dem unteren, die Shockleyschen aus dem oberen Energieband entnommen (in diesen Bändern fehlt also die entsprechende Anzahl Zustände). Im Isolator entsteht daher eine Ober-

flächen-Leitfähigkeit, wenn sich die Energien der Tammischen Wellen mit dem oberen (Leitungs-) Band, oder die der Shokleyschen mit dem unteren (Valenz-) Band überlappen; dann werden nämlich die Shokleyschen Zustände mit Elektronen aus dem Valenzband bzw. die Tammischen Zustände mit Defektelektronen aus dem Leitungsband belegt.

Walter Franz.

Kockel, B.: Energiebänder und Zwischenbandterme im gestörten Kronig-Potential. Z. Naturforsch. **7a**, 10—16 (1952).

Im eindimensionalen Kronigschen Gitter stellt Verf. eine Störstelle dar, indem er in einer Zelle das Potential durch einen konstanten Zusatz V_0 verändert. Die Energieniveaus eines in der Umgebung dieser Störstelle gebundenen Elektrons werden bestimmt. Dabei zeigt sich, daß stets einzelne Störniveaus in den verbotenen Energiebändern vorhanden sind, welche mit wachsendem V_0 aus dem oberen Rande der erlaubten Bänder austreten, das verbotene Band durchwandern, um schließlich im unteren Rand des nächsthöheren Bandes zu verschwinden. Die Energiewerte der erlaubten Bänder bleiben auch für das gestörte Gitter erlaubt. *Walter Franz.*

Homilius, Joachim: Zur Theorie der inneren Feldemission. Z. Naturforsch. **7a**, 290—291 (1952).

Coulson, C. A. and R. Taylor: Studies in graphite and related compounds. I. Electronic band structure in graphite. Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 815—825 (1952).

Duncanson, W. E. and C. A. Coulson: Studies in graphite and related compounds. II. Momentum distribution in graphite. Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 825—833 (1952).

Taylor, R. and C. A. Coulson: Studies in graphite and related compounds. III. Electronic band structure in boron nitride. Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 834—838 (1952).

Silverman, Richard A.: Fermi energy of metallic lithium. Phys. Review, II. Ser. **85**, 227—230 (1952).

Gombás, P.: Zur Theorie der Edelmetalle und der Alkalimetalle. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. **1**, 301—316 (1952).

Nedoluha, A. und K. M. Koch: Zum Mechanismus der Widerstandsänderung im Magnetfeld. Z. Phys. **132**, 608—620 (1952).

Dingle, R. B.: Some magnetic properties of metals. I. General introduction, and properties of large systems of electrons. II. The influence of collisions on the magnetic behaviour of large systems. III. Diamagnetic resonance. IV. Properties of small systems of electrons. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **211**, 500—516, 517—525, **212**, 38—47, 47—65 (1952).

I. Als eine Art Einleitung für eine Reihe von Untersuchungen über das magnetische Verhalten von nichtferromagnetischen Metallen wird im I. Teil im wesentlichen die Landausche Theorie des Diamagnetismus eines Gases von freien Elektronen wiederholt für den Fall, daß die Gefäßdimensionen groß sind gegenüber dem maximalen Radius der klassischen Kreisbahn der Elektronen im Magnetfeld. Als neu erscheint die Auswertung der Zustandssumme vermittle der Poissonschen Summenformel. Dabei kommt Verf. zum (bekannten) Resultat, daß sich die Suszeptibilität additiv aus einem mit dem Magnetfeld langsam veränderlichen Anteil und einem bei tiefen Temperaturen wesentlich werdenden, stark mit H oszillierten Anteil (de Haas-van Alphen-Effekt) zusammensetzt. Die durch Kristallanisotropie und Energiebänder bedingten Zusatzeffekte werden nicht diskutiert. — **II.** Berücksichtigt man in der Theorie des Diamagnetismus freier Metallelektronen die endliche Leitfähigkeit des Metalls, so werden die Energiezustände der Elektronen im Magnetfeld unscharf. Setzt man für diese Unschärfe eine Dispersionsverteilung mit einer Dämpfungskonstante \hbar/τ ein, wobei τ die mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstößen eines Elektrons mit dem Metallgitter bedeutet, so findet man nur eine schwache Änderung im unperiodischen Anteil der Suszeptibilität, während die Amplitude ihres stark veränderlichen Anteils (de Haas-van Alphen-Effekt) um einen Faktor $\exp(-2\hbar/\tau \mu H)$ reduziert wird, wobei μ das effektive magnetische Moment $e\hbar/2mc$ bedeutet. — **III.** Das Energiespektrum eines freien Metallelektrons in einem konstanten Magnetfeld ist, sofern man von dem Anteil der Bewegung in der Feldrichtung absieht, gegeben durch die Oszillatorterme $E_n =$

$\mu H(2n+1)$, wobei $\mu = e\hbar/2mc$ ist und n eine ganze Zahl bedeutet. Dabei kann m als die effektive Elektronenmasse im Sinne des Bändermodells angesehen werden. Verf. untersucht nun die zu erwartenden Verhältnisse bei der Einstrahlung einer elektromagnetischen Welle für den Fall, daß die Strahlungsfrequenz in der Nähe der Resonanzfrequenz $\omega - eH/mc$ liegt. Der Absorptionskoeffizient und die Linienverbreiterung werden berechnet. — IV. Die Landausche Berechnung des diamagnetischen Verhaltens eines Gases freier Elektronen beruht auf der Annahme, daß die Radien der bei klassischer Betrachtung auftretenden Kreisbahnen der Elektronen im Magnetfeld klein gegenüber den Gefäßdimensionen sind. Ist dies nicht der Fall, liegen also entweder sehr kleine Gefäßdimensionen oder entsprechend niedrige magnetische Feldstärken vor, so hat man den Einfluß der Gefäßwand auf die Energieterme der Elektronen genauer zu berücksichtigen. Verf. führt diese Rechnung in Form eines Störungsverfahrens durch, und zwar erstens für einen sehr dünnen Zylinder, zweitens für eine sehr kleine Metallkugel, und findet in beiden Fällen eine wesentliche Erhöhung des langsam veränderlichen diamagnetischen Anteils der Suszeptibilität, während der oszillatorische Anteil des de Haas-van Alphen-Effektes in unübersichtlicher Weise moduliert wird. *F. Sauter.*

Fieber, H., A. Nedoluha und K. M. Koch: Die Anomalie der galvano- und thermomagnetischen Transversaleffekte. *Z. Phys.* 131, 143—155 (1952).

Consider a metal strip with its surface in the xy -plane, subjected to a magnetic field H in the z -direction and carrying an electric current J_x or a thermal current w_x in the x -direction. Transverse galvano- and thermomagnetic effects will then arise in a metal, their magnitudes being defined by appropriate coefficients. The authors use the following definitions: (1) $J_x \neq 0$, $J_y = 0$. A transverse electric field F_y exists. The Hall coefficient is defined as $R = F_y/HJ_x$. (2) $J_x \neq 0$, $w_y = 0$. A transverse temperature gradient $\partial T/\partial y$ exists. The Ettinghausen coefficient is defined as $P = (\partial T/\partial y)/HJ_x$. (3) $\partial T/\partial x \neq 0$, $J_y = 0$. A field F_y is again produced. The Nernst coefficient is defined as $Q = F_y/H(\partial T/\partial x)$. (4) $\partial T/\partial x \neq 0$, $w_y = 0$. A gradient $\partial T/\partial y$ is again produced. The Righi-Leduc coefficient is defined as $S = (\partial T/\partial y)/H(\partial T/\partial x)$. (There is an obvious misprint in connection with this definition in the paper under review). The authors apply the theory of metals to explain the empirically observed fact that the pairs of coefficients (R, S) , (P, Q) have always like signs. They assume free electrons and assume a time of relaxation to exist. Their considerations have been anticipated by E. H. Sondheimer (this *Zbl.* 32, 141) who, in the course of a more general investigation, covered the case considered by the present authors. For this case he concluded that R and S are negative, that the latter decreases in magnitude as the temperature increases, that P and Q are negative at high temperatures, and that they reverse in sign at a very low temperature. *P. T. Landsberg.*

Callen, Herbert B.: A note on the adiabatic thermomagnetic effects. *Phys. Review*, II. Ser. 85, 16—19 (1952).

Landsberg, P. T.: Further results in the general theory of barrier layer rectifiers. *Proc. phys. Soc., Sect. B* 65, 397—409 (1952).

Die allgemeine Theorie der Sperrschichtgleichrichter in der vom Verf. angegebenen Gestalt (siehe dies. *Zbl.* 43, 445; 2 Referate) wird zur Deutung verschiedener experimentellen Ergebnisse herangezogen: Temperaturabhängigkeit der Trägerbeweglichkeit und der Gleichrichtercharakteristik, Gestalt der Charakteristik, Energietransport und zeitliche Veränderung der Stromstärke. Die Übereinstimmung ist befriedigend. *Walter Franz.*

Landsberg, P. T.: On the diffusion theory of rectification. *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A 213, 226—237 (1952).

Blakemore, J. S.: The parameters of partially degenerate semiconductors. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 65, 460—461 (1952).

Shockley, W. and W. T. Read, jr.: Statistics of the recombinations of holes and electrons. *Phys. Review*, II. Ser. 87, 835—842 (1952).

Brauer, Peter: Über gittertheoretische Berechnung der Energie von Störstellen in einfachen Ionenkristallen. *Z. Naturforsch.* 7a, 372—379 (1952).

Friedel, J.: The distribution of electrons round impurities in monovalent metals. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **43**, 153—189 (1952).

Dexter, D. L.: Scattering of electrons from point singularities in metals. *Phys. Review*, II. Ser. **87**, 768—777 (1952).

Dexter, D. L.: Scattering of electrons in metals by dislocations. *Phys. Review*, II. Ser. **86**, 770—774 (1952).

Wheland, G. W. and Sheldon L. Matlow: Some comments on the London-Brooks treatment of diamagnetic anisotropy. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **38**, 364—371 (1952).

Krishnan, K. S. and P. G. Klemens: The temperature variation of the thermodynamic potential of a degenerate electron gas. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **43**, 1224—1226 (1952).

Sondheimer, E. H.: A note on the diamagnetism of free electrons. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **48**, 744—746 (1952).

Zimmermann, Wolfhart: Zur Thermodynamik eines Fermi-Gases mit Wechselwirkung. *Z. Phys.* **132**, 1—22 (1952).

Es wird eine Methode angegeben, mit welcher sich die Thermodynamik eines Fermigas behandelt läßt, zwischen dessen Teilchen eine durch eine Potentialfunktion im Impulsraum beschreibbare Zweikörperkraft herrscht. Die Methode wird dann angewandt auf die von Fröhlich neuerdings zur Erklärung der Supraleitung herangezogene Wechselwirkung durch Austausch von Gitterschallquanten. (Es ist allerdings zu bemerken, daß diese Wechselwirkung nicht die vorausgesetzte Form hat: sie enthält noch Außerdiagonalterme, die in vorliegender Methode einfach ignoriert werden, bei nicht-verschwindender Temperatur indessen Beiträge ergeben.) Die charakteristischen Anomalien der spezifischen Wärme bei Supraleitern werden so nicht erhalten, und Verf. zieht den Schluß, daß die Fröhlichsche Theorie der Supraleitung in ihrer vorliegenden Form noch wesentlich ungenügend ist.

M. R. Schafroth.

Klein, O.: Theory of superconductivity. *Nature* **169**, 578—579 (1952).

Koppe, H.: Volumenänderung von Supraleitern. *Z. Naturforsch.* **72**, 445 (1952).

Adams II, Edward N.: Bardeen's theory of superconductivity and the f -sum rule. *Phys. Review*, II. Ser. **86**, 258—259 (1952).

Maxwell, E.: Similarity properties of the two-fluid model of superconductivity. *Phys. Review*, II. Ser. **87**, 1126—1127 (1952).

Aprikosov, A. A.: Bestimmung der Größe der dielektrischen Durchlässigkeit und der normalen Leitfähigkeit von Supraleitern. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **86**, 43—46 (1952) [Russisch].

Takagi, Yutaka: Ferroelectricity and antiferroelectricity of a crystal containing rotatable polar molecules. *Phys. Review*, II. Ser. **85**, 315—324 (1952).

Stevens, K. W. H.: Matrix elements and operator equivalents connected with the magnetic properties of rare earth ions. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **65**, 209—215 (1952).

Becker, R.: Eine Bemerkung zur Massenträgheit der Blochwand. *Z. Phys.* **133**, 134—139 (1952).

Verf. weist mittels einer sehr übersichtlichen dynamischen Überlegung nach, daß eine Blochwand in einem Ferromagnetikum eine zeitlich konstante Beschleunigung erleidet, nachdem ein äußeres, zeitlich konstantes Magnetfeld geeigneter Richtung eingeschaltet worden ist. Dieses Bewegungsgesetz der Blochwand ermöglicht es, einer solchen Wand in Analogie zur Mechanik eine träge Masse zuzuschreiben. Die auf diesem dynamischen Wege hergeleitete Formel für die träge Masse der Blochwand pro Flächeneinheit läßt sich auch durch eine rein energetische Überlegung gewinnen, bei welcher man auf die „kinetische Energie“ der Wand achtet. Das Ergebnis ist im Einklang mit dem Resultat einer umfangreicheren entsprechenden Rechnung von Döring (dies. Zbl. **34**, 140).

G. Heber.

Herring, Conyers: Energy of a Bloch wall on the band picture. I. Spiral approach. Phys. Review, II. Ser. 85, 1003—1011 (1952).

Verf. befaßt sich mit dem Einfluß der Austauschenergie auf die Energie einer Blochwand im Falle der Benutzung Hund-Mullikenscher Funktionen als Eigenfunktionen der ferromagnetischen Elektronen. Das Problem war bekanntlich bisher nur unter Zugrundelegung von Heitler-London-Funktionen für diese Elektronen behandelt worden. — Verf. berechnet die Änderung der Gesamtenergie (abgesehen von der Korrelationsenergie) des ferromagnetischen Systems, wenn der nur ortsabhängige Teil der Eigenfunktion der einzelnen Elektronen unverändert bleibt, aber der spinabhängige Teil der Eigenfunktionen ortsabhängig wird, derart, daß sich die Spinrichtung im Mittel (über alle Elektronen) von Ort zu Ort langsam dreht. Diese Drehung des mittleren Spins erfolgt so, daß innerhalb zueinander paralleler Ebenen alle Spins untereinander parallel sind, aber in benachbarten Ebenen um einen Winkel $d\varphi$ verdreht sind, welcher vom senkrechten Abstand der Ebenen dz linear abhängt. Verf. zeigt, daß in zwei einfachen Grenzfällen die erwähnte Änderung der Gesamtenergie von $(d\varphi/dz)^2$ abhängt, ganz wie im Heitler-London-Modell. Der Koeffizient bei $(d\varphi/dz)^2$ ist ein Maß für den Beitrag der Austauschenergie zur Energie der Blochwand und läßt sich genähert bestimmen. Es ergeben sich für diesen Koeffizienten Werte, welche in der Größenordnung der experimentellen liegen. *G. Heber.*

Herring, Conyers: Energy of a Bloch wall on the band picture. II. Perturbation approach. Phys. Review, II. Ser. 87, 60—70 (1952).

Das in einer vorhergehenden Arbeit des Verf. (vorsteh. Referat) etwas phänomenologisch behandelte Problem wird hier quantenmechanisch untersucht. Mittels der Störungstheorie wird genähert die Energie-Änderung des ferromagnetischen Grundzustandes bestimmt, welche ein schwaches magnetisches Feld verursacht. Dieses Feld soll speziell in y -Richtung liegen; seine Größe soll vom Ort r innerhalb des Kristalles gemäß $\sin fr$ abhängen. Der Spin der gestörten Eigenfunktionen verhält sich dann ähnlich wie der Spin innerhalb einer Blochwand und man kann die fragliche Energiedifferenz in Beziehung zum Beitrag der Austauschenergie zur Blochwandenergie setzen. Eine Abschätzung gibt für diesen Beitrag die richtige Größenordnung. Verf. diskutiert ferner die Beziehung seiner gestörten Eigenfunktionen zu den bekannten Spinwellenzuständen in Ferromagnetika. *G. Heber.*

Potts, R. B.: Spontaneous magnetization of a triangular Ising lattice. Phys. Review, II. Ser. 88, 352 (1952).

Yang, C. N.: The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model. Phys. Review, II. Ser. 85, 808—816 (1952).

Mit Hilfe eines recht komplizierten mathematischen Apparates, welcher auf Onsager [Phys. Review II. Ser. 65, 117 (1944)] und andere zurückgeht, wird die spontane Magnetisierung M unterhalb des Curie-Punktes des quadratischen Flächengitters bei Ising-Kopplung exakt berechnet. Die erhaltene $M(T)$ -Kurve unterscheidet sich schon qualitativ wesentlich von der von Klein und Smith [Phys. Review II. Ser. 81, 378 (1951)] auf der Basis der Spinwellentheorie (d. h. also mit Heisenberg-Kopplung) für tiefe Temperaturen T hergeleiteten $M(T)$ -Kurve. Bei letzterer setzt unmittelbar oberhalb des absoluten Nullpunktes $T = 0$ ein starker linearer Abfall von M ein, während bei ersterer $M(T)$ bis zu etwa $3/4$ der Curie-Temperatur den Sättigungswert $M(0)$ praktisch behält und erst dann steil abfällt. Man muß diesen Unterschied wohl den verschiedenen zugrunde gelegten Kopplungstypen zuschreiben, von denen sicher der Heisenbergsche eine wesentlich bessere Näherung an die Wirklichkeit darstellt als der Isingsche. *G. Heber.*

Martin, B. and D. ter Haar: Statistics of the three-dimensional ferromagnet. I. The variational method. Physica 18, 569—581 (1952).

Zustandssumme mittlere Energie und spez. Wärme eines dreidimensionalen Ferromagneten mit Isingscher Spin-Kopplung zwischen nächsten Nachbarn werden für hohe Temperaturen (relativ zum Curie-Punkt) genähert bestimmt. Es wird die Onsagersche Methode [Phys. Review, II. Ser. 65, 117 (1944)] zur Bestimmung der Zustandssumme auf diesen Fall übertragen. Bekanntlich ist die erwähnte Methode wesentlich 2-dimensionalen Natur; ihre Ausdehnung auf 3-Dimensionalen ist Verf. durch Einführung einiger vereinfachender Annahmen näherungsweise gelungen. Es

handelt sich vor allem um die Bestimmung des größten Eigenwertes einer Matrix mittels der Ritzschen Methode, wobei die Schar der zur Konkurrenz zugelassenen Eigenvektoren in bestimmter Weise eingeschränkt wird. Allerdings dürfte schwer zu sagen sein, welche physikalische Bedeutung diese abstrakt mathematisch formulierten Vereinfachungen besitzen.

G. Heber.

Kaplan, Harvey: A spin-wave treatment of the saturation magnetization of ferrites. *Phys. Review*, II. Ser. 86, 121 (1952).

Néel, Louis: Influence de la subdivision en domaines élémentaires sur la perméabilité en haute fréquence des corps ferromagnétiques conducteurs. *Ann. Inst. Fourier* 3, 301—319 (1952).

Die (komplexe) Hochfrequenz-Permeabilität metallischer Ferromagnetika wird berechnet. Es werden alle Trägheitseffekte der Blochwände vernachlässigt, nur auf die wegen der Verschiebungen und Deformationen der Blochwände entstehenden Wirbelströme wird geachtet. Verf. zeigt, daß im Bereich der interessierenden Größe der Weißschen Bezirke die Blochwände in guter Näherung als beliebig leicht verbiegbare angesehen werden können, was im Gegensatz zu Kittels Voraussetzung [*Phys. Review*, II. Ser. 70, 281 (1946)] in einer entsprechenden Rechnung steht.

G. Heber.

Rezanov, A. I.: Über die Wärmeeigenschaften und die thermoelektrischen Eigenschaften der ferromagnetischen Metalle. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 82, 885—887 (1952) [Russisch].

Verf. schließt an eine Arbeit von Vonsovskij. [*Žurn. eksper. teor. Fiz.* 16, 981 (1946)] an, in welcher dieser die Austauschwechselwirkung der 3 *d*-Elektronen mit den 4 *s*-Elektronen der ferromagnetischen Metalle berücksichtigte. Diese Wechselwirkung wird verantwortlich gemacht für gewisse Anomalien im Verhalten der 4 *s*-Elektronen in der Umgebung des Curiepunktes; so konnte Vonsovskij die experimentellen Ergebnisse betreffs der Anomalie des elektrischen Widerstandes der Ferromagnetika am Curiepunkt erklären. Verf. gibt in Ausdehnung der Arbeit Vonsovskijs Formeln an für Wärmeleitfähigkeit, Thermokraft eines Paares, bestehend aus einem ferromagnetischen und einem nichtferromagnetischen Metalle, Peltiersche Wärme und Thomsonschen Koeffizienten ferromagnetischer Metalle. Es wird festgestellt, daß die Formeln qualitativ mit den Messungen übereinstimmen bis auf die Peltier-Wärme, für welche experimentelle Ergebnisse fehlen. — Leider wird auf quantitative Vergleiche verzichtet, welche vielleicht eine Bestimmung der Stärke der Austauschkopplung der 4 *s*- mit den 3 *d*-Elektronen ermöglichen könnten.

G. Heber.

Wangsness, Roald K.: Magnetic resonance in a system containing two magnetic sublattices. *Phys. Review*, II. Ser. 86, 146—148 (1952).

Ochsenfeld, Robert: Der Antiferromagnetismus. *Z. angew. Phys.* 4, 350—360 (1952).

Bericht.

Kramers, H. A.: On the quantum theory of antiferromagnetism. *Physica* 18, 101—103 (1952).

Anderson, P. W.: An approximate quantum theory of the antiferromagnetic ground state. *Phys. Review*, II. Ser. 86, 694—701 (1952).

Verf. entwickelt eine Spinwellentheorie kristallographisch einfacher Antiferromagnetika mittels der Kramers-Hellerschen halbklassischen Behandlung der Spinwellen. Die erhaltene Formel für die Energie der Spinwellen wird dazu verwendet, die Energie des Grundzustandes der Antiferromagnetika zu bestimmen. Das Ergebnis ist im Einklang mit früheren Erwägungen des Verf. (dies. Zbl. 43, 448) sowie den auf anderem Wege gewonnenen Resultaten Zimans (folg. Ref.). Ferner wird untersucht, inwieweit in den verschiedenen Kristallgittern bei tiefen Temperaturen eine antiferromagnetische Fernordnung auftreten kann. Verf. zeigt, daß die lineare Kette bei Voraussetzung einer isotropen Austauschwechselwirkung keine solche Fernordnung besitzt, wie schon die strenge Rechnung von Bethe und eine kürzliche Untersuchung von Kramers und Mitarbeitern (s. oben, und P. W. Kastelejn,

dies. Zbl. 46, 456) zeigten. In quadratischen Flächengittern und einfach-kubischen Gittern jedoch tritt eine Fernordnung auf, welche allerdings etwas schwächer als die völlige antiferromagnetische Ordnung ist. Ein Maß hierfür stellt der Mittelwert der z-Komponente des Spins in einem der beiden Teilgitter im Grundzustand dar; Verf. berechnet diesen zu: $\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} N (S - \delta)$, wo $\delta = 0,197$ bzw. $= 0,078$ im Falle des 2- bzw. 3-dimensionalen Gitters ist (S ist die Spinquantenzahl eines der Atome, N die Zahl der magnetisch aktiven Atome im Kristall). — Dies Ergebnis ist von besonderer Bedeutung, da es die Grundannahme der phänomenologischen Theorie des Antiferromagnetismus bezüglich der Magnetisierung der Teilgitter im Grundzustand auf eine zuverlässigere Basis stellt als bisher. *G. Heber.*

Ziman, J. M.: Antiferromagnetism by the spin wave method. I. The energy levels. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 540—547 (1952).

Geht man aus von der Annahme, der Grundzustand eines einfachen, d. h. in zwei Teilgitter spaltbaren Antiferromagnetikums sei in ausreichender Näherung der mit antiparalleler Einstellung der Spins der beiden Teilgitter relativ zueinander, so läßt sich die Spinwellenmethode auf solche Substanzen ausdehnen. Dem Vorbild von Bloch (dies. Zbl. 3, 423) und Holstein-Primakoff (dies. Zbl. 27, 186) folgend, wird in den spinabhängigen Teil des Austauschenergie-Operators zunächst für tiefe Temperaturen die Größe der Abweichung des Spins von diesem Grundzustand als neue Variable eingeführt. Durch eine Fourier-Transformation kann der genannte Operator auf eine Form gebracht werden, welche seine Eigenwerte, d. h. die Energien der Spinwellen mittels bekannter Methoden zu berechnen gestattet. Die erhaltenen Spinwellenzustände zerfallen in zwei Serien, entsprechend den beiden Teilgittern mit antiparalleler Magnetisierung. Bei gleicher Wellenzahl unterscheiden sich die Energien in den beiden Serien jedoch nur dann, wenn ein äußeres Magnetfeld vorhanden ist. — Die Energie des Grundzustandes wird mit den Ergebnissen Andersons (dies. Zbl. 43, 448; vorst. Ref.) verglichen und in Übereinstimmung mit diesen befunden. *G. Heber.*

Ziman, J. M.: Antiferromagnetism by the spin wave method. II. Magnetic properties. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 548—556 (1952).

Unter Benutzung der in einer vorhergehenden Arbeit (vorsteh. Ref.) hergeleiteten Energien der Spinwellen bestimmt Verf. auf statistischem Wege Suszeptibilitäten \parallel und \perp zur Vorzugsrichtung der Magnetisierung, χ_{\parallel} und χ_{\perp} für tiefe Temperaturen. Während χ_{\parallel} für tiefe Temperaturen zu T^2 proportional ist, hängt χ_{\perp} von T nicht ab. Die letztere Tatsache bedeutet eine Abweichung von Hulthéns Resultat (dies. Zbl. 13, 431), deren vermutlicher Ursprung diskutiert wird. — Für die Resonanzfrequenzen in der üblichen Anordnung zur Messung der magnetischen Resonanz leitet Verf. Formeln ab, welche mit den von Kefer und Kittel (folg. Ref.) erhaltenen identisch sind. — Schließlich wird eine Korrektur der Energie der Spinwellen hergeleitet, welche der Wechselwirkung der verschiedenen Wellen Rechnung tragen und eine Ausdehnung der Theorie auf hohe Temperaturen ermöglichen soll. Der Einfluß dieser Korrektur auf die oben berechneten makroskopischen Größen wird diskutiert. *G. Heber.*

Kefer, F. and C. Kittel: Theory of antiferromagnetic resonance. Phys. Review, II. Ser. 85, 329—337 (1952).

Es werden Formeln für die Resonanzfrequenzen antiferromagnetischer Kristalle hergeleitet, in welchen die Austauschwechselwirkungen nur zwischen Atomen auf zwei verschiedenen Teilgittern wesentlich sind. Die Resonanzfrequenzen werden zunächst gewonnen mit Hilfe der klassischen Bewegungsgleichungen der atomaren magnetischen Momente, wobei die Austausch- bzw. Anisotropie-Energien durch entsprechende Molekularfelder angenähert werden. Im Gegensatz zu Ferromagnetika ist bei Antiferromagnetika bekanntlich die Einbeziehung der Anisotropie-Energie auch in erster Näherung unerläßlich. Die Rechnungen werden für beliebige Richtungen der äußeren Magnetfelder relativ zu den bevorzugten Magnetisierungsrichtungen des Kristalles und für beliebige Temperaturen (unterhalb des Curie-Punktes) durchgeführt. Verf. diskutieren den Einfluß der Entmagnetisierung und des Übergangs vom Einkristall zum Polykristall bzw. Pulver. Wegen starker Linienverbreiterung in letzteren sollten zu Experimenten am besten zylindrische Einkristalle benutzt werden. Verf. sind der Ansicht, daß die von ihnen vorausgesagten Resonanzen wahrscheinlich experimentell (außer vielleicht bei $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$) noch nicht beobachtet worden sind. — Eine mit einer Anzahl von Näherungsannahmen durchgeführte quantentheoretische Überlegung führt auf Gleichungen für die Erwartungswerte der atomaren magnetischen Momente, welche mit den klassischen Ausgangsgleichungen übereinstimmen. *G. Heber.*

Kubo, Ryogo: The spin-wave theory of antiferromagnetics. Phys. Review, II. Ser. 87, 568—580 (1952).

Die Arbeit verfolgt im wesentlichen das gleiche Ziel wie eine gleichzeitig durchgeführte von Ziman (s. zweitvorangeh. Referat; zitiert als Z.). Verf. geht wie Ziman aus von der Holstein-Primakoff'schen Schreibweise (dies. Zbl. 27, 186) des Austauschenergieoperators, führt aber im Gegensatz zu Z. nur Austauschwechselwirkungen zwischen nächsten Nachbarn ein und verzichtet auf die Einführung eines äußeren Magnetfeldes. Das Zimansche Resultat bezüglich der Spinwellenenergien läßt sich erwartungsgemäß genau auf das Kubosche spezialisieren. Die Anisotropie wird bei Verf. etwas anders eingeführt als bei Ziman, trotzdem unterscheiden sich die Spinwellenenergien nicht wesentlich. Die thermodynamischen Größen wie Energie, Entropie, Magnetisierung der Teilgitter werden als Funktionen der Temperatur (weit unterhalb des Curie-Punktes) berechnet nach einer vom Verf. offenbar selbst entwickelten Methode, welche vom üblichen Vorgehen abweicht und anscheinend auch etwas andere Resultate liefert als die übliche Methode. So ergeben sich z. B. bei der Suszeptibilität im statischen Magnetfeld gewisse (in Zahlenfaktoren liegende) Differenzen gegenüber den Zimanschen Resultaten. — Verf. diskutiert die mögliche Natur der eigenartigen, bei verschwindender Anisotropie auftretenden Divergenzen und versucht schließlich einen Schritt in Richtung der Ausdehnung der Theorie auf höhere Temperaturen. In letzter Hinsicht geht er anders vor als Z. und erhält auch etwas andere Resultate. Dieser Punkt bedarf weiterer Untersuchungen, welche vom Verf. angekündigt werden. *G. Heber.*

Gorter, C. J. and J. Haantjes: Anti-ferromagnetism at the absolute zero of temperature in the case of rhombic symmetry. Physica 18, 285—294 (1952).

Verff. erweitern die Néelsche phänomenologische Theorie des Antiferromagnetismus (Molekularfeldtheorie) auf anisotrope Substanzen, wobei sowohl anisotrope Molekularfeld-Koeffizienten als auch Anisotropie des magnetischen Momentes der atomaren Magnete selbst zugelassen wird. Es werden vor allem eigenartige, auch experimentell an $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ bei sehr tiefen Temperaturen beobachtete Übergangsphänomene diskutiert: Geht man von schwachen äußeren magnetischen Feldern zu stärkeren über, so gibt es bei solchen Substanzen eine kritische Feldstärke anisotropen Charakters, in deren Umgebung die Magnetisierungsvektoren u. U. sehr schnell von den bisherigen in neue Vorzugslagen übergehen. *G. Heber.*

Fletcher, G. C.: Density of states curve for the 3d electrons in nickel. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 192—202 (1952).

Zener, C.: Interaction between the d-shells in the transition metals. IV. The intrinsic antiferromagnetic character of iron. Phys. Review, II. Ser. 85, 324—328 (1952).

Verf. schlägt eine Deutung der Sättigungsmagnetisierung des α -Fe vor, welche von der bisher bekannten (Überlappung der Energiebänder) abweicht und das atomare Bild des Metalles bezüglich der 3d-Elektronen benutzt. Zener stellt sich das α -Fe-Gitter aus zwei einfach-kubischen Teilgittern zusammengesetzt vor, deren eines durch Fe^{++} , deren anderes durch Fe^{--} -Ionen besetzt ist, welche 5 bzw. 1 Bohrsches Magneton pro Atom als unkompensiertes Spinmoment besitzen. Die Momente der beiden Teilgitter stehen antiparallel und führen so zu Ferromagnetismus. Diese Struktur entspricht einer maximal negativen Austauschenergie innerhalb der einzelnen 3d-Schalen; der Gewinn an Austauschenergie ist u. U. größer als der Aufwand an Coulomb-Energie, wie vom Verf. plausibel gemacht wird. Da ein Nachweis dieser Struktur mittels Neutronen-Streuversuchen nicht gelungen ist, soll nach Verf. die Elektronenverteilung zwischen den beiden Teilgittern rasch fluktuieren. Durch ähnliche Überlegungen, bei welchen die Annahme einer bestimmten „Disproportionierung“ der beteiligten Atome und eines bestimmten Vorzeichens der Austauschwechselwirkung zwischen Nachbar-Atomen wesentlich ist, gelangt Verf. zu einem quantitativen Verständnis der Sättigungsmagnetisierungen einer Reihe von Fe-Legierungen. Dabei wird bei Überlegungen, welche das Vorzeichen der Austauschwechselwirkung betreffen, auf die früher vom Verf. [Phys. Review, II. Ser. 83, 298 (1951) und dies. Zbl. 42, 235] eingeführte indirekte Wechselwirkung der 3d-Elektronen wesentlich zurückgegriffen, was wohl nicht bei allen diskutierten Substanzen notwendig ist. *G. Heber.*

Kasteleijn, P. W.: The lowest energy state of a linear antiferromagnetic chain. Physica 18, 104—113 (1952).

Krishnan, K. S. and Sanat Kumar Roy: The frequencies and the anharmonicities of the normal modes of oscillation of alkali halide crystals. II. Low-frequency acoustic modes. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 210, 481—497 (1952).

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- A**beles, F. (Déphasages d'une onde plane) 205.
 Ackeret, J. (Stokes-Navier-Gleichungen) 187.
 Adair, R. K. (Isotopic spin) 443.
 Adams, M. C. and W. R. Sears (Slender-wing theory) 418.
 — II, Edward N. (Electron in a perturbed periodic potential) 237; (Bardeen's theory) 452.
 Adem, J. and M. Moshinsky (Matrix boundary value problems) 170.
 Adney, J. E. s. I. N. Herstein 249.
 Agnew, R. P. (Tauberian constant) 292; (Abel transforms) 292; (Tauberian constants) 331.
 Ahrens, T. and E. Feenberg (Beta-decay matrix elements) 440.
 — — — and H. Primakoff (Pseudoscalar interaction) 440.
 Aigner, A. (Systematik der Punktmengen) 53.
 Aitken, A. C. (Practical mathematics. VII) 347.
 Albert, A. A. (Nonassociative division algebras) 36; (Alternative rings) 254.
 Albuquerque, J. Ribeiro de s. Ribeiro de Albuquerque, J. 280.
 Alden, Henry L. and Leon H. Schindel (Nonuniform supersonic flow) 426.
 Alef (Diophantische Gleichung) 265.
 Aljančić, S. (Gegenbauer'sche Polynome) 298.
 Allen, A. C. (Theorem of Gabriel) 106.
 — H. S. (Groups of infinite matrices) 119; (Idempotent operators) 122; (Groups of automorphisms) 255.
 Alsina, F. A. (Kräfte zwischen elektrischen Ladungen) 202.
 Altmann, S. s. C. A. Coulson 230.
 Altwegg, M. (Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung) 380.
 Amitsur, A. S. (Pi-rings) 31.
 Ammeter, H. (Ausgleichung einer Sterbetafel) 370.
 Anastassiadis, J. (Équations différentielles) 93.
 Anderson, O. (Indexverketzung?) 376.
 — P. W. (Quantum theory of antiferromagnetic ground state) 454.
 Andersson, B. (Stress-tensor) 420.
 — J. und N. Löfman (Ableitung und Diskriminante beim Polynom) 14.
 Andrunakievič, V. A. (Definition des Radikals) 256.
 Angelitch, T. (Équations linéaires algébriques) 340; (Darbouxscher Vektor) 400.
 Angles d'Aurillac, P. (Équilibre des surfaces déformables) 174.
 Ankeny, N. C. (Least quadratic non residue) 40.
 Ap Simon, H. (Critical lattices of spheres) 278.
 Aprikosov, A. A. (Supraleiter) 452.
 Aquaro, G. (Teorema di H. Lebesgue) 282.
 Aragnol, A. (Géométrie globale) 157.
 Arens, R. (Extension of functions) 118.
 Arnold, J. N. s. R. P. Hoelscher 346.
 Artmann, K. (Elektroneninterferenzen) 235; (Theorie der Kristalloberfläche) 449.
 Aruffo, G. (Approssimazione di una funzione continua) 70.
 Aržanyč, I. S. (Feldtheorie) 170; (Spannungstensor) 192.
 Arzeliès, H. (Relations fondamentales de la théorie magnéto-ionique) 203.
 Ashkin, J. s. L. Wolfenstein 439.
 Ashour, A. A. (Induction) 428.
 Aspdén, H. (Eddy-currents) 428.
 Atiyah, M. F. (Twisted cubic) 146.
 Aubert, K. E. (Demi-trellis additifs) 27, 28; (Funktionen, die Primzahlen darstellen) 270; (Diskrete Funktionen) 287.
 Auccin, A. A. (Abel's transformation) 62.
 Auluck, F. C. and D. S. Kothari (Lamb shift) 215.
 Aurillac, P. Angles d' s. Angles d'Aurillac, P. 174.
 Aussem, M. V. (Geometrie eines Doppelintegrals) 59.
 Austern, N. (Deuteron photoeffect) 444.
 — s. H. A. Bethe 439.
 Austin, M. C. (Dirichlet series) 302.
 Ayoub, Ch. W. (Normal chains) 21.
 Azbelev, N. und R. Vinograd (Eigenwerte und Eigenfunktionen) 242.
 — N. V. (Methode von S. A. Čaplygin) 313.
 Azpeitia, A. G. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) 289.
B. Robinson, G. de s. Robinson, G. de B. 250, 251.
 Bachmann, H. (Ausgezeichnete Folgen von Ordnungszahlen) 51.
 Backes, F. (Configuration des dix droites) 382.
 Baer, R. (Kommutatorgruppen) 22.
 Bagchi, H. D. and B. N. Mukherjee (Laguerre polynomial) 75.
 — — — and Ph. Ch. Chatterjee (Linear difference equations) 76; (Functional equation, connected with $\wp(z)$) 83.
 Bagemihl, F. (Intersections of prescribed cardinality) 280.
 Bailey, W. N. (Ramanujan's formulae) 42, 272.

- Bailin, L. L. s. A. Baños jr. 204.
- Baker, G. A. (Uniformity field trials) 370.
- H. F. (Projective geometry) 139.
- Baldassarri, M. (Esistenza di unisecanti) 385.
- Balk, M. B. (Zerlegung eines Raumes durch Sphären) 380.
- Baluev, A. N. (Methode von Čaplygin) 134.
- Bambah, R. P. and C. A. Rogers (Covering the plane) 380.
- — — and K. F. Roth (Lattice coverings) 277.
- Banerjee, D. P. (Distribution of the range of variation) 357.
- Baños jr., A., D. S. Saxon and L. L. Bailin (Radiation characteristics) 204.
- Bari, N. K. and L. A. Ljusternik (Meňšov) 3.
- Barlotti, A. (Teorema relativo al triangolo) 379.
- Barnard, G. A. (Sequential tests) 365.
- Barnes, E. S. (Quadratic forms) 275.
- — — and H. P. F. Swinerton-Dyer (Binary quadratic forms. I.) 276.
- Barrière, R. Pallu de la s. Pallu de la Barrière, R. 119.
- Barthélemy, R. s. J. Quinet 281.
- Bartlett, M. S. (Sampling test of χ^2 theory) 357.
- Bass, J. (Fluide turbulent) 423; (Ecoulement turbulent) 423.
- Bastin, E. W. and C. W. Kilminster (Analysis of observations) 209.
- Basu, D. (Meson field) 440.
- Batchelet, E. (Randwertprobleme) 345.
- Batchelor, G. K. (Field of homogeneous turbulence. II.) 421; (Effect of homogeneous turbulence) 422.
- Bauer, F. L. (Représentations spinorielles) 216.
- Baumann, K. (Quantenelektrodynamik. I. II. III.) 438.
- Bautin, N. N. (Anzahl der Grenzyklen) 94.
- Bays, S. (Groupes de substitutions) 249; (Groupe symétrique de degré n) 249.
- Bazarov, I. P. (Irreversibilität) 231.
- Bearman, J. E. (Wiener spaces) 334.
- Beatty, S. and N. D. Lane (Riemann-Roch theorem) 263.
- Beauclair, W. de (Sonderschieber für Häufigkeitsrechnung) 348.
- Bechert, K. (Nicht lineare partielle Differentialgleichungen) 98; (Näherungsweise Integration) 136.
- Bechmann, R. (Frequency equation) 180.
- Beck, M. (Knicklast) 177.
- Becker, O. (Modalkalkül) 5.
- R. (Massenträgheit der Blochwand) 452.
- Behrens, E.-A. (Schnittmultiplizität uneigentlicher Komponenten) 148.
- Bejlin, E. A. and G. Ju. Džanelidze (Stabilität elastischer Systeme) 414.
- Belenkij, M. Ja. (Problem der Elastizitätstheorie) 174.
- Bell, G. M. (Weiss field) 201.
- P. O. (Conjugate nets) 397.
- Bellman, R. (Scalar functions of matrices) 10; (Exponential integral and error function) 72.
- — — and Th. Harris (Branching processes) 355.
- Benner, Ch. P. (Diophantine equation) 266.
- Berg, L. (Abschätzung von Mathieu) 62.
- Bergeon, R. (Potentiel intermoléculaire) 232.
- Berger, E. R. (Einflußfeld) 176.
- Bergman, St. (Operatormethoden in der Gasdynamik) 190; (Partial differential equations) 321.
- Bergmann, G. (Ketten linearer Transformationen) 47.
- Berman, D. L. (Abschätzung der Ableitungen eines algebraischen Polynoms) 15.
- M. E. (Deformation zylindrischer Spiralfedern) 177.
- Bermant, A. F. s. V. I. Smirnov 3.
- Bernard, M. (Trajectoires) 436; (Champ électromagnétique) 447.
- Bernardi, S. D. (Schlicht functions) 86.
- Bernštejn, I. L. und G. S. Gorelik (Sterninterferometer) 206.
- S. N. (Wachsende Gewichtsfunktionen) 61.
- Berry, F. J. (Diffraction of a sound pulse) 417.
- V. J. and C. R. de Prima (Eigenvalue problems) 136.
- Bertein, F. (Champs statiques uniformes) 202; (Champ sur l'axe en optique électronique) 207; (Lentilles électroniques) 436.
- Bertolini, F. (Nozione di connessione) 403.
- Besicovitch, A. S. (Problems of Loewner) 53; (Isoperimetric problem. II.) 159; (Subsets of finite measure) 282.
- — — and S. J. Taylor (General metric space) 158.
- Beth, H. J. E. (Schiefer Wurf) 173.
- Bethe, H. A. and N. Austern (Angular distribution of π production) 439.
- — — and F. Rohrllich (Small angle scattering of light) 438.
- — — s. H. Davies 439.
- — — s. L. C. Maximon 439.
- Bhabha, H. J. (Particle with two mass states) 440.
- Bhatia, A. B. (Electrical conductivities) 237.
- — — Kun Huang, R. Huby and H. C. Newns (Angular distribution) 224.
- Bieberbach, L. (Funktionentheorie) 77; (Vektor im Schulunterricht) 149; (Geometrische Konstruktionen) 378.
- Biedenbarn, L. C. s. J. M. Blatt 225.
- Biermann, Ludwig s. E. Trefftz 445.
- Bilharz, H. (Alternierende Differentialformen) 59.
- Bilinski, S. (Théorème de Jacobini) 392.
- Bini, U. (Teorema di Cauchy) 16; (Equazioni $x^n \pm y^n = M$) 40.
- Biot, M. A. (Elastic waves) 416.
- Birindelli, C. (Integrazione dei sistemi lineari) 319.
- Birkhoff, G. (Vortex streets) 185.
- — — M. Plesset and N. Simmons (Wall effects. II.) 185.
- Bishop, R. E. D. s. J. N. Goodier 180.
- Biswas, S. N. (Potential scattering of fast electrons) 226.

- Bittel, H. (Geräusche und Rausch-Spannungen) 201.
- Blakemore, J. S. (Semiconductors) 451.
- Blakers, A. L. and W. S. Massey (Homotopy groups. II.) 406.
- Blambert, M. (Séries de Dirichlet) 79.
- Blanuša, D. (Integralkosinus) 299.
- Blaquière, A. (Synchronisation des oscillateurs) 172.
- Blaschke, W. (Geometria cinematica) 384.
- Blatt, J. M. and L. C. Biedenharn (Neutron-proton scattering) 225.
- Bledsoe, W. W. (Neighborly functions) 403.
- Blin-Stoyle, R. J. (Polarized nuclear processes) 226.
- Blochincev, D. (Ausbreitung von Signalen) 220.
- Block, H. D. (Banach space) 337.
- I. E. (Plemelj theory) 300.
- Blunck, O. (Reichweite schneller Elektronen) 226.
- Boas jr., R. P. (Trigonometric series. II. III.) 296.
- Bochner, S. (Harald Bohr) 3; (Automorphic functions) 89; (Partial differential equations) 99; (Multiply periodic functions) 310.
- Bödewadt, U. T. (Ogivalfunktionen) 139; (Symmetrischer Kreis) 171.
- Boer, J. de (Liquid state) 448.
- Bohm, D. (Interpretation of quantum theory. I. II.) 210.
- Bohr, H. (Order function of Dirichlet series) 302.
- Bojanić, R. (Klasse impliziter Differentialgleichungen) 313.
- Bolotin, V. V. (Parametrisch erregte Schwingungen) 180.
- Bondi, H. (Relativity and indeterminacy) 4; (Cosmology) 208.
- Bonnor, W. B. (Einstein's unified field theory) 209.
- Booth, A. D. (X-ray Fourier syntheses) 235.
- Bopp, F. (Korrelationsrechnung) 211.
- Borel, A. et A. Lichnerowicz (Groupes d'holonomie) 398; (Espaces riemanniens) 398.
- É. (Nombres inaccessibles) 7; (Théorème de Dirichlet) 43.
- Borg, S. F. (Conical flow) 197.
- Born, M. (Dirac's new theory) 217.
- Bose, S. K. (Laplace transform) 329.
- Bothwell, F. E. (Equivalent linearization) 378.
- Bottari, A. (Teorema di Steiner) 382.
- Bouchez, R. s. R. Nataf 442, 443.
- Bouligand, G. (Transformations de contact) 158; (Parallélismes généralisés) 401.
- Bourgin, D. G. (Weak simplicial complex) 403.
- Bourion, G. (Séries lacunaires) 301.
- Bourne, S. (Semi-rings) 31.
- Bousquet, P. (Coefficients de Fresnel) 433.
- Bowden, K. F. and L. A. Fairbairn (Tidal current) 240.
- Bowman, F. (Plane linkage) 149.
- Boyd, D. R. J. and H. C. Longuet-Higgins (Coriolis interaction) 231.
- Boys, S. F. (Electronic wave functions. VI.) 229.
- Bradley, R. A. (Two-sample t - and F -tests) 362.
- Brandt, H. (Bilineare Substitutionen) 34; (Maß ternärer quadratischer Formen) 43; (Reziprozitätsgesetz) 268; (Quadratische Formen) 273; (Ternäre quadratische Formen) 273.
- Brauer, A. (Characteristic roots of a matrix. IV.) 12.
- P. (Energie von Störstellen) 451.
- Braun, I. and M. Reiner (Cross-viscosity) 188.
- Breidenbach, W. (Dreiecke) 141.
- Brelot, M. et C. Choquet (Espaces et lignes de Green) 327.
- Bremmer, H. (Diffraction integrals) 206.
- Brenig, W. und M. Schröder (Spezifische Wärme) 234.
- Bridgman, W. (Nature of physical concepts) 3.
- Brock, P. and F. J. Murray (Step by step integration) 343.
- Brockner, R. A. (Algebraic equations) 129.
- Brodin, J. (Servomécanisme linéaire) 139.
- Broglie, L. de (Théorie du champ soustractif) 220.
- Brouwer, L. E. J. (Fixed-point theorem) 409.
- Browder, F. E. (Dirichlet problem) 323.
- Brown, Curtis A. s. Ch.-H. Wu 426.
- G. E. (Electron-electron interaction) 229.
- L. M. and R. P. Feynman (Compton scattering) 438.
- Bru, L., M. P. Rodriguez and R. Vega (Diffraction of light and electrons) 231.
- Bruck, R. H. (Moufang loops) 18.
- Brueckner, K. A. (Meson-nucleon scattering) 218.
- Bruins, E. M. (Egyptian arithmetic: $2/N$) 1; (Tetrahedron) 379.
- Brunin, O. and S. Hjalmar (Wave equations) 440.
- Brzezicki, A. de Castro s. Castro Brzezicki, A. de 173.
- Buchman, E. N. (Mittelwerte der statistischen Charakteristiken) 359.
- Buchner, P. (Satz von Bernoulli) 354; (Grenzwertsatz) 354.
- Buckingham, R. A. and A. Dalgarno (Interaction of normal and metastable helium atoms) 230.
- — S. J. Hubbard and H. S. W. Massey (Scattering of neutrons) 226.
- Buckmaster, H. A. (Quadrupole transition) 445.
- Buehler, R. J. and J. O. Hirschfelder (Coulombic potentials) 225.
- Bühler, H. und W. Schreiber (Eigenspannungszustand) 412.
- Bulgakov, B. V. (Systeme linearer Differentialgleichungen) 91.
- Bulygin, V. Ja. (Elastoplastische Torsion) 179.
- Buquet, A. s. V. Thébaud 39.
- Bureau, W. (Algebraische Geometrie) 387.
- Bureau, F. (Problème de Cauchy) 102.
- Burgess, D. C. J. (Laplace transforms) 121.
- Burkill, H. (Cesàro-Perron almost periodic functions) 312.
- Burniat, P. (Surfaces canoniques quadruples) 147.
- Bush, K. A. (Continuous functions) 287.

- Butlewski, Z. (Théorème de l'oscillation) 315.
- Cabannes, H. (Équations de Navier) 419; (Fluides compressibles) 425.
- Cadwell, J. H. (Approximation to beta function) 350; (Distribution of quantiles) 357.
- Cafiero, F. (Funzioni additive d'insieme) 58.
- Cagnet, M. (Répartition des éclaircissements) 207.
- Caianiello, E. R. (Majorana theory) 213.
- Caligo, D. (Aste vibranti. I. II.) 181.
- Callen, H. B. (Thermomagnetic effects) 451.
- Cameron, R. H., B. W. Lindgren and W. T. Martin (Nonlinear functional equations) 331.
- Campbell, R. (Fonctions de Mathieu) 74.
- Campedelli, L. (Geometria. Vol. I.) 381.
- Cantor, G. (Theory of transfinite numbers) 51.
- Carleson, L. (Sets of uniqueness) 300.
- Carlitz, L. (Bernoulli numbers) 40; (Diophantine approximation) 48; (Arithmetic functions) 270.
- Carrière, P. (Tuyères super-soniques) 427.
- Cartwright, M. L. s. E. F. Collingwood 84.
- Casesnoves, D. Maravall s. Maravall Casesnoves, D. 208.
- Cassels, J. W. S. (Inhomogeneous minimum of forms) 46; (Addendum) 276.
- Castro, G. de (Normalverteilung) 350.
- Brzezicki, A. de (Dissipative Systeme) 173.
- Cattaneo, C. (Legame lineare) 151.
- Cavé, R. (Méthodes modernes de contrôle statistique) 365.
- Cesari, L. (Integrals on parametric surfaces) 109; (Derivazione delle funzioni) 286.
- Chaililov, Z. I. (Lösung gemischter Probleme) 101; (Cauchysches Problem für Operatorgleichung) 338; (Cauchysches Problem für unendliches System von partiellen Differentialgleichungen) 338.
- Chalk, J. H. H. (Binary cubic form) 44; (Non-homogeneous bilinear form) 44.
- Chambers, E. G. (Statistical calculations) 297.
- R. G. (Conduction problems) 237.
- Chandra, D. (Hankel transformation) 297.
- Chandrasekhar, S. (Turbulence) 189; (Magnetic field) 240.
- Chang, Chieh-Chien (Theodorsen function) 418.
- Shih-Hsun (Theorem of S. Bernstein) 82; (Theorem of Hille and Tamarkin) 110.
- Charnes, A., F. Osterle and E. Saibel (Energy equation for fluid-film lubrication) 189.
- Charrueau, A. (Formules matricielles relatives) 383.
- Charyk, J. V. s. R. Probstein 184.
- Chatterjee, Phatik Chand s. H. D. Bagchi 76, 83.
- Chaudhury, M. L. (Alpha-decay) 224.
- Cheeseman, I. C. (Insulating crystals) 237.
- Chehata, C. G. (Simple ordered group) 25.
- Chen, K. K. s. C. H. Ku 113.
- Cheo, L. ($\alpha + \beta$ theorem) 271.
- Chern, Sh.-sh. and C. Chevalley (Élie Cartan) 3; (Kinematic formula in the Euclidean space) 161.
- Chernoff, H. and H. Scheffé (Neyman-Pearson lemma) 367.
- Cherubino, S. (Risoluzione senza determinanti) 14; (Settori economici) 378.
- Chester, W. (Reflection of a transient pulse) 197.
- Chevalley, Claude s. Sh.-sh. Chern 3.
- Chisholm, J. S. R. (S -matrix elements) 215.
- Chisini, O. (F. Enriques) 3.
- Chochlov, R. V. (Laguerresche Funktionen) 298.
- Chodžaev, L. Š. (Newton-sches Potential) 107.
- Choquet, G. (Capacités) 57; (Capacitabilité) 57.
- s. M. Brelot 327.
- Chow, Hung Ching (Summable series) 62.
- W.-L. and K. Kodaira (Analytic surfaces) 309.
- Chowla, S. (Riemann zeta function) 272.
- Chu, Boa-Teh (Interaction of strong shock and Mach waves) 196.
- Chung, K. L. and P. Erdős (Borel-Cantelli lemma) 352.
- Church, E. (Cubic transformation) 384.
- Cicco, J. De s. E. Kasner 139.
- Civin, P. (Walsh functions) 295.
- Clagett, M. (Archimedes) 1.
- Clark, R. A., T. I. Gilroy and E. Reissner (Stresses and deformations) 175.
- Closs, R. L. s. T. R. Kaiser 234.
- Coddington, Earl A. and N. Levinson (Nonlinear differential equation) 95; (Infinite differential systems) 96.
- Cohen, E. (Rings of arithmetic functions) 260; (Fonctions arithmétiques) 260.
- H. J. (Problème de M. Dieudonné) 164.
- Cohn, R. M. (Difference fields) 38, 258.
- Cole, A. J. (Linear forms) 45.
- J. D. and T. Y. Wu (Heat conduction) 198.
- Colladay, G. S. s. D. L. Falkoff 228.
- Collatz, L. (Einschließungssätze) 127; (Nichtlineare Schwingungen) 344; (Fehlerabschätzung) 344.
- Collingwood, E. F. and M. L. Cartwright (Function meromorphic in the unit circle) 84.
- Colombani, A. et M. Gourceaux (Résistance apparente en haute fréquence) 428.
- — s. M. Gourceaux 428.
- Connor jr., W. S. (Balanced incomplete block designs) 361.
- Conte, L. (Formule di addizione) 289.
- S. D. (Circular plate) 176.
- Conti, R. (Problema iniziale per $z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(i)})$. I. II.) 98.
- Conway, H. D. (Bending of orthotropic beams) 412.
- — — and M. K. Huang (Bending of uniformly loaded plates) 176.
- Cooke, J. C. (Pohlhausen's method) 188.

- Cooke, R. G. ((C, r) -summability) 290.
- Cooper, J. L. B. (Heaviside and the operational calculus) 115.
- Copeland, P. L. and D. N. Eggenberger (Electric field in diodes) 203.
- Corliss, J. J. (Volumes of revolution) 381.
- Corrsin, St. (Isotropic turbulence) 422.
- Cotte, M. (Correspondance symbolique) 329.
- Cottrell, A. H. (Immobile dislocations) 448.
- Coulson, C. A., N. H. March and S. Altmann (π -electrons and σ -electrons) 230.
- — — and R. Taylor (Graphite. I.) 450.
- — — s. W. E. Duncanson 450.
- — — s. R. Taylor 450.
- Court, N. A. (Isogonal conjugate points) 141.
- Couteur, K. J. Le s. Le Couteur, K. J. 216, 217.
- Cox, D. R. (Sequential tests) 365; (Sequential estimation of means) 366.
- J. A. M. and H. A. Tolhoek (Angular correlation of two gamma quanta) 224.
- — — s. H. A. Tolhoek 224.
- Crabtree, L. F. s. N. Rott 188.
- Craemer, H. (Abhängigkeit der Festigkeit) 357.
- Craggs, J. M. (Compressible flow) 192.
- Crespo Pereira, R. (Cantor) 3.
- Crookshanks, R. s. E. Lapin 187.
- Cros, F. Teissier du s. Teissier du Cros, F. 177.
- Crossley, F. R. E. (Hyperelliptic function) 172.
- Csada, I. K. (Magnetic effects of turbulence) 447.
- Cugiani, M. (Aritmetica dei polinomi) 41; (Rappresentazione degli interi) 271.
- Čunichin, S. A. (Abschwächung der Bedingungen in Sylowschen Sätzen) 23.
- Cunningham, H. J. s. H. L. Runyan 187.
- W. J. (Analysis of circuits) 429.
- Curtiss, C. F. and J. O. Hirschfelder (Stiff equations) 136.
- Cydzik, P. V. (Eigenschwingungen von Platten) 415.
- Dacey, A. B. (Wärmeleitung) 323.
- Dahlquist, G. (Analytic continuation) 272.
- Daitch, P. B. and J. B. French (Nucleon-deuteron scattering) 226.
- Dalgarno, A. s. R. A. Buckingham 230.
- Dalitz, R. H. (Polarized particle beams) 226.
- Daniels, H. E. (Covering circle of a sample) 358.
- Darevskij, V. M. (Zylindrische Schale) 175.
- Davenport, H. (Result of Chalk) 45.
- — — and P. Erdős (Note on normal decimals) 49.
- Davidson, J. F. (Bent l-section beams) 412.
- Davies, H. and H. A. Bethe (Integral cross section for Bremsstrahlung) 439.
- R. O. (Differentiation of functions) 58; (Onsager relations) 200.
- T. V. (Gravity waves. III.) 199.
- Davis, Ph. (Doubly orthogonal functions) 81; (Linear differential operators) 125.
- — — and H. Pollak (Sets of polynomials) 80; (Transfinite diameter) 86.
- Debreu, G. (Quadratic forms) 244.
- De Cicco, J. s. E. Kasner 139.
- Decuyper, M. (Suite de Laplace périodique) 153.
- Deemter, J. J. van (Viscous fluids) 419.
- Delange, H. (Fonctions entières) 304; (Théorème de Widder) 328.
- Delerue, P. (Polynômes d'Abel-Laguerre) 75.
- Delone (Delaunay), B. N. (Mathematische Maschinen. I.) 127.
- Dengler, M. A., M. Goland and Y. L. Luke (Stable aerodynamic systems) 187.
- Derjugin, L. N. (Verteilung von Strömen in einer Scheibe) 202.
- Descombes, R. s. G. Poitou 278.
- De-Shalit, A. (Cosine interaction) 443.
- Dewar, M. J. S. and H. C. Longuet-Higgins (Resonance) 445.
- Dexter, D. L. (Cold-worked metals) 237; (Scattering of electrons) 452.
- Diaz, J. D. and R. C. Roberts (Dirichlet problem for Laplace's difference equation) 138.
- Dienes, P. (H -matrices) 6.
- Dietze, H.-D. (Versetzungsstruktur) 234.
- Dieudonné, J. (p -groupes) 20; (Structure of unitary groups) 253; (Complex structures) 333.
- Dinghas, A. (Identitäten vom Bernsteinschen Typus) 293.
- Dingle, R. B. (Velocity of second sound) 232; (Magnetic properties of metals. I. II. III. IV.) 450.
- Dirac, G. A. (4-chromatic graphs) 410.
- Dixmier, J. (Anneaux d'opérateurs) 335.
- Dizioğlu, B. (Mittlere Temperaturen in Schmier-schichten) 189.
- Djubuk, P. E. (Anzahl der Untergruppen) 250.
- Dobrušin, R. L. (Grenzwertsatz für Markoffsche Kette) 354.
- Dörr, J. (Zwei Integralgleichungen) 417.
- Dol'berg, M. D. (Kritische Winkelgeschwindigkeiten) 414.
- Donan, J. F. (Serial-memory digital differential analyzer) 348.
- Donder, Th. de (Équations de Maxwell) 428.
- Donsker, M. D. (Kolmogorov-Smirnov theorems) 351.
- Dowker, C. H. (Problem in set theory) 52; (Metric complexes) 404; (Homology groups) 404.
- Dragilev, A. V. (Nichtlineare Schwingungen) 97.
- Drell, S. D. (Recoil correction) 439.
- Dube, G. P. s. S. Iha 224.
- Dubošin, G. N. (Stabilitätsproblem) 96.
- Dubourdieu, J. (Assurances. Fasc. I.) 370.
- Duff, G. F. D. (Fourier transforms) 330.
- — — — and N. Levinson (Asymmetric Liénard equation) 317.
- Duffin, R. J. (Unitary transformations) 115.
- Dugas, R. (Interprétation de la mécanique quantique) 210.

- Dugué, D. (Fonctions fuchsiennes) 83; (Théorème de Picard global) 84; (Convergence au sens de Cesàro) 352.
- Dugundji, J. (CW polytopes) 427; (Nyquist approach) 427.
- Duncan, D. G. (Formula by Todd) 16.
- W. J. (Rayleigh's principle) 11; (Massive and elastic bodies) 416.
- Duncanson, W. E. and C. A. Coulson (Graphite. II.) 450.
- Dungen, F. H. van den (Intégration numérique de l'équation des ondes) 344.
- Dunnington, G. Waldo (G. A. Miller) 3.
- Duparc, H. J. A. s. W. Pere-mans 11.
- Durand, A. (Cercles bitangents) 143.
- Durst, L. K. (Equianharmonic divisibility sequences) 289.
- Dutta, A. K. (Internal dispersion) 232.
- Dvoretzky, A., J. Kiefer and J. Wolfowitz (Inventory problem, I.) 376.
- Dynkin, E. B. (Topologische Invarianten) 25.
- Dyson, F. J. (Divergence of perturbation theory) 215.
- Džanelidze, G. Ju. s. E. A. Bejlin 414.
- Džrbašjan, M. M. (Wachstum der Ableitungen von Polynomen) 69; (Beste Annäherung) 69; (Entwicklung ganzer Funktionen) 301.
- Easthope, C. E. (Spin integral) 171.
- Ecker, G. (Feldstärkeverlauf vor der Kathode) 447.
- Eden, R. J. (Quantum field theory) 439.
- Eder, G. (Potential zwischen Nukleonen) 219.
- Edwards, R. E. (Transforms of special functions) 118; (Mean-independence of translates of functions) 334; (Functions whose translates are independent) 334.
- Efimov, N. V. s. G. E. Šilov 241.
- Efremovič, V. A. (Topologisches Produkt) 163; (Geometrie der Nachbarschaft. I.) 163.
- Eggenberger, Delbert N. s. P. L. Copeland 203.
- Eggleston, H. G. (Measure of asymmetry of convex curves) 160.
- Egloff, W. (Kugelverbiegungen) 324.
- Ehrenberg, A. S. C. (Sampling from a population) 359.
- Ehresmann, Ch. (Structures infinitésimales) 407; (Variété différentiable. IV. V.) 408.
- Eichenberger, H. P. (Secondary flow in cascades) 186.
- Eidgenössisches Statistisches Amt, Bern (Volkssterbetafeln) 370.
- Eilenberg, S. and S. MacLane (Cohomology groups of Abelian groups. IV.) 167.
- Ejdus, D. M. (Abhängigkeit der Eigenfunktionen vom Gebiet) 104; (Differenzenmethode) 139.
- Ekstein, H. (Scattering by many-body systems) 445.
- Elkin, J. M. (Rule for divisibility) 264.
- Ellis, D. (Metric lattices) 28.
- El'sgol'c, L. E. (Variationsprobleme) 110.
- Elton, L. R. B. (Scattering of fast electrons) 226.
- — — and H. H. Robertson (Radiative correction) 215.
- Emersleben, O. (Elektrostatische Gitterenergie) 235; (Gitterenergie) 235.
- Enatsu, H. (Self-energies of nucleons) 226.
- Endt, P. M. (Statistical errors of angular distributions) 224.
- Enomoto, Sh. (Measures and integrals) 54.
- Epstein, B. and J. Lehner (Analytic functions) 82.
- Erdélyi, A. s. M. Weber 299.
- Erdős, P. (Greatest prime factor of $\prod_{k=1}^x f(k)$) 41; ($\sum_{k=1}^x d(f(k))$) 41.
- — s. K. L. Chung 352.
- — s. H. Davenport 49.
- Eremeev, N. V. (Nomographischer Mechanismus) 131.
- Ericksen, J. L. (Uniqueness of gas flows) 192.
- Eringen, A. C. (Non-linear vibration) 180.
- Erskine, G. A. and H. S. W. Massey (Atomic scattering problems. II.) 446.
- Erugin, N. P. (Instabilitäts-sätze) 97.
- Erwe, F. (Schlichtheits-schranken) 87.
- Eschler, H. (Freie Biegungsschwingungen) 181.
- Evans, A. W. (Interest approximations) 374.
- jr., H. T. (X-ray absorption corrections) 236.
- Eyring, Henry s. Ch. P. Muel-ler 230.
- Fabre de la Ripelle, M. (Équations de perturbation. I.) 212.
- Fairbairn, L. S. s. K. F. Bowden 240.
- Faircloth, O. B. (Types of equations in a finite field) 267.
- Falk, G. (Konstanzelemente in Ringen) 31; (Hamilton-Jacobi-Theorie) 210.
- — und H. Marshall (Schrödinger-Gleichung) 211.
- Falkenhagen, H. und G. Kelbg (Bestimmung von ϵ und μ) 203.
- Falkoff, D. L., G. S. Colladay and R. E. Sells (Transformation amplitudes) 228.
- Fantappiè, L. (Grandezze fisiche) 437.
- Farrell, M. J. (Irreversible functions) 376.
- Fastov, N. S. (Plastische Deformation) 179.
- Feddersen, B. (Reserveaufbau) 373.
- Federer, H. (Measure and area) 284.
- Federhofer, K. (Kreiszylin-derschale) 175.
- Fedjaevskij, K. K. (Massen von rechteckigen Platten) 415.
- Fedorov, F. I. (Optische Parameter von einachsigen Kristallen) 433.
- Feenberg, E. s. T. Ahrens 440.
- Fehlberg, E. (Lösung von Randwertaufgaben nach der Picardschen Iterationsmethode) 135; (Dirichlet-sches Problem) 138.
- Feinstein, J. (Solar plasma) 239.
- Feld, J. M. (Geometry of lineal elements) 397.
- Fenain, Maurice s. P. Ger-main 191.

- Féraud, L. (Assurances collectives) 372.
- Féret, J. Kampé de s. Kampé de Féret, J. 198.
- Ferigle, S. M. and A. G. Meister (Vibrational spectra) 446.
- Féron, R. (Information et corrélation) 367; (Régression) 367.
- Ferretti, B. (Equazioni operatoriali) 125.
- Feshbach, H. (Coulomb scattering) 442.
- s. W. Hauser 444.
- Fet, A. I. (Variations-probleme) 110.
- Fettis, H. E. (Torsional vibration modes) 415.
- Feynman, R. P. s. L. M. Brown 438.
- Fieber, H., A. Nedoluha und K. M. Koch (Transversaleffekte) 451.
- Filippov, A. F. (Stabiler Grenzzyklus) 317.
- Flanders, H. (Kronecker's theorem on forms) 256; (Norm theorem) 259.
- Flax, A. H. (Reverse-flow theorem) 187; (Lifting-surface theory) 426.
- Fleckenstein, J. O. (Théorèmes de Laplace) 238.
- Fletcher, G. C. (Density of states curve) 456.
- Floyd, E. E. (Euler characteristics) 166.
- Flügge, S. (Schwingungsgleichungen) 346.
- und K. Woeste (Atomkern als kompressibler Tropfen, I.) 222.
- W. (Optimum problem) 176.
- Fogel, K.-G. (Yukawa potential) 211.
- Foreman, A. J. R. s. M. A. Jaswon 448.
- Forsythe, G. E. (Latent roots) 341.
- Foulkes, H. O. (S-functions) 244.
- Fourès-Bruhat, Y. (Systèmes d'équations à quatre variables) 99; (Systèmes d'équations hyperboliques) 100.
- Fournet, G. (Cooperative phenomena) 201.
- Fournier, G. (Distribution des nombres premiers) 43.
- Fox, Ch. (Iterated transforms) 330.
- E. N. (Diffraction) 182.
- L. (Latent roots) 128.
- Fox, R. H. (Inequivalent knots) 168.
- Fraïssé, R. (Systèmes de base finie) 279.
- Frame, J. S. (Permutation groups) 251.
- Franck, A. (Analytic functions) 304.
- Frank, E. (Determinantal equations) 245.
- F. C. (Crystal growth and dislocations) 234.
- Franke, H. W. (Richtungsdoppelfokussierung) 437.
- Fränz, K. (Lineare Servomechanismen) 349.
- Franz, W. (Kirchhoffsche Beugungsformel) 205.
- Freiberger, W. (Enlargement of a circular hole) 178.
- Freistadt, H. (Hypothèse d'intervalle fondamental) 221.
- Frejman, G. A. (Dichtigkeit von Folgen) 271.
- French, J. B. and M. L. Goldberger (Coulomb scattering) 444.
- — — s. P. B. Daitch 226.
- Frenkiel, F. N. (Statistical theory of turbulent diffusion) 423.
- Freud, G. (Berechnung des H_2 -Moleküls) 446.
- Freudenthal, H. (Produkte symmetrischer und antisymmetrischer Matrizen) 11.
- Fricke, A. (Zentralbewegung) 112.
- Friedel, J. (X-ray transition) 446; (Distribution of electrons in monovalent metals) 452.
- Friedman, M. B. s. H. F. Ludloff 427.
- Fröman, P. O. (Density matrix of Rb^+) 229.
- Frucht, R. (One-regular graph) 409.
- Fubini, S. (Definizioni della matrice S) 215.
- Fuchs, J. (Wirkungsquantum) 4.
- L. (Jacobson radical) 256.
- Fues, E. and H. Statz (Ersatzpotentiale in Schrödinger-Gleichungen) 449.
- Fuglede, B. and R. V. Kadison (Determinant theory) 336.
- Fuller, F. E. (Possio's integral) 427.
- Fulton, C. M. (Non-Euclidean projectile) 92.
- G.-Rodeja F., E. s. Rodeja F., E. G.- 243.
- Gabor, D. (Wave theory of plasmas) 447.
- Gadd, G. E. (Swimming of snakes and eels) 419.
- Gaddum, J. W. (Tetrahedron) 379.
- Gaeta, F. (Chaîne syzygétique) 148; (Postulation régulière d'une variété algébrique) 389.
- Gál, I. S. (Méthode de résonance) 335.
- Galanin, A. D. und I. Ja. Pomerančuk (Spektrum des μ -Mesohydrogens) 445.
- Gallarati, D. (Superficie del quinto ordine) 147.
- Galli, M. (Deformazioni relativistiche. I.) 208.
- Galloni, E. E. (Roentgeninterferenzen) 449.
- Galwin, L. s. M. Morduchow 172.
- Gamba, A. (Gruppo simmetrico) 24.
- Gans, D. (Elliptic geometry) 140.
- R. (Definition des Ampère) 202.
- Ganzhorn, K. (Kubisch raumzentrierte Strukturen der Übergangsmetalle) 237.
- Garabedian, P. R. (Green's function) 88.
- — — and H. L. Royden (Cavitational flow) 185.
- — — and D. C. Spencer (Cavitational flow) 185.
- García Pradillo, J. (Maxima und Minima) 289.
- Garnir, H. (Transformation de Laplace) 114.
- Garreau, G. A. (T -matrices) 63.
- Gáspár, R. s. P. Gombás 445.
- Gastinger, W. (Reelle quadratische Formen) 46.
- Gatteschi, L. (Zeros of functions) 298.
- Gaugh, W. J. and J. K. Slap (Elastic wing aerodynamic characteristics) 418.
- Gaus, H. (Mesontheorie) 227.
- Gavrilov, N. I. (Stabilität nach Ljapunov) 96.
- Gavurin, M. K. (Systeme von Differentialgleichungen) 314.
- Gebelein, H. (Korrelationspektrum) 367.
- s. M. Schuler 349.
- Gerard, G. (Bending) 176.
- Gerasimenko (Kuznecova), L. V. (Cauchy-Kowalewskisches Problem) 322.

- Gerber, R. (Écoulements d'un liquide) 419.
- Germain, P. (Écoulements des fluides compressibles) 108.
- et M. Fenain (Correspondance entre les solutions) 191.
- et M. Liger (Écoulements subsoniques et transsoniques) 193.
- Germay, R. H. (Produit indéfini) 302; (Théorème de Poincaré) 318.
- Geronimus, Ja. L. (Orthogonale Polynome V. A. Steklovs) 66.
- Gerstenkorn, H. (Widerstand reiner Metalle) 236; (Wellen in kubischen Gittern) 237.
- Geršuni, G. Z. (Wärme konvektion) 427.
- Gherardelli, F. (Gruppo dei punti $(k+1)$ -pli) 147.
- Gianola, U. F. (Investigation of magnetic lenses) 207.
- Gichman, I. I. (Verteilungsfunktion) 352.
- Giese, A. (Einmalprämiensystem) 372.
- Gilbarg, D. (Phragmén-Lindelöf theorem) 104; (Unsteady flow) 105.
- Gilroy, T. I. s. R. A. Clark 175.
- Giorgi, E. de (Ricerca dell'estremo) 108; (Funzioni assolutamente integrabili) 285.
- Girshick, M. A. and H. Rubin (Bayes approach) 354.
- Glicksberg, I. L. (Kakutani fixed point theorem) 121.
- Glivenko, E. V. (Ebene Variation) 287.
- Gloden, A. (Diophantine equations) 264.
- Gluckstern, R. L. s. F. Rohrlisch 438.
- Gnedenko, B. V. (Divergenz zwischen Verteilungen) 351.
- — — und V. S. Michalevič (Verteilungsfunktion) 351.
- — — und E. L. Rvačeva (Empirische Verteilungen) 350.
- Gochberg, I. C. (Anwendung der Theorie der normierten Ringe) 121.
- Goddard, L. S. (Quadratic forms) 15.
- Godeaux, L. (Involuzione di Geiser) 384; (Système canonique à composantes fixes) 390; (Singularité d'une surface multiple en un point de diramation) 390; (Systèmes canonique et pluricanoniques) 391; (Involutions rationnelles) 391; (Enveloppes de courbes) 391.
- Golab, St. et T. H. Wróbel (Courbure et torsion géodésique) 392.
- Goland, M. s. M. A. Dengler 187.
- Goldberg, M. (Rotors in spherical polygons) 160.
- Goldberger, M. L. s. J. B. French 444.
- Goldhaber, J. K. (Rings of diagonal matrices) 35.
- Goldie, A. W. (Direct decompositions. I. II.) 29; (Jordan-Hölder theorem) 30.
- Goldsworthy, F. A. (Rotational flow) 195.
- Gombás, P. (Elektronenzustände in Atomen) 229; (Statistisches Atommodell) 229; (Statistische Theorie der Atomkerne) 441; (Edelmetalle und Alkalimetalle) 450.
- — — und R. Gáspár (Atom-eigenfunktionen) 445.
- Gomza, Alexander s. Frank di Maggio 177.
- Goodier, J. N. and R. E. D. Bishop (Critical reflections) 180.
- — — and H. J. Plass (Elastic stability) 176.
- Goodman, A. W. and W. M. Zaring (Euclid's algorithm) 40.
- Th. R. (Supersonic speeds) 427.
- Goodstein, R. L. (Limit of the ratio of $\sin x$ to x) 289.
- Goormaghtigh, R. (Familles de cercles) 394.
- Gordon, I. I. (Abbildungen eines n -dimensionalen Komplexes) 167.
- Gorelik, G. S. s. I. L. Bernštejn 206.
- Gorenstein, D. (Adjoint plane curves) 385.
- Gorter, C. J. and J. Haantjes (Anti-ferromagnetism) 456.
- Görtler, H. (Laminare Grenzschichten) 420.
- Goto, S. (Compton scattering) 438.
- Gourceaux, M. et A. Colombani (Courants induits) 428.
- — s. A. Colombani 428.
- Gradštejn, I. S. (Differentialgleichungen) 95.
- Graf, U. und H.-J. Henning (Operationscharakteristiken) 362.
- Graffi, D. (Equazioni di Maxwell) 204.
- Grant, A. M. (Runs in smoothed random series) 369.
- Graves, L. M. (G. A. Bliss) 2.
- R. E. (Orthogonal functions) 294.
- Green, A. E., R. S. Rivlin and R. T. Shield (Elastic deformations) 412.
- H. S. s. H. Messel 226.
- J. A. (Duality in abstract algebra) 28.
- — — and D. Rees (Semigroups) 19.
- J. W. (Chords of a convex surface. II.) 160; (Level surfaces of potentials) 326.
- jr., B. F. (Latent structure analysis) 361.
- Greenberg, L. H. and W. W. Happ (Mean deviation meter) 356.
- Greifinger, P., J. Levinger and F. Rohrlisch (Scattering of gammas) 438.
- Grib, A. A. (Hydraulischer Stoß) 198.
- Grigorev, A. S. (Verbiegung) 176.
- Grivet, P. (Lentille électronique) 207, 436.
- Grobman, D. M. (Charakteristische Exponenten von Systemen) 317.
- Gröbner, W. (Teorema di Severi) 387.
- Groschwitz, E. (Feldmechanik) 221.
- — — und H. Hönl (Beugung am Spalt. I.) 431.
- Gross, B. (Volterra integral equation) 327.
- — — and H. Pelzer (Delta functions) 126.
- W. (Capacità elettrostatica di conduttore) 202.
- Grosswald, E. (Modular group) 89; (Parabolic generators) 312.
- Grottemeyer, K. P. (Bestimmung von Flächen) 393.
- Grothendieck, A. (Espaces fonctionnels généraux) 117.
- Gruenberg, H. (Inductive posts) 204.
- K. W. (Theorem of Burnside) 23.
- Grün, O. (Endliche Gruppen) 22; (Ungerade vollkommene Zahlen) 271.

- Grüneberg, H.-J. (Multiple Faktoranalyse) 361.
- Guderley, G. (Normalization constant) 318.
- Gugenheim, V. K. A. M. (Piecewise linear embedding) 409.
- Günther, P. (Huygensches Prinzip) 322.
- Gupta, A. M. Sen s. Sen Gupta, A. M. 176.
- Suraj N. (Einstein's gravitational field) 209.
- Guptill, E. W. and A. D. MacDonald (Acoustical field) 417.
- Gurevič, M. I. (Stoß einer Platte) 185.
- V. B. (Lineare Differentialgleichungen) 92.
- Gustin, W. (Partition polynomials) 42.
- Guy, J. et M. Harrand (Orbitales moléculaires) 230.
- Hacke, W. (n -faches Pendel) 173; (n -fache Netzwerke) 428.
- Haag, R. (Formale Korrespondenz) 210; (Spinwellengleichungen) 216.
- Haantjes, J. s. C. J. Corter 456.
- Haar, D. ter (Gentile's intermediate statistics) 201.
- — s. B. Martin 453.
- Hadwiger, H. (Ergänzungsgleichheit) 140; (Intervalldunkelfunktionale) 283; (Mittelpunktpolyeder) 380.
- Hagen, G. B. (Integration von Bessel-Funktionen) 132.
- Hahn, W. (Differenzgleichungen) 318.
- Hahnemann, H. W. (Ausfluß-Strahlen) 419.
- Haimo, F. (Groups with condition on conjugates) 247.
- Haldane, J. B. S. (Tests for bimodality) 362.
- Hall, G. G. (Chemical valency. X. XI.) 229; (Electronic structure of diamond) 237.
- R. (Irregular threefold) 386.
- Hällström, G. af (Incision domains) 307.
- Halmos, P. R. (Commutators) 123.
- Halperin, I. (Theory of distributions) 126.
- Hanawa, S. and T. Miyazima (Decay processes. III.) 440.
- Hanner, O. (Topologie. I.) 402.
- Happ, W. W. s. L. H. Greenberg 356.
- Happ, W. W. s. E. S. Keeping 356.
- Harder, Keith C. s. E. B. Klunker 427.
- Härten, H. (Lebensversicherung) 375.
- Harmand, Monique s. J. Guy 230.
- Harris, L. A. (Instabilities in magnetron) 203.
- L. B. (Distribution of exceedances) 358.
- Theodore s. R. Bellman 355.
- Hart, J. J. (Trapezoidal rule) 293.
- Hartley, H. O. (Numerical integration) 132.
- Hartman, Ph. (Unsmooth Riemannian metrics) 151.
- Hartog, J. P. den (Mechanische Schwingungen) 172.
- Hashimoto, J. (Lattice with a valuation) 28.
- Hashitsume, Natsuki s. A. Ishihara 179.
- Hasse, H. (Klassenzahl Abel'scher Zahlkörper) 260; (Binäre diophantische Gleichungen) 263.
- Hatanaka, M. (Leontief system) 377.
- Haupt, O. et Chr. Pauc (Topologie approximative) 56.
- Hauser, W. and H. Feshbach (Scattering of neutrons) 444.
- Hausrath, A. H. s. M. Stippes 176.
- Havas, P. (Absorber theory of radiation) 439; (Conservation laws. II.) 441.
- — s. J. A. McLennan jr. 441.
- Havelock, T. H. (Submerged solid moving horizontally) 199.
- Hayes, Ch. A. (Φ -pseudostrong blankets) 56; (Differentiation of set functions) 282.
- N. D. (Cycles of the substitution ($xlce^x$)) 306.
- Hayman, W. K. (Inequality for real functions) 60.
- Hazen, W. E., R. E. Heineman and E. S. Lennox (Application of Fermi model) 445.
- Heaps, H. S. and G. Herzberg (Rotation-vibration spectrum) 230.
- Hearmon, R. F. S. (Frequency of vibration) 180.
- Heffter, L. (J. L. Fuchs) 3.
- Heiden, J. A. van der (Paired comparisons) 358.
- Heineman, R. E. s. W. E. Hazen 445.
- Heinhold, J. (Konstruktion involutorischer Kerne) 113.
- Heinrich, G. (Kreiselhorizont) 171.
- Heins, M. (Riemann surfaces) 87.
- Heinz, C. (Invarianten bei Gruppen) 252.
- E. (Operatoren im Hilbert-Raum) 337.
- Heller, A. (Spaces with operators) 166; (Fibre bundles) 166.
- I. (Divergent series) 77.
- Hellwig, G. (Systeme elliptischer Differentialgleichungen) 102.
- Hemelrijk, J. (Sign test) 363; (Wilcoxon's two-sample test) 364.
- Hemer, O. (Diophantine equation) 267.
- Henley, E. M. (π -meson production) 439.
- Henning, Hans-Joachim s. U. Graf 362.
- Henrici, P. (Bergmans Integraloperator) 107.
- Herglotz, G. (Wellengleichung) 324.
- Hermann, R. (Diffuser efficiency) 427.
- Hermes, H. (Entscheidung von mathematischen Problemen) 7.
- Herpin, A. (Théorie cinétique des solides) 235.
- Herring, C. (Energy of a Bloch wall. I. II.) 453.
- Herriot, J. G. (Double Fourier series) 67.
- Herrmann, H. (Projektive Geometrie) 381.
- Herstein, I. N. and J. E. Adney (Automorphism group of a finite group) 249.
- Hervé, M. (Fonctions fuchsiennes) 312.
- Hervey, H. (Hobbes and Descartes) 1.
- Herz, J.-C. (Idéaux semi-premiers) 31.
- Herzberg, G. s. H. S. Heaps 230.
- Hess, F. G. (Directional correlation functions) 442.
- Heubeck, G. (Kindersterbeldversicherungen) 372.
- Hewitt, E. s. K. Yosida 54.
- Heyman, J. (Transversely loaded square grid) 412.

- Hiedemann, E. und R. D. Spence (Relaxationerscheinungen) 414.
- Higman, G. (Topological groups) 26.
- Hill, J. D. (Indefinite integrals) 285.
- R. (Plastic-rigid body) 178.
- Hillman, A. (Differential algebra) 318.
- Hines, J. (Operator mathematics) 127.
- Hinteregger, H. (Lorentzkraft) 428.
- Hirsch, K. A. (Soluble groups. IV.) 20.
- R. A. (Rigid circular inclusion) 176.
- Hirschfelder, Joseph O. s. R. J. Buehler 225.
- — — s. C. F. Curtiss 136.
- Hitotumatu, S. (Ideals and domain of regularity. II.) 310.
- Hittmair, O. (Inelastische Streuung) 444; (Richtungskorrelationen) 444.
- Hjalmars, S. s. O. Brulin 440.
- Hlavatý, V. (Deformation of subspaces) 155; (Einstein connection of the unified theory of relativity) 402; (Spinor space. II.) 402.
- Hodge, W. V. D. (Complex manifolds) 400.
- Hoeffding, W. (Tests based on permutations of observations) 364.
- Hoelscher, R. P., J. N. Arnold and S. H. Pierce (Graphic aids) 346.
- Höfinger, E. (Hypergeometrische Funktionen) 297.
- Hofreiter, N. (Approximation von komplexen Zahlen) 47.
- Hoheisel, G. (Aufgabensammlung) 91.
- Höhler, G. (Theorie des Elektrons von Dirac) 440.
- Homilius, J. (Innere Feldemission) 450.
- Homma, T. (Continuous functions) 287.
- Hönl, H. (Klassisches Beugungsproblem) 431.
- s. E. Groschwitz 431.
- Hopf, E. (Paper by D. Gilbarg) 104.
- Hornback, J. H. (Integral equations) 327.
- Hornich, H. (Elliptische Differentialgleichungen) 103; (Partielle Differentialgleichungen) 103; (Häufigkeit von regulären Lösungen) 321.
- Hove, L. van (Modèle particulier de champ quantifié) 213.
- — — s. B. R. A. Nijboer 232.
- Howarth, D. J. and H. Jones (Electronic wave functions) 237.
- Hu, Sze-tsen (Space of continuous paths. II.) 406.
- Huang, Kun s. A. B. Bhatia 224.
- M. K. s. H. D. Conway 176.
- Su-Shu (Neutron diffusion) 444.
- Hubbard, S. J. s. R. A. Buckingham 226.
- Huby, R. s. A. B. Bhatia 224.
- Huckemann, F. (Verschmelzung von Randstellen) 308.
- Hufford, G. A. (Wave propagation) 205.
- Hughes, N. J. S. (Regular ω -linear mappings) 248.
- Hunter, H. F. s. E. Lapin 187.
- Huron, R. s. D. Mitrović 128.
- Hurst, C. A. (Bethe-Salpeter equation) 215.
- Ibrahim, E. M. (S-functions) 15.
- Iha, S. and G. P. Dube (Alpha-decay energies) 224.
- Ikeda, M. (Unified field theory) 209.
- Iliev, L. (Schlichte Funktionen) 304.
- Illing, E. (Anisotropic plates) 176.
- Imamura, T. s. R. Utiyama 438.
- Inaba, E. (Normal algebraic number fields) 259.
- Ingersoll, B.-M. (Équations hyperboliques) 100.
- Ingleson, A. W. (Hahn-Banach theorem) 120.
- Inzinger, R. (Projektiv invariante Konfiguration) 144.
- Ioffe, B. und A. Rudik (π -Meson) 219.
- Irani, R. A. K. (Sexagesimal multiplication table) 1.
- Isihara, A., N. Hashitume and M. Tatibana (Rubberlike elasticity. V.) 179.
- Itô, D. („Weißkopf-Wigner method“) 439.
- H. Tanaka, Y. Watanabe and M. Yamazaki (S-matrix theory) 215.
- Noboru (Gruppentheorie. III.) 23; (A-groups) 23.
- Ivanov, V. K. (Gleichmäßige Approximationen) 293.
- Ivanović, B. (Déviation standard) 357.
- Ivašev-Musatov, O. S. (Fou-rier-Stieltjes-Koeffizienten) 67.
- Ivey, H. F. (Space charge and transit time) 203; (Space-charge-limited currents) 203.
- Jablonskij, S. V. (Superposition von Funktionen) 6.
- Jackson, F. H. (Diluted matrices. I. II.) 290.
- J. R. (Topologies on function spaces) 117; (Homotopy groups of function spaces) 166; (Absolute neighbourhood retracts) 402.
- M. (Transformations of series) 73; (Particular well-poised ${}_6H_6$) 73.
- Jacob, L. (Electron immersion objective) 207.
- Jacobson, N. (Lie algebras) 34; (Théorème d'Engel) 34.
- and C. E. Rickart (Homomorphisms of Jordan rings) 256.
- Jacrot, B., F. Netter et F. Tyrode (Absorption de neutrons) 228.
- Jaeger, A. (Vertauschbare Differentiationen) 37.
- Jaffard, P. (Complétion d'un espace uniforme) 164.
- Jager, J. de (Additive Versicherungen) 371.
- Jaiswal, J. P. (Meijer transform) 114, 329.
- Jakobi, R. (Ellipse) 143.
- James, G. S. (Theorem of Cochran) 358.
- Janenko, N. N. (Verbiegbare Flächen) 151; (Metrische und projektive Flächen) 153; (Klasse einer Riemannschen Metrik) 154; (Metriken der Klasse 2) 399.
- Jánossy, L. (Lorentz transformation) 208.
- Jaswon, M. A. and A. J. R. Foreman (Dislocation with a lattice inhomogeneity) 448.
- Jauch, J. M. (Radiative correction) 439.
- Jebe, E. H. (Sub-sampling designs) 366.
- Jeffreys, H. (Reduction of gravity) 240.
- Jenkins, J. A. (Conformal mapping) 307.
- — — and M. Morse (Pseudo-harmonic functions) 326.
- Jennings, J. C. E. (Virtual optics of magnetic prisms) 436.

- Jevlev, V. M. (Wärmeaus-
tausch) 419.
- Jonas, H. (Birationale Raum-
transformation) 143; (Haupt-
flächen im pseudosphäri-
schen Strahlensystem) 152;
Isometrische Paare Tsche-
byschefscher Netze) 394.
- Jones, B. W. (Meyer's theo-
rem) 44.
- D. S. (Diffraction pro-
blems) 429; (Diffraction by
a wave-guide) 430.
- F. B. (Aposyndetic and
non-aposyndetic continua)
403.
- H. (Shear constants of β -
brass) 449.
- s. D. J. Howarth 237.
- H. L. (Group sequential
sampling of attributes) 359.
- R. V. and C. W. McCombie
(Brownian fluctuations) 201.
- W. P. (Theodorsen func-
tion) 186.
- Jordan, P. (Quantenmecha-
nik) 437.
- Joseph, A. W. (Whittaker-
Henderson method) 368.
- Jourdain, Ph. E. B. s. G. Can-
tor 51.
- Jouvet, B. (Point chargé) 202;
(Électromagnétisme) 428.
- Juan, R. San s. San Juan, Ri-
cardo 303, 315, 328.
- Judd, D. L., J. V. Lepore, M.
Ruderman and P. Wolff
(Electron in a magnetic
field) 439.
- Jung, H. (Fouriertransforma-
tion) 175; (Statik der Kreis-
platten) 410.
- Kac**, G. I. (Unimodulare
Gruppe) 251.
- Kadison, R. V. (Infinite uni-
tary groups) 252.
- — — and I. M. Singer
(Representations of con-
nected groups) 252.
- — — s. B. Fuglede 336.
- Kaiser, T. R. and R. L. Closs
(Radio reflections. I.) 234.
- Kale, M. N. (Diophantine
equation) 264.
- Kalicki, J. (Finite algebras)
31.
- Kalinin, N. K. (Filtration)
198.
- Kalinowski, W. C. and F.
Regan (Probability for cer-
tain types of emissions)
441.
- Källén, G. (Definition of re-
normalization constants)
214.
- Kamefuchi, S. s. H. Umezawa
217.
- Kammerer, A. (Stabilité de
l'équilibre) 178.
- Kampé de Fériet, J. et J. Ko-
tik (Ondes de pesanteur)
198.
- Kamynin, L. I. (Eindeutig-
keitssätze) 101.
- Kanagasabapathy, P. (Dio-
phantine approximation)
47.
- Kanazawa, H. (Nuclear for-
ces) 224.
- Kanold, H.-J. (Kreisteilungs-
polynome) 270.
- Kantorovič, L. V. und V. I.
Krylov (Nährungsmetho-
den) 342.
- Kapilevič, M. B. (Gleichung
vom elliptisch-hyperboli-
schen Typus) 321.
- Kaplan, E. L. (Integration
near a singularity) 132.
- H. (Spin-wave treatment)
454.
- Kaplansky, I. (Separable al-
gebras) 119; (Dedekind
rings and valuation rings)
257.
- Karamata, J. (Abschnitte
einer Potenzreihe) 63.
- Karunes, B. (Distribution of
stress) 177; (Initial stress)
448.
- Karush, W. (Isoperimetric
problems) 109; (Index of
extremal arc) 110.
- Kašanin, R. (Schéma de Ba-
nachiewicz) 341.
- Kasch, F. (Primelementzer-
legung) 256.
- Kasner, E. and J. DeCicco
(Physical systems of cur-
ves) 139.
- Kasteleijn, P. W. (Antiferro-
magnetic chain) 456.
- Kastler, D. (Viriel relatif)
446.
- Katayama, Y. (Transforma-
tion function) 438.
- Katz, E. (Bands in solids) 237.
- Kawahara, Y. (Differential
forms) 148.
- Kazačkov, D. V. (Lokaler
Satz in der Gruppentheo-
rie) 21.
- Keeping, E. S. and W. W.
Happ (Mean deviation me-
ter) 356.
- Kefer, F. and C. Kittel (Theo-
ry of antiferromagnetic re-
sonance) 455.
- Kelbg, G. s. H. Falkenhagen
203.
- Kellerer, H. (Marktforschung)
378.
- Kelley, J. L. (Banach spaces)
120.
- Kendall, D. G. (Bacterial
growth) 370.
- M. G. (Moment-statistics
in samples) 358.
- Kertész, A. and T. Szele (Abe-
lian groups) 20.
- Kichenassamy, S. (Collisions
entre atomes et électrons)
228.
- Kiefer, J. s. A. Dvoretzky 376.
- Kilmister, C. W. s. E. W.
Bastin 209.
- Kim, E. I. (Harmonische
Funktion) 105.
- Kimball, W. Scribner (Con-
ditions de Weierstrass et
de Legendre) 109.
- Kimura, T. and Y. Miyachi
(Longitudinal and scalar
photons) 438.
- Kiper, G. (Gelenkgetriebe)
149.
- Kittel, C. s. F. Kefer 455.
- Klein, G. (Optical transmis-
sion) 232.
- M. J. (Theorem of Kra-
mers) 210.
- O. (Superconductivity) 452.
- Barmen, F. (Pseudover-
bände) 26.
- Klemens, P. G. s. K. S. Krish-
nan 452.
- Klingenberg, W. (Einspan-
nungsproblem) 396.
- Klinkenberg, P. F. A. (Nu-
clear shell structure) 441.
- Klunker, E. B. and K. C. Har-
der (Supersonic flow) 427.
- Knappe, W. (Nyströmscher
Stieltjesplanimeter) 133.
- Kneebone, G. T. s. J. G.
Semple 381.
- Kneser, H. (Mathematik des
20. Jahrhunderts) 4; (Théo-
rie des jeux) 122.
- Knudsen, H. L. (Vector for-
mula) 149; (Radiation field
of a beam antenna) 203.
- Kober, H. (Extension of rec-
tangle functions) 286; (Ap-
proximation by nearly ana-
lytic functions) 303.
- Koch, K. M. s. H. Fieber 451.
- — — s. A. Nedoluha 450.
- Kockel, B. (Energiebänder)
450.
- Kodaira, Kunihiko s. W.-L.
Chow 309.
- Kohn, W. (Validity of Born
expansions) 438.
- Koksma, J. F. (Diophantine
property) 48.

- Kolmogorov, A. N. (Widerstand und Geschwindigkeitsprofil) 424.
- Kolodner, I. I. (Linear differential equations) 91.
- Kompaneec, A. (Elektrodynamik von Dirac) 217.
- Kopineck, H.-J. (Quantentheorie des N_2 -Moleküls. II.) 230.
- Koppe, H. (Supraleiter) 452.
- Kornhauser E. T. and I. Stakgold ($\Delta^2 u + u = 0$) 323.
- Korobov, N. M. (Diophantische Approximationen) 47; (Normale periodische Systeme) 278.
- — — und A. G. Postnikov (Gleichverteilung) 278.
- Kosambi, D. D. (Path-spaces) 157.
- Kosmodamianskij, A. S. (Biegung eines Balkens) 177.
- Kothari, D. S. s. F. C. Auluck 215.
- L. S. (Mass of a photon) 438.
- Kotik, J. s. J. Kampé de Fériet 198.
- Kovács, I. (Rotationskonstanten. III.) 446.
- Kramers, H. A. (Antiferromagnetismus) 454.
- Krames, J. L. (Darstellende Geometrie) 149.
- Kreisel, G. (Non-finitist proofs. II.) 7.
- Krishna, S. (Congruences formed by tangents) 152.
- Krishnan, K. S. and P. G. Klemens (Temperature variation) 452.
- — — and S. K. Roy (Madelung constant) 448; (Oscillation of alkali halide crystals. II.) 456.
- Kristensen, P. and C. Möller (Convergent S-matrix formalism) 215.
- Kriszten, A. (Hyperkomplexe Funktionen) 89.
- Kronenberg, St. (Kerndispersionsformel) 222; (Streuung schneller Elektronen) 442.
- Kronig, R., A. Thellung and N. H. Woldringh (Propagation of sound in He II) 448.
- Krylov, V. I. s. L. V. Kantorovič 342.
- Ku, C. H., M. I. Yüh and K. K. Chen (Laplace integral) 113.
- Kubo, R. (Spin-wave theory) 456.
- Kufarev, P. P. (Strömung um Kreisbogen) 419.
- Kuhrt, F. (Tröpfchenmodell) 231.
- Kuipers, L. and B. Meulenbeld (Continued fractions) 46.
- Küpfmüller, K. (Theoretische Elektrotechnik) 201.
- Kuranishi, M. (One-parameter subgroups) 253.
- Kurepa, G. (Finite sets) 52; (Nombres ordinaux) 280.
- Kurita, M. (Riemann space) 398.
- Kurşunoğlu, B. (Einstein's field theory) 209.
- Kurth, R. (Stellardynamik) 238; (Ergodenproblem) 340.
- Kuttner, B. (Theorem of consistency. II.) 63.
- Kuznecov, M. D. (Hydrodynamik eines Ringquerschnitts) 185.
- Kwal, B. (Mécanique géométrique non linéaire) 211.
- Kynch, G. J. (Two-body scattering problem. I. II.) 225.
- Ladyženskaja, O. (Fourierreihen für Gleichungen von hyperbolischem Typus) 322; (Differenzen) 322.
- Lagrange, R. (Produits d'inversions) 143.
- Laitone, E. V. (Theodorsen's circulation function) 186.
- Lakin, A. (Dougall's theorem) 74.
- Lambe, C. G. (Lamé-Wangerin functions) 299.
- Lambossy, P. (Oscillations forcées d'un liquide) 419.
- Landis, E. M. (Cauchysches Problem) 101.
- Landsberg, P. T. (Barrier layer rectifiers) 451; (Rectification) 451.
- Lane, N. D. s. S. Beatty 263.
- Lang, R. (Zufallsschwankungen) 373.
- S. (Quasi algebraic closure) 262.
- Langefors, B. (Analysis of elastic structures) 174.
- Langhaar, H. L. (Torsion of curved beams) 177.
- Lapin, E., R. Crookshanks and H. F. Hunter (Downwash behind a wing) 187.
- Lauffer, R. (Hermite'sche Rekursionsformel) 288.
- Laville, G. (Analyse harmonique) 131.
- Lawson, J. D. (Angular distribution of radiation) 228.
- Lazard, M. (Algèbres enveloppantes universelles) 34.
- Lazutkin, D. F. (Elastoplastische Wellen) 181.
- Le, N. Van (Kármán integral method) 421.
- Le Couteur, K. J. (Factorization particles of half-odd spin) 216; (Dirac's new electrodynamics) 217.
- Le Levier, R. E. and D. S. Saxon (Nucleon-nuclei scattering) 444.
- Lebedinskij, A. I. (Sternwolken) 239.
- Ledinegg, E. und P. Urban (Schwingungen elektrodynamischer Systeme) 205; (Maxwellsche Gleichungen) 428.
- Leenov, D. (Electromagnetic properties of spin-one particles) 216.
- Lefschetz, S. (Nonlinear oscillations. II.) 315.
- Legras, J. (Écoulement conique) 185; (Ondes de choc) 197.
- Lehmann, H. und H. Steinwedel (Verallgemeinerte Feldgleichungen) 221.
- Lehner, J. s. B. Epstein 82.
- Lehto, O. (Kernel function in Hilbert function space) 333.
- Leja, F. (Séries entières doubles) 291.
- Lekkerkerker, C. G. s. W. Peremans 11.
- Lelong-Ferrand, J. (Représentations d'un domaine plan) 306.
- Lembcke, H.-R. (Schwingungen von Stäben) 414.
- Leng, Sen-Ming (Characteristic roots of a matrix) 12.
- Lennard-Jones, J. E. (Spatial correlation. II.) 446.
- Lennox, E. S. s. W. E. Hazen 445.
- Lense, J. (Kristalloptik) 433.
- Lepore, J. V. s. D. L. Judd 439.
- Lepson, B. (Hyper-Dirichlet series) 79.
- Leray, J. (Équation aux dérivées partielles) 99.
- Lessen, M. (Stability of flows) 418; (Stability of laminar flows) 420.
- Leutert, W. (Heat equation) 137.
- — — and G. G. O'Brien (Wave equation) 138.
- Levene, Howard (Tests of randomness) 364.
- Levier, R. E. Le s. Le Levier, R. E. 444.

- Levinger, J. s. P. Greifinger 438.
 — J. S. (Scattering of gammas) 438.
 Levinson, N. (Z-closure of eigenfunctions) 124.
 — — s. E. A. Coddington 95.
 — — s. G. F. D. Duff 317.
 Lévy, M. (Théorie relativiste des forces nucléaires. IV. V.) 225; (Meson theory of nuclear forces) 227.
 Levy, S. (Heat transfer) 188.
 — — and R. A. Seban (Laminar „separation“) 189.
 Lewis, D. C. (Complex linear differential systems) 93.
 — F. A. (Linear congruence group) 251.
 Lewy, H. (Harmonic functions) 417.
 Libermann, P. (Structures presque paracomplexes) 156; (Formes différentielles) 156.
 Lichnerowicz, A. (Variétés pseudokähleriennes) 398.
 — — s. A. Borel 398.
 Liebmam, G. (Chromatic aberration) 207.
 Lifšic, I. M. (Störungstheorie) 212.
 Liger, M. s. P. Germain 193.
 Lighthill, M. J. (Squirring motion) 419.
 Lin, C. C. (Isenergetic flows) 183; (Stability of boundary layer) 188.
 Lindgren, B. W. s. R. H. Cameron 331.
 Lindley, D. V. (Theory of queues) 355.
 Ling, Ch.-B. $\left(\int_0^{\infty} (x^m/\sinh^2 x) dx \right.$
 and $\int_0^{\infty} (x^m/\cosh^2 x) dx \Big)$ 349;
 (Torsion of a circular cylinder) 411; (Notched strip) 412.
 Lister, W. G. (Lie triple systems) 34.
 Liu, H. Ch. (Entstehung von Ringwellen) 200.
 Livšic, M. S. (Reduktion linearer Operatoren) 339; (Resolvente eines Operators) 339.
 Ljubarskij, G. Ja. und L. E. Pargamanik (Magnetrons) 437.
 Ljunggren, W. (Diophantine equation) 265.
 Ljustrnik, L. A. s. N. K. Bari 3.
 Lloyd, E. H. (Estimation of variance and covariance) 366; (Least-squares estimation) 366.
 Löbell, F. (Natürliche Geometrie) 152; (Richtungsübertragungen auf einer Fläche) 392.
 Locher-Ernst, L. (Freie Geometrie ebener Kurven) 145.
 Lodge, A. S. (Theorem in theory of elasticity) 410.
 Löfman, N. s. J. Andersson 14.
 Lohwater, A. J. (Boundary values) 300; (Harmonic functions) 326.
 Łojasiewicz, S. (Spirale logarithmique) 383.
 Longhorn, A. L. (Subsonic motion of a sphere) 192.
 Longhurst, R. S. (Ray aberration) 207.
 Longuet-Higgins, H. C. s. D. R. J. Boyd 231.
 — — — s. M. J. S. Dewar 445.
 Lorch, L. (Lebesgue constants) 67.
 Lorey, W. (Mathematische Vergangenheit Berlins) 2.
 Lotkin, M. (Integrating procedure) 135; (Polynomials) 135.
 Löwdin, P.-O. (Numerical integration) 134.
 Löwig, H. F. J. (Primquotienten eines distributiven Verbandes) 27.
 Lozinskij, S. M. (Sätze von Jackson) 70.
 Lucas, R. (Ondes électromagnétiques) 203.
 Luce, R. D. (Finite oriented graphs) 169.
 Lüders, G. (Selbstenergie-Graphen) 215; (Verdampfungsneutronen) 223.
 — — R. Oehme und W. E. Thirring (π -Mesonen) 217.
 Ludford, G. S. S. (Shock transition) 191; (Riemann's method of integration) 191.
 Lüdi, F. (Magnetronverstärker) 203.
 Ludloff, H. F. and M. B. Friedman (Diffraction of blasts) 427.
 Ludwig, G. (Unitäre Feldtheorie) 441.
 Luke, Y. L. s. M. A. Dengler 187.
 Lurie, H. (Lateral vibrations) 415.
 Lüst, R. (Rotierende Gasmasse) 239.
 Luttinger, J. M. (Pion production) 226.
 Maak, W. (Kombinatorik) 9; (Integralmittelwerte) 311; (Fastperiodische Funktionen) 311.
 MacDonald, A. D. s. E. W. Guptill 417.
 Machida, S. s. M. Taketani 227.
 Macintyre, A. J. and S. S. Macintyre (Abel's series) 79.
 — S. S. s. A. J. Macintyre 79.
 Macke, W. (Spezielle Relativitätstheorie) 208.
 Mackey, G. W. (Locally compact groups. I.) 116.
 Mackie, A. G. and D. C. Pack (Transonic flow) 195.
 MacLane, S. s. S. Eilenberg 167.
 Macker, H. (Grenze der Totalreflexion. I.) 431; (II.) 432.
 Maggio, F. di, A. Gomza, W. E. Thomas e M. G. Salvadori (Instabilità laterale) 177.
 Maguire, B. A., E. S. Pearson and A. H. A. Wynn (Industrial accidents) 366.
 Mahajani, G. S., V. R. Thiruvengkatachar and V. D. Thawani (Tschebyscheff polynomials) 245.
 Majumdar, S. D. (Problem of three bodies) 231.
 Makarov, I. P. (Stabilitätskriterien nach Ljapunov) 317.
 Malenka, B. J. (Meson-nucleon interactions) 219.
 Malkin, I. G. (Stabilität einer Bewegung) 97; (Ljapunovsche Funktionen) 317.
 Malyšev, A. V. (Minkowski-Hlawkascher Satz über den Strahlkörper) 277.
 Mandelbrojt, S. (Théorèmes de composition) 81.
 Mandelbrot, B. (Démons de Maxwell) 200; (Durée intrinsèque d'une stratégie) 357.
 Mann, H. B. (Products of sets) 42; (Difference sets) 43.
 Manwell, A. R. (Constant velocity aerofoils) 418; (Hodograph transformation) 427.
 Maravall Casesnoves, D. (Nichteuklidische Raum-Zeit-Metrik) 208.

- March, A. (Raum in der Mikrophysik) 222.
 — N. H. (Thomas-Fermi fields) 446.
 — — — s. C. A. Coulson 230.
 Markham, J. J. (Second-order acoustic fields) 182, 196.
 Markus, L. (Global integrals) 320.
 Marmion, A. (Couples de points isogonaux) 141.
 Marriott, F. H. C. (Tests of significance) 363.
 Marschall, H. s. G. Falk 211.
 Martin, B. and D. ter Haar (Ferromagnet. I.) 453.
 — J. C., W. J. Moyce, W. G. Penney, A. T. Price and C. K. Thornhill (Gravity wave problems) 198.
 — M. H. (Characteristics) 320.
 — W. T. s. R. H. Cameron 331.
 Marvaud, J. (Tracé des trajectoires) 234.
 Marx, G. (Drehimpulse) 213.
 — H. (Optische Systeme aus Kugel- und Planflächen) 435.
 Masani, P. and T. Vijayaraghavan (Laurent's theorem) 310.
 Massey, H. S. W. s. R. A. Buckingham 226.
 — — — s. G. A. Erskine 446.
 — W. S. s. A. L. Blakers 406.
 — jr., F. J. (Distribution table) 357.
 Matlow, S. L. s. G. W. Wheland 452.
 Matschinski, M. (Hypothèse de périodicité) 350; (Probabilité des hypothèses) 350.
 Matsusaka, T. (Picard variety) 391.
 Matsushima, Y. (Lie group \mathfrak{S}_4) 25.
 Matthews, P. T. and A. Salam (Pseudoscalar meson-nucleon interaction) 218.
 Matthieu, P. (Extrapolationsverfahren) 346.
 Matusima, Y. (Problems of Birkhoff) 254.
 Maue, A.-W. (Kantenbedingung) 182.
 Mauguin, Ch. (Astronautique et relativité) 208.
 Maunsell, F. G. (Linear graphs) 169.
 Maxfield, J. E. (Pillai's theorem) 273.
 Maximon, L. G. and H. A. Bethe (Differential cross section for Bremsstrahlung) 439.
 Maxwell, E. (Model superconductivity) 452.
 May, J. M. („Studentized“ range) 358.
 Mayot, M. (Calcul des perturbations) 212.
 McCombie, C. W. s. R. V. Jones 201.
 McConnell, J. (Vacuum polarisation) 439.
 McKay, C. D. s. A. E. Scheidegger 213.
 McLellan, A. C. (Born-Green equation) 232.
 McLennan jr., J. A. and P. Havas (Conservation laws. I.) 441.
 McShane (Partial orderings) 162.
 Meier-Wunderli, H. (Basis of P. Hall) 22.
 Meister, A. G. s. S. M. Ferigle 446.
 Mejman, N. N. (Vergleichsätze) 83.
 Melan, E. (Wärmespannungen infolge wandernder Wärmequelle) 177.
 Meltzer, H. (Statistik) 357.
 Mendès, M. (Forme canonique) 91.
 Menger, K. (Abraham Wald) 3; (Length of paths) 158; (Théorie axiomatique des déterminants) 242.
 Menninger, K. (Mathematik und Kunst) 4.
 Meňšov, D. E. (Unbestimmtheitsgrenzen der Fourierreihen) 296; (Fourierreihen) 296.
 Méric, J. (Transmission d'un caractère héréditaire) 396.
 Meschkowski, H. (Konforme Abbildung) 86.
 Mesmer, G. s. J. P. Hartog 172.
 Messel, H. and H. S. Green (Distribution of scattered nucleons) 226.
 Metz, A. (Expérience de Sagnac) 208; (Expérience de Dufour et Prunier) 208.
 Meulenbeld, B. s. L. Kuipers 46.
 Mežlumjan, R. A. (Funktion der Querdeformation) 177.
 Michajlov, G. K. (Geometrie des fiktiven Untergrundes) 142.
 Michalevič, V. S. s. B. V. Gnedenko 351.
 Michel, J. G. L. (Smooth gunnery range tables) 130.
 — L. et R. Stora (Spectre d'énergie) 219.
 Michielsen, H. F. (Flexural-torsional buckling loads) 412.
 Michiura, T. (Groupes ordonnés. II. III.) 24.
 Michkovitch, V. V. (Équations linéaires algébriques) 340.
 Mihailovitch, B. (Inversion dans l'espace) 382.
 Miles, J. W. (Diffraction of an acoustic pulse) 182; (Interference factors) 185; (Chang's function) 187; (Slender body theory) 196; (Supersonic flow) 196; (Heat conduction) 201; (Three-dimensional electromagnetic problems) 202; (Diffraction of an electromagnetic pulse) 206.
 Miller, D. G. (Boolean algebra) 26.
 — J. C. P. (Parabolic cylinder functions) 74; (Standard solutions to Weber's equation) 93.
 — K. S. s. L. A. Zadeh 429.
 Millsaps, K. and K. Pohlhausen (Rotating plate) 188.
 Mil'man, D. (Randstruktur eines konvexen Bikompaktums) 118.
 Milne-Thomson, L. M. (Deformationen und Elastizität) 412.
 Minckovskij, M. Š. (Tragfähigkeit eines Fundaments) 177.
 Mindlin, R. D. (Piezoelectric crystal plates) 235.
 Mineo, C. (Configurazioni d'equilibrio) 417.
 Mineur, H. (Points singuliers des systèmes canoniques) 314.
 Minorsky, N. (Oscillations non linéaires) 97; (Systèmes à l'action retardée) 318.
 Mirguet, J. (Convexité d'un domaine) 158.
 Miščenko, E. F. (Nicht-abgeschlossene Mengen) 165.
 Mises, R. von (Hydrodynamik) 190.
 Mishra, B. (Wave functions) 445.
 — R. S. (Courbes appartenant à un sous-espace d'un espace riemannien) 399.

- Misonou, Y. and Z. Takeda (Compactification) 402.
- Mitra, A. N. (Compton scattering and Bremsstrahlung) 215.
- Mitrović, D. (Machines électriques) 348.
- — R. Huron et R. Tomović (Machines servant à résoudre les systèmes d'équations linéaires) 128.
- — and R. Tomović (Differential equation of heat-flow) 348.
- Miyachi, Y. s. T. Kimura 438.
- Miyazima, T. s. S. Hanawa 440.
- Moessner, A. (Magic squares) 264; (Problemi diofantei) 264; (Multiple identity) 264.
- Mohr, E. (Fundamentalsatz der Algebra) 14; (Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem) 94; (Beschleunigungswiderstand) 183; (Fundamentalsatz der Algebra) 245; (Konvexe Funktionen) 288.
- — und W. Noll (Schwarzsche Ungleichheit) 60.
- Moise, E. E. (Claytor imbedding theorem) 403.
- Molčanov, A. M. (Diskretheit des Spektrums) 107.
- Møller, C. s. P. Kristensen 215.
- Moller, R. (Sums of powers of numbers) 268.
- Molmud, P. (Landé electron) 221.
- Monna, A. F. (Transformation des nombres p -adiques) 50.
- Mönnig, P. (Integralgleichungen) 111.
- Montaldo, O. (Sistemi di Riccati) 314.
- Montgomery, D. and L. Zippin (Four-dimensional groups) 25.
- Moór, A. (Scheitelpunkte) 392.
- Moran, P. A. P. (Estimation of death-rates) 369.
- Mordell, L. J. (Cubic equations $z^2=f(x,y)$) 266.
- Morduchow, M. and L. Galowin (Double-pulse stability) 172.
- Morikawa, G. (Wing-body-tail interference) 194.
- — K. (Boundary problem for wave equation) 194.
- Morishima, M. (Liquidity preference) 376.
- Moriya, M. (Restklassenkörper bewerteter perfekter Körper) 258.
- Moroškin, Ju. F. (Konfigurationen von Mechanismen) 150.
- Morozov, M. I. (Gleichmäßige Annäherung stetiger Funktionen) 68.
- Morozova, E. A. (Kürzeste Linien auf Rotationsflächen) 151.
- Morrey jr., C. B. (Quasi-convexity and lower semi-continuity) 108.
- Morse, M. s. J. A. Jenkins 326.
- Moser, L. (Distances determined by n points) 141.
- Moshinsky, M. s. J. Adem 170.
- Moshman, J. (Straggler mean) 365.
- Moskvitin, V. V. (Plastische Deformationen) 178.
- Moyal, J. E. (Spectra of turbulence) 424.
- Moyce, W. J. s. J. C. Martin 198.
- Muchin, I. S. (Markov-Hermiteische Interpolationspolynome) 135.
- Mueller, C. P. and H. Eyring (Binding energy calculations) 230.
- Mukherjee, B. N. and T. S. Nanjundiah (Tschebyscheff polynomials $T_n(z)$ and $U_n(z)$) 298.
- — s. H. D. Bagchi 75.
- Müller, Claus (Methode der Strahlungskapazität) 107; (Wellengleichung) 325.
- H. R. (Isometrische Drehvorgänge) 150.
- W. (Langgestreckter Rotationskörper) 183.
- Mulliken, R. S. (Wave functions of helium atom) 230.
- Munakata, K. (Elastic stability of a rectangular plate) 415.
- Muracchini, L. (Trasformazioni puntuali) 396.
- Murnaghan, F. D. (Rotation group) 24.
- Murray, F. J. s. P. Brock 343.
- Muscia, C. (Lente elettronica) 136.
- Musselman, J. R. (Rectangular hyperbola) 144.
- Myrberg, L. (Harmonische Funktionen) 106.
- Myškis, A. D. (Funktionenfolgen) 67; (Erweiterungen topologischer Räume) 163.
- Nabarro, F. R. N. (Stationary dislocations) 448.
- Nagata, M. (Krull's conjecture) 257.
- Nagell, T. (n -ter Nichtpotenzrest modulo p) 41; (Diophantische Gleichung $u^2 - Dv^2 = C$) 267; (Plus petit non-rest) 267; (Restes et non-restes cubiques) 267.
- Naghdi, P. M. (Elastoplastic circular plates) 179.
- Nair, K. R. („Studentized“ extreme deviate) 358.
- Najmark, M. A. (Lineare Differentialoperatoren) 126.
- Nakayama, T. (Simple and other rings. I.) 32; (Idèle-class factor sets) 38; (Subfields) 262.
- Namiki, M. and H. Takahashi (Transmission lines) 431.
- Nanjundiah, T. S. s. B. N. Mukherjee 298.
- Nardin, J. (Calcul des réserves) 349.
- Nassif, M. (Polynomials) 80; (Behaviour of $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{2} \pi i n^2} \frac{z^{2n}}{n!}$) 305.
- Nataf, R. et R. Bouchez (Transitions β et structure nucléaire. I.) 442; (II.) 443.
- Natalevič, V. K. (Integralgleichung und Randwertproblem) 111.
- Natanson, I. P. (Mehrmals differenzierbare periodische Funktionen) 71.
- Nedoluha, A. und K. M. Koch (Widerstandsänderung) 450.
- s. H. Fieber 451.
- Néel, L. (Perméabilité en haute fréquence) 454.
- Nejšuler, L. Ja. (Gleichung mit vier Veränderlichen) 346.
- Netter, F. s. B. Jacrot 228.
- Neumann, B. H. (Algebraically closed groups) 248.
- H. (Fläche F^2 durch neun Punkte) 382.
- Neumark, S. (Pressure distribution) 187.
- Neumer, W. (Polynomdarstellung der Ordnungszahlen) 280.
- Nevanlinna, R. (Metrische lineare Räume. I. II.) 122.
- Neville, E. H. (Restricted cubics) 14.
- Nevzgljadov, V. G. (Dynamik einer zähen Flüssigkeit) 188.
- Newman, J. and W. Rudin (Orthogonal series) 294.
- Newns, H. C. s. A. B. Bhatia 224.

- Newton, R. G. (Theory of blast shock) 197.
 — T. D. (Collision matrix) 222.
- Niblett, J. D. (Theorem of Nesbitt) 10; (Hypergeometric identities) 74.
- Niče, V. (Surfaces strophoidales) 384.
- Nickel, E. („Metaphysische Wirklichkeit“) 3.
 — K. (Integralgleichung für ein Flügelgitter) 186.
- Niggli, P. (Grenzphänomene) 235.
- Nijboer, B. R. A. and L. van Hove (Radial distribution function of a gas) 232.
- Nikodým, O. M. (Clôture faible des ensembles convexes) 333; (Espaces linéaires réels abstraits) 333.
- Nikolaev, V. F. (Interpolationsprozesse) 70.
- Nikol'skij, S. M. (Fortsetzung von Funktionen) 61; (Quadraturformeln) 71; (Ungleichungen für ganze Funktionen) 83; (Dirichlet'sches Problem) 105.
- Nilsson, S. G. (Motion of electrons) 207.
- Nishiyama, T. (Velocity operator) 438.
- Nisida, T. s. T. Sirao 354.
- Noguchi, H. (Absolute neighborhood retracts) 402.
- Noll, W. s. E. Mohr 60.
- Nollet, L. (Serie di Severi) 147; (Anneaux premiers) 254.
- Norden, A. P. (Nichteuklidische Geometrie) 140.
- Norton, D. A. (Hamiltonian loops) 18.
 — K. A., E. L. Shultz and H. Yarbrough (Probability distribution of phase) 357.
- Novozilov, Ju. V. (Selbstenergie des Elektrons) 441.
 — V. V. (Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen) 343; (Spannungsinvarianten) 414.
- Nunke, R. J. and L. J. Savage (Set of values of a finite measure) 282.
- 'Brien, G. G. s. W. Leutert 138.
- O'Donnell, R. E. (Zeros of polynomials) 14.
- O'Keeffe, J. (Supersonic potentials) 194.
- O-Numa, S. s. M. Taketani 227.
- Oblath, R. (Produkte aufeinander folgender Zahlen) 266.
- Ochsenfeld, R. (Antiferromagnetismus) 454.
- Odqvist, F. K. G. (Frequency determinants) 342.
- Oehme, R. (Neutrale Mesonen) 219.
 — — s. G. Lüders 217.
- Offord, A. C. (Integral functions) 303.
- Ohkuma, F. (Lexicographic product of ordered sets) 278.
- Ohmann, D. (Minkowskische Ungleichung) 159; (Konvexe Bereiche) 159; (Überdeckung durch konvexe Körper) 160.
- Ohtsuka, M. (Covering surface) 308; (Analytic function) 308.
- Okubo, H. (Torsion problem) 176; (Stress distribution in a shaft) 177.
- Olejnik, O. A. (Elliptische Gleichungen 2-ter Ordnung) 103; (Gleichungen vom elliptischen Typus) 104.
- Olevskij, M. N. (Approximation einer stetigen Funktion) 68.
- Oliveira, J. Tiago de s. Tiago de Oliveira, J. 364.
- Olsen, H. (Hankel transform) 114; (Synchrotron radiation) 222.
 — — and H. Wergeland (Electrons in the synchrotron) 438.
- Opatowski, I. (Laplace transform) 114.
- Orloff, C. (Interprétation des séries) 290.
- Osborn, Richard K. (Spin- $1/2$ particles) 213.
 — Roger (Space-time problem) 4.
- Osborne, E. E. (Matrices) 242.
- Osima, M. (Symmetric algebras) 35; (Irreducible representations) 251.
- Ossicini, A. (Funzioni ultrasferiche di seconda specie) 75.
- Osterle, F. s. A. Charnes 189.
- Ostogradskij, M. V. (Zum 150. Geburtstage) 3.
- Ostrowski, A. M. (Determinants with dominant principal diagonal) 12; (Root of a matrix) 13.
- Oswald, T. W. (Nonlinear aerodynamic characteristics) 427.
- Overholtzer, G. (Sum functions) 259.
- Oxtoby, J. C. (Ergodic sets) 115.
- Pachale, H. (Biharmonisches Randwertproblem) 325.
- Pack, D. C. s. A. G. Mackie 195.
- Packham, B. A. (Symmetrical gravity waves. II.) 427.
- Padfield, D. G. (Tensor forces in the deuteron ground state) 224.
- Pai, S. I. (Supersonic flow) 194; (Compressible fluid) 425.
- Pailloux, H. (Élasticité) 178.
- Pais, A. (V-particles) 219.
- Palamà, G. (k^{me} potenze) 40; („Neocribum“ di Poletti) 43; (Analisi diofantea) 265; (Numeri nella forma $1848x^2 + y^2$) 271.
- Palero, Baltasar R. Salinas s. Salinas Palero, Baltasar R. 300.
- Pallu de la Barrière, R. (*-algèbres faiblement fermées) 119.
- Panferov, V. M. (Elastoplastische Deformationen) 413; (Elastoplastische Verbiegung) 413.
- Panov, D. Ju. (Quasilineare partielle Differentialgleichungen) 137.
- Papon, A. (Construction de profils) 418.
- Pargamanik, L. E. s. G. Ja. Ljubarskij 437.
- Park, D. (Scattering theory) 212.
- Parodi, M. (Théorème de M. Ostrowski) 13; (Valeurs caractéristiques) 14; (Équations de propagation de l'électricité) 204; (Polynômes récurrents) 245.
- Parr, Robert G. s. G. R. Taylor 230.
- Parzen, Ph. (Thermal-velocity) 201; (Space-charge-wave propagation) 437.
- Pastidès, N. (Équation fonctionnelle de Schroeder-Koenigs) 340.
- Pastori, M. (Ultima teoria di Einstein) 401.
- Patterson, E. M. (Riemann extensions) 154.
 — H. D. (Balanced designs) 361.

- Patterson, L. D. (Pendulums) 2.
 Pauc, Chr. (Mesure et prétopologie) 55; (Mesure à une prétopologie) 55.
 — s. O. Haupt.
 Paulson, E. (Comparison of experimental categories) 360.
 Payne, W. T. (Elementary spinor theory) 437.
 Pearson, E. S. s. B. A. Maguire 366.
 Peck, J. E. L. (Almost periodic functions) 311.
 Peierls, R. E., K. S. Singwi and D. Wroe (Polyneutron theory) 445.
 Peltier, J. (Équation algébrique) 129.
 Pelzer, H. s. B. Gross 126.
 Penney, W. G. s. J. C. Martin 198.
 Pennington, W. B. (Tauberman theorem) 65.
 Pentkovskij, N. V. (Nogramme) 131.
 Peremans, W., H. J. A. Duparc and C. G. Lekkerkerker (Positive matrices) 11.
 Pereira, R. Crespo s. Crespo Pereira, R. 3.
 Pérez-Cacho, L. (Funktion $E(x)$) 269.
 Perfect, H. (Stochastic matrices) 350.
 Perlis, S. (Matrices) 241.
 Perron, O. (Harald Bohr) 2; (Carathéodory) 3.
 Persen, L. N. (Wronskische Determinante) 315.
 Persson, R. (Focusing properties) 207.
 Pestel, E. (Wirk- und Blindleistung) 173.
 Peters, A. S. (Mixed boundary value problem) 199.
 Petiau, G. (Diffusion électromagnétique) 216; (Calcul des sections efficaces de diffusion des corpuscules) 216; (Systèmes d'équations d'ondes irréductibles) 216.
 Petresco, J. (Théorie relative des chaînes. I.) 254.
 Pettis, B. J. (Everywhere dense subgroups) 25.
 Peyerimhoff, A. (Euler-Knoppisches Limitierungsverfahren) 64.
 Pfirsch, D. (Kernquadrupolmomente) 223.
 Phipps, C. G. (Maxima and minima) 62.
 Pickert, G. (Inseparable Erweiterungen) 37; (Vollständiges Viereck) 144.
 Picone, M. e T. Viola (Teoria dell'integrazione) 281.
 Pierce, S. H. s. R. P. Hoelscher 346.
 Pilatovskij, V. P. (Funktion, durch Laplace-transformierte gegeben) 114; (Restglied der asymptotischen Entwicklung) 329; (Elastischer Zustand) 410.
 Pillai, K. C. S. (Distribution of „studentized“ range) 358.
 Pilowski, K. (Sternbewegungen) 238.
 Pinel, J. (Calcul de l'efficacité d'une méthode de classification) 359.
 Pines, D. (Stopping power of a metal) 226.
 Pipes, C. J. (Theorem on continuous functions) 59.
 — L. A. (Nonlinear differential equations) 92.
 Piranian, G. (Accessible Jordan curves) 307.
 Pirverdjan, A. M. (Turbulenz) 198.
 Placzek, G. (Scattering of neutrons) 227.
 Plass, G. N. (Neutron diffusion length) 227.
 — H. J. s. J. N. Goodier 176.
 Plesset, M. s. G. Birkhoff 185.
 — S. and S. A. Zwick (Heat diffusion problem) 201.
 Pogorelov, A. V. (Randwertproblem für $rt-s^2=\varphi(x,y)$) 394.
 Pogorzelski, W. (Problème de Fourier) 112.
 Pohlhausen, K. s. K. Millsaps 188.
 Poincelot, P. (Vitesse de groupe) 170; (Antenne cylindrique) 203; (Onde de surface de Sommerfeld) 205.
 Poivilliers, G. (Formation de l'image plastique) 169; (Déformations des faisceaux perspectifs) 169, 170; (Cheminement photogrammétrique aérien) 170.
 Poli, L. (Calcul symbolique) 329.
 Pollak, Henry s. Ph. Davis 80.
 Polubarinova-Kočina, P. Ja. (S. V. Kowalewskas Briefwechsel) 3.
 Pólya, G. (Remarks on the foregoing paper) 324.
 Pomerančuk, I. Ja. s. A. D. Galanin 445.
 Pompilj, G. (Logica) 366.
 Pöschl, Th. (Hauptschwingungen) 173; (Technische Mechanik. II.) 182.
 Postnikov, A. G. s. M. M. Kurobov 278.
 Potts, R. B. (Electron-photon cascade theory) 228; (Spontaneous magnetization) 453.
 Powell, E. O. (Zeta function) 130.
 Pradillo, J. García s. García Pradillo, J. 289.
 Prentis, J. M. (Compression of a cube) 411.
 Price, A. T. s. J. C. Martin 198.
 — P. J. (Radial distribution function) 232.
 Pride, R. A. (Plastic buckling) 179.
 Prim 3rd, R. C. (Rotational flow of ideal gases) 424.
 Prima, C. R. de s. V. J. Berry 136.
 Primakoff, H. s. T. Ahrens 440.
 Probst, R. and J. V. Charzyk (Axially symmetric flow) 184.
 Prochorov, Ju. V. (Lokales Theorem für Dichten) 353.
 Prosciutto, A. (Tipi di schiere di pale) 18.
 Proudman, I. (Generation of noise) 423.
 Pticeyn, O. B. s. M. V. Vol'kenštejn 449.
 Pu, P. M. (Nonorientable Riemannian manifolds) 399.
 Pucci, C. (Formule di maggiorazione) 316.
 Puppe, S. D. (Verschlingungsinvarianten) 168.
 Puppini, R. (Criterio di equivalenza) 429.
 Quan, Pham Mau (Équation d'ondes) 101.
 Quick, A. W. und K. Schröder (Laminare Grenzschicht) 420.
 Quinet, J. (Mathématique supérieures. III.) 281.
 Rabotnov, Ju. N. (Zyklische Belastung) 180.
 Rachmatulin, Ch. A. (Quergerichteter Schlag auf einen biegsamen Faden) 181.
 Radó, T. (Teoria delle omologie singolari) 405.

- Rådström, H. (Spaces of convex sets) 333.
- Raimes, S. (Divalent metals) 237.
- Rajagopal, C. T. (Tauberian theorems) 65, 291.
- Raljević, Š. (Zéros d'un polynome) 246.
- Ram, G. Sri and G. V. R. Rao (Buckling) 179.
- Ramsey, N. F. (Proton-proton tensor force) 226.
- Rao, G. V. R. s. G. S. Ram 179.
- — — s. C.-t. Wang 175.
- K. Suryanarayana (Spin splitting) 228; (High multiplicity states) 446.
- Rapoport, I. M. (Angenäherte Integration) 344.
- Read Jr., W. T. s. W. Shockley 451.
- Redheffer, R. M. (Moments which are integers) 115.
- — — s. R. Steinberg 50.
- Rees, D. s. J. A. Green 19.
- Regan, Francis s. W. C. Kalinowski 441.
- Régnier, A., E. Schatzman et J.-P. Vigier (Mouvements des particules en mécanique quantique) 211.
- Reichelderfer, P. V. (Barycentric homomorphism) 405.
- Reifenberg, E. R. (Parametric surfaces. II.) 283.
- Reiner, M. s. I. Braun 188.
- Reissner, E. (Elastische Schwingungen) 180.
- — s. R. A. Clark 175.
- Rezanov, A. I. (Ferromagnetische Metalle) 454.
- Ribeiro de Albuquerque, J. (Ensembles projectifs) 280.
- Ricci, G. (Funzioni aritmetiche) 39, 270.
- Ricé, D. (Heat conduction) 201.
- Richard, U. (Equazioni differenziali lineari) 316.
- Richards, P.-I. (Étude statistique) 369.
- Richert, H.-E. (Anzahl Abelischer Gruppen. I.) 250.
- Richter, H. (Endliche Verformungen) 412.
- W. (Graphische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen) 133.
- Rickart, C. E. s. N. Jacobson 256.
- Riesz, F. et B. Sz.-Nagy (Analyse fonctionnelle) 331.
- Riordan, J. (Three-line latin rectangles) 8; (Ménage numbers) 8.
- Ripelle, M. Fabre de la s. Fabre de la Ripelle, M. 212.
- Rivlin, R. S. s. A. E. Green 412.
- Roberts, R. C. s. J. D. Diaz 138.
- Robertson, H. H. s. L. R. B. Elton 215.
- Robinson, G. de B. (Conjecture by Chung) 250; (Symmetric group. II.) 250; (III.) 251.
- Robl, H. (Compton-Streuung) 215.
- Röchlin, V. A. (Vierdimensionale Mannigfaltigkeiten) 407.
- Rodeja F., E. G.- (Determinants of sines and cosines) 243.
- Rodriguez, M. P. s. L. Bru 231.
- Roesler, F. C. (Ramaneffekt) 228.
- Rogers, C. A. (Indefinite quadratic forms) 45; (Reduction of star sets) 276.
- — — s. R. P. Bambah 380.
- Rohrbach, H. und B. Volkmann (Mengenfolgen) 53.
- Röhrli, H. (Funktionensklassen) 83; (Differentialsysteme. II.) 83; (Funktionensklassen auf Riemannschen Flächen) 309.
- Rohrlich, F. and R. L. Gluckstern (Scattering of light) 438.
- — s. H. A. Bethe 438.
- — s. P. Greiffinger 438.
- Room, T. G. (Clifford matrices) 242.
- Rosati, L. A. (Costruzione di polinomi irriducibili) 14; (Sistema diofanteo) 40.
- Rose, M. E. and T. A. Welton (Dirac particle) 212.
- Roseau, M. (Réflexion des ondes) 200.
- Rosen, N. (Special theories of relativity) 207.
- — and H. B. Rosenstock (Force between particles) 220.
- Rosenberg, R. M. and G. Stoner (Flight dynamics) 184.
- Rosenblatt, M. (Oscillation of sums of random variables) 352.
- Rosenstock, H. B. s. N. Rosen 220.
- Rostoker, N. (Hall effect) 237.
- Rostovcev, N. A. (Lösung durch Iteration) 341.
- Roth, K. (Ensembles d'entiers) 43.
- K. F. s. R. P. Bambah 277.
- Roth, L. (Threefolds) 147; (Alcune V_3 irrazionali a generi nulli) 386.
- Rothberger, F. (Denumerable base) 53; (Problem of Hausdorff) 280.
- Rothe, E. H. (Critical points) 110.
- Rothstein, J. (Thermodynamics) 200.
- Rott, N. and L. F. Crabtree (Laminar boundary-layer calculations) 188.
- Rotta, J. (Turbulente Grenzschichten) 421; (Energiedissipation) 421.
- Roumieu, Ch. (Jet critique plan) 193.
- Roussel, A. (Développements de Taylor) 79.
- Routledge, N. A. (Hilbert space) 123.
- Roy, M. (Structure des quasiparticles) 197.
- S. K. s. K. S. Krishnan 448, 456.
- Royden, H. L. (Regularity of boundary points) 105.
- — — s. P. R. Garabedian 185.
- Rozenfel'd, B. A. (Kollinationen) 144.
- Rozenknop, I. Z. (Homologiegruppen homogener Räume) 408.
- Rubin, H. s. M. A. Girshick 354.
- Rubinow, S. I. (Triton binding energy) 224.
- Ruderman, H. D. (Inequalities) 51.
- M. s. D. L. Judd 439.
- Rudik, A. s. B. Ioffe 219.
- Rudin, W. (L^2 -approximation) 66; (Differential operators) 315.
- — s. J. Newman 294.
- Rufener, E. (Frequenzfunktionen) 350.
- Rumer, Ju. B. (Unterbenetzter Strahl) 185.
- Runyan, H. L., H. J. Cunningham and C. E. Watkins (Single degree of freedom flutter) 187.
- Russo, S. (Convergenza delle serie di polinomi di Legendre) 295.
- Rutherford, D. E. (Continuant determinants. II.) 10.
- Rutishauser, H. (Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen) 133.

- Rvačeva, E. L. s. B. V. Gnedenko 350.
- Rymarenko, B. A. (Zyklisch monotones Polynom) 69.
- Sachs, W. (Absterbeordnung als Mischungsergebnis) 371.
- Sadowsky, M. A. s. E. Sternberg 173.
- Sagoroff, S. (Kumulative Verteilungskurve) 373.
- Saibel, E. s. A. Charnes 189.
- Saitô, Y., Y. Watanabé and Y. Yamaguchi (Meson production) 226.
- Salam, Abdus (Scalar electrodynamics) 214; (Renormalized S-matrix) 214.
- — s. P. T. Matthews 218.
- Salechov, G. S. (Quadratische Operatorgleichungen) 124; (Berührende Hyperbeln) 130.
- Salecker, H. (Masse-Ladungs-Renormalisierung) 214.
- Salinas, B. R. (Asymptotisches Verhalten der Iteration) 68.
- Palero, B. R. (Bestimmung einer analytischen Funktion) 300.
- Salvadori, M. G. s. F. di Maggio 177.
- Salzer, H. E. (Powers of quaternions) 16.
- San Juan, R. (Asymptotische Entwicklungen) 303; (Problème de Watson) 315; (Laplacetransformationen) 328.
- Sandham, H. F. (Series of partitions) 42; (Two identities) 272.
- Sándor, G. (Lösungen einer Kongruenz) 266.
- Sanov, I. N. (Periodische Gruppen) 32; (Satz von Minkowski) 46.
- Sansone, G. s. G. Vitali 65.
- Santaló, L. A. (Hermitian spaces) 161.
- Šapiro, G. S. (Elastoplastisches Gleichgewicht) 179.
- Piateckij, I. I. (Gleichverteilung der Bruchteile) 49.
- Sario, L. (Arbitrary Riemann surfaces) 308.
- Šatašvili, S. Ch. (Stationäre elastische Schwingungen) 179.
- Sauer, R. (Anfangswertprobleme) 319; (Unterschallströmungen) 425.
- Savage, L. J. s. R. J. Nunke 282.
- Saxon, D. S. s. A. Bănos jr. 204.
- Saxon D. S. s. R. E. Le Levier 444.
- Scarfi, H. (Group invariant integration and fundamental theorem of algebra) 244.
- Ščerbakov, R. N. (Invariante Klassen von Linien auf einer Fläche) 395.
- Schäfer, M. (Klassische Theorie dünner schwach gebogener Platten) 175.
- Schafer, R. D. (Alternative algebras) 35.
- Schatzman, Evry s. A. Régnier 211.
- Scheffé, H. s. H. Chernoff 367.
- Scheidegger, A. E. und C. D. McKay (Vakuumschwingungen der Wellenfelder) 213; (Thermodynamics) 213.
- Scherrer, W. (Flächentheorie) 150; (Wirkungsprinzipien) 222.
- Schiff, L. I. (Angular distribution of nuclear recoils) 442.
- Schindel, L. H. s. H. L. Alden 426.
- Schlichting, H. und E. Trukkenbrodt (Strömung an rotierender Scheibe) 420.
- Schlüter, A. (Ultrastrahlung) 228.
- Schmitz, G. (Bogenentladung) 446.
- Schöbe, W. (Lubbocksche Formel) 131.
- Schoch, A. (Impuls einer Schallwelle) 196.
- Scholz, N. (Airfoils) 186.
- Schönhardt, E. (Positiv definite Matrizen) 11.
- Schopper, H. (Dünne doppelbrechende Schichten) 434.
- Schreiber, W. s. H. Bühler 412.
- Schröder, K. s. A. W. Quick 420.
- M. s. W. Brenig 234.
- Schrödinger, E. (Dirac's new electrodynamics) 217.
- Schuff, H. K. (Wurzeln von Gruppenpolynomen) 248.
- Schuler, M. und H. Gebelein (Tabellenwerk) 349.
- Schumann, W. O. (Dämpfung der elektromagnetischen Eigenschwingungen) 240.
- Schütte, K. (Verzweigte Analysis) 6.
- Scott, W. R. (Groups and cardinal numbers) 19; (Means in groups) 247.
- W. T. (Mean-value calculations) 449.
- Seal, H. L. (Discrete Pareto law) 372.
- Sears, W. R. s. M. C. Adams 418.
- Seban, R. A. s. S. Levy 189.
- Segal, B. I. (Probleme der Potentialtheorie) 107.
- Segre, B. (Applicazioni del calcolo esterno) 98; (Curve giacenti su di una quadrica) 146; (L'anneau d'équivalence) 387; (Variétés covariantes) 338; (Scioglimento delle singolarità) 389.
- Seitz, F. (Moving dislocations) 234.
- Selberg, H. L. (Compression waves) 197.
- Sells, R. E. s. D. L. Falkoff 228.
- Semple, J. G. and G. T. Kneebone (Algebraic projective geometry) 381.
- Sen Gupta, A. M. (Bending) 176.
- Sengenhorst, P. (Konvexe Funktionen) 61.
- Senior, T. B. A. (Diffraction) 206.
- Serre, J.-P. (Cinquième problème de Hilbert) 253; (Suspension de Freudenthal) 407.
- Sesekin, N. F. (Lokal nilpotente Gruppen ohne Torsion) 248.
- Šestopalov, V. P. (Wärmegrenzschicht im Diffusor) 421.
- Ševčenko, K. N. (Elastoplastische Deformation) 179.
- Sextl, Th. (Laguerresche Differentialgleichung) 75.
- Shah, G. T. (φ -function) 306.
- Sherman, S. (Transcendental equation) 305.
- Shield, R. T. s. A. E. Green 412.
- Shiffman, M. (Existence of subsonic flows of a compressible fluid) 192.
- Shockley, W. and W. T. Read jr. (Statistics of recombinations) 451.
- Shubik, M. (Business cycle model) 378.
- Shultz, E. L. s. K. A. Norton 357.
- Sibirani, F. (Equazioni alle derivate parziali) 320.
- Siegel, C. L. (Indefinite quadratische Formen. II.) 274.
- K. M. (Threedimensional conformal transformations) 185.
- Sierpiński, W. (Ensemble à 3 éléments) 9.

- Sil, N. C. (Meson field) 439.
 Šilov, G. E. (Lineare Räume) 241.
 Silva, J. A. (Arithmetie functionen) 246.
 — G. (Funzioni sferiche) 347.
 Silverman, E. (Area) 284.
 — R. A. (Fermi energy) 450.
 Simmons, N. s. G. Birkhoff 185.
 Simon, H. Ap s. Ap Simon, H. 278.
 — H. A. (Servomechanism theory) 378.
 Simons, W. H. (Modular function $\lambda(\tau)$) 89.
 Singer, I. M. s. R. V. Kadison 252.
 Singwi, K. S. s. R. E. Peierls 445.
 Sirao, T. and T. Nisida (Brownian motion) 354.
 Siraždinov, S. Ch. (Grenzwertsätze für Markoffsche Ketten) 354.
 Siska, C. P. s. G. B. W. Young 195.
 Sitgreaves, R. (Distribution of random matrices) 360.
 Sitnikov, K. (Stetige Deformationen) 164; (Nichtabgeschlossene Punktmengen) 165.
 Sivadjian, J. (Vitesse de la lumière) 207.
 Sivuchin, D. V. (Monomolekulare Übergangsschicht) 234.
 Skolem, Th. (Semi-groups) 246; (Divisibility in semi-groups) 247; (Algebraic numbers) 259; (Diophantine equation) 265; (Triadische Analysis) 265; (Dirichlet's series) 302.
 Skopec, Z. A. (Zyklographie des Lobačevskischen Raumes) 140; (Desargue-Konfiguration) 144.
 Skornjakov, L. A. (Konfiguration D_0) 382.
 Slansky, S. (Rayon de l'électron) 221.
 Slap, J. K. s. W. J. Gaugh 418.
 Slater, L. J. (Bilateral series) 72; (Identities of the Rogers-Ramanujan type) 272.
 Slezkin, N. A. (Stoß eines ebenen Gasstrahls) 197; (Verdunstung) 240.
 Smiley, M. F. (Left division systems) 19.
 Smirnov, D. M. (Auflösbare Gruppen) 249.
 — Ju. M. (Ring der beschränkten stetigen Funktionen) 117; (Nachbarschaftsräume) 163, 164.
 — V. I. und A. F. Bermant (Goluzin) 3.
 Smith, A. M. (Beta-radioactivity) 440.
 — K.-T. (Théorème spectral) 337.
 — R. C. T. (Interpolatory function) 303.
 — T. (Ray tracing) 435.
 Smollett, M. (Frequency spectrum) 234.
 Snapper, E. (Completely primary rings. IV.) 255.
 Sneddon, I. N. (Stress produced by a pulse of pressure) 416.
 Snyder, H. S. (Gauge invariance problem) 438.
 Sobolev, S. L. (Neues Problem der mathematischen Physik) 101; (Cauchysches Problem für einen speziellen Fall) 108.
 Söhngen, H. (Potentialstörung) 187.
 Sokolovskij, V. V. (Spannungszustand einer plastischen Masse) 179.
 Solodovnikov, V. V. (Regulierungssysteme) 356.
 Solov, R. (Linear models) 377.
 Sondheimer, E. H. (Theory of conduction) 237; (Electrons in metals) 237; (Diamagnetism) 452.
 Soudan, R. (Indéformabilité d'un corps) 326.
 Speiser, Andreas (Elemente der Philosophie) 4.
 — A. P. (Analogierechenge-räte) 348.
 Spence, R. D. s. E. Hiedemann 414.
 Spencer, D. C. (Kähler manifolds) 155.
 — — — s. P. R. Garabedian 185.
 — jr., S. M. (Transcendental numbers) 50.
 Springer, T. A. (Formes quadratiques) 243.
 Squire, H. B. (Viscous fluid flow problems. I.) 419.
 Squires, G. L. (Scattering of neutrons by crystals) 235.
 Srinivasan, M. S. (Semiregular continued fractions) 289.
 Stakgold, I. s. E. T. Kornhauser 323.
 Stange, K. (Fehlerhafte lineare Punktreihe) 368.
 Starke, L. G. K. (Experimental formula) 371.
 Statz, H. s. E. Fues 449.
 Stebakov, S. A. (System $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$) 94.
 Stech, B. (Lebensdauer isomerer Kerne) 442.
 Stečkin, S. B. (Annäherungen periodischer Funktionen) 70; (Beste Annäherungen) 71; (Approximation stetiger Funktionen) 71.
 Steenberg, N. R. (γ -radiation) 441.
 Steinberg, R. and R. M. Redheffer (Lindemann theorem) 50.
 Steinwedel, H. („Runaway-solutions“) 221; (Massenstabilität des Elektrons) 221.
 — — s. H. Lehmann 221.
 Sternberg, E. and M. A. Sadowsky (Theory of elasticity) 173.
 Sternheimer, R. (Atomic core on the magnetic hyperfine structure) 228.
 Stevens, G. W. H. (Stability of a compressed elastic ring) 412.
 — K. W. H. (Rare earth ions) 452.
 Steward, G. C. (Plane kinematics) 149.
 Stewartson, K. (Slow motion of a sphere) 184.
 Stiefel, E. (Relaxationsrechnung) 341.
 Stippes, M. and A. H. Haus-rath (Large deflections) 176.
 Stocker, P. M. (Addition of heat to a gas flow) 198.
 Stokes, A. R. (Three-dimensional diffraction theory) 433.
 Stoner, G. s. R. M. Rosenberg 184.
 Stora, C. (Raies de Debye-Scherrer) 449.
 — R. s. L. Michel 219.
 Storch, E. (Piccole oscillazioni) 199.
 Storer, J. E. (Radiation pattern) 203.
 Straus, E. G. and F. A. Valentine (Finite dimensional convex sets) 159.
 Strscheletzky, M. (Schaufelform) 419.
 Strubecker, K. (Differential-geometrie) 153.
 Stümke, H. (Wärmezufuhr innerhalb einer isothermen Atmosphäre) 240.

- Stumpff, K. (Zweikörperbewegung) 170.
- Sturrock, P. A. (Electron beams in electromagnetic fields) 207.
- Štykan, A. B. (Integriermechanismus von Leibniz) 132; (Graphische Lösung von Differentialgleichungen mit abweichendem Argument) 346.
- Suhl, H. and L. R. Walker (Faraday rotation) 431.
- Šul'gin, M. F. (Lagrangesche Gleichungen) 171; (Poissonsches Theorem) 171.
- Sunakawa, S. s. R. Utiyama 438.
- Sunouchi, H. (Rings of operators) 119.
- Suprunenko, D. (Gruppen von Matrizen) 24.
- Surinov, Ju. A. (Wärmeaustausch durch Strahlung) 200.
- Suryanarayana Rao, K. s. Rao, K. Suryanarayana 228, 446.
- Süßmann, G. (Unitäre Quantenelektrodynamik) 221.
- Sveklo, V. A. (Beugungsproblem) 417.
- Sverdllov, L. M. (Schwingungen isotroper Moleküle) 446.
- Swenson jr., G. W. (Nonuniform column beams) 177.
- Swinerton-Dyer, H. P. F. (Conjecture of Hardy and Littlewood) 78; ($A^5 + B^5 + C^5 = D^5 + E^5 + F^5$) 266.
- — — s. E. S. Barnes 276.
- Sydler, J.-P. (Espaces osculateurs) 384.
- Synge, J. L. (Triangulation) 136; (Instability produced by rotation) 172; (La fréquence, la longueur d'onde, la vitesse de phase et la vitesse de groupe) 207.
- Sysoev, A. E. (Integrierbarkeit von Differentialgleichungen erster Ordnung) 314.
- Sz.-Nagy, Béla s. F. Riesz 331.
- G. (Kritische Punkte rationaler Funktionen) 306.
- Szablewski, W. (Turbulente Strömung) 189; (Turbulente Vermischung) 189.
- Szabó, I. (Belastete dicke Kreisplatte) 411.
- Szasz, O. (Hermite orthogonal functions) 76; (Products of summability methods) 290.
- Szele, T. s. A. Kertész 20.
- Szigeti, B. (Torsional vibrations) 230.
- Taam, Choy-Tak (Oscillation theorems) 94.
- Tagamlickij, Ja. A. (Verallgemeinerung eines Satzes von Minkowski) 333.
- Takagi, Yutaka (Ferroelectricity) 452.
- Takahashi, Hiroshi s. M. Namiki 431.
- Y. and H. Umezawa (Self-stress) 440.
- — s. H. Umezawa 217.
- Takeda, Ziro s. Y. Misonou 402.
- Taketani, M., S. Machida and S. O-Numa (Meson theory. I.) 227.
- Talmadge, R. B. (Complete systems of functions) 59.
- Talmi, Igal (Nuclear spectroscopy) 223.
- Tanaka, H. s. D. Ito 215.
- Tannenwald, L. M. (Nuclear phenomena) 227.
- Tatibana, Masao s. A. Isihara 179.
- Taton, R. (Monge) 2.
- Tatsumi, T. (Laminar parabolic flow) 420.
- Taussky-Todd, O. (Arnold Scholz) 3.
- Taylor, A. E. (L'Hospital's rule) 62.
- G. (Waving cylindrical tails) 189.
- — Russell and R. G. Parr (Helium atom) 230.
- R. and C. A. Coulson (Graphite. III.) 450.
- — s. C. A. Coulson 450.
- S. J. (Cartesian product sets) 282.
- — — s. A. S. Besicovitch 158.
- Tchen-yang, V. Ou (Fonctions hypergéométriques) 88.
- Teissier, M. (Demi-groupes) 17.
- du Cros, F. (Prisme fragile) 177; (Prisme élastique) 177.
- Temesváry, St. (Rotationszustand der Sonne) 239.
- Temperley, H. N. V. (Liquid helium) 232.
- Temple, G. (Rayleigh's method) 129; (Convergence généralisée) 340.
- Terpstra, T. J. (Kendall's test) 363.
- Terrana, E. (Errori nelle misure angolari) 139.
- Tharrats Vidal, J. M. (Schéma de l'électron) 221.
- Thawani, V. D. s. G. S. Mahajani 245.
- Thébault, V. (Récréations) 39; (Géométrie du triangle) 141; (Triangles and tetrahedrons) 141; (Tranchet d'Archimède) 142; (Questions d'arithmétique) 264.
- Theimer, O., G. D. Wassermann and E. Wolf (Scalar diffraction) 432.
- Thellung, A. (Höhere meson-theoretische Näherungen) 443.
- — s. R. Kronig 448.
- Thierrin, G. (Demi-groupes) 16, 17; (Homogroupes) 17; (Homodomaines et homocorps) 17.
- Thiessen, G. (Polarisations-effekt im Sternspektrum. I.) 239.
- Thirring, W. E. s. G. Lüders 217.
- Thiruvengkatachar, W. R. s. G. S. Mahajani 245.
- Thomas, T. Y. (Von Mises plasticity equations) 413.
- William E. s. F. di Maggio 177.
- Thomissen, F. und G. Tromp (Sätze von Pascal und Sturm) 145.
- Thornhill, C. K. s. J. C. Martin 198.
- Thurston, H. A. (Continued products) 17; (Equivalences and mappings) 18; (Structure of an operation) 52; (Congruences on quasigroups) 247.
- Tiago de Oliveira, J. (Test for randomness) 364.
- Tibiletti, C. (Piani tripli e quadrupli) 385.
- Tichonov, A. N. (Systeme von Differentialgleichungen) 95.
- Tietz, H. (Bestimmte Integrale) 132; (Faber'sche Entwicklungen) 309.
- Tietze, H. (Polynomé mit lauter positiven Nullstellen) 245.
- Timan, A. F. (Lineare Methoden der Approximation) 70; (Approximation periodischer Funktionen) 295.
- Timms, S. R. (Functions defined in a halfplane) 106; (Paper by Nassif) 305.

- Ting, Lu (Shock strength) 197.
- Tintner, G. (Econometrics) 375; (Abraham Wald) 376.
- Tocher, K. D. (Set of regression lines) 368.
- Todd, J. A. (Elementary Abelian group of order 8) 23; (Conjecture of D. E. Littlewood) 24.
- Tolba, S. E. (T - and γ -matrices) 291.
- Tolhoek, H. A. and J. A. M. Cox (Angular distribution of gamma radiation) 224.
- — — s. J. A. M. Cox 224.
- Tolstov, G. P. (Enveloppe einer Kurvenschar) 150.
- Tomović, R. s. D. Mitrović 128, 348.
- Tong, Hing (Perfectly normal spaces) 162.
- Tonjan, V. A. (Stetige Funktionen auf Mengen) 81.
- Toose, D. G. (Laminar motion) 193.
- Tornheim, L. (Sylvester-Franke theorem) 10.
- Toscano, L. (Géométrie du triangle) 142.
- Tosi, A. (Curve del 4° ordine) 383.
- Traupel, W. (Dynamik realer Gase) 231.
- Trefftz, E. (Rotierende Gasmasse) 239.
- — und L. Biermann (Wellenfunktionen des Calciums Ca II) 445.
- Tricomi, F. (Derivate delle funzioni ipergeometriche) 72; (Equazione di Laguerre) 75.
- Tromp, G. s. F. Thomissen 145.
- Trösch, A. (Stabilitätsprobleme) 414.
- Truckenbrodt, E. (Laminar and turbulent boundary-layer) 420; (Quadraturverfahren zur Berechnung der Reibungsschicht) 420.
- — s. H. Schlichting 420.
- Truesdell, C. (Mechanical foundations of elasticity) 173; (Vorticity and thermodynamic state in a gas flow) 190.
- C. A. (Program of physical research) 170.
- Tumarkin, G. C. (Annäherung im Mittel von komplexwertigen Funktionen) 294.
- S. A. (Belastete Schalen) 411.
- Turri, T. (Trasformazioni birazionali) 146; (Numero dei circuiti delle curve di punti uniti) 146; (Trasformazioni antibirazionali involutorie) 146; (Sistemi invarianti di curve) 384; (Rete di cubiche) 385.
- Turrin, G. (Infinitely near points) 147.
- Twersky, V. (Scattering of radiation) 416.
- Tyabji, S. F. B. (Energy momentum tensor) 217.
- Tyrode, F. s. B. Jacrot 228.
- Ubbelohde, A. R. (Thermal transitions) 200.
- Ullman, J. L. (Hankel determinants) 78.
- Umezawa, H., Y. Takahashi and S. Kamefuchi (Mesonic proper-field) 217.
- — s. Y. Takahashi 440.
- Unger, H. (Lineare Gleichungssysteme) 127; (Lagrange-Hermite'sche Interpolation) 346.
- Unsöld, A. (Sonnenschromosphäre) 239.
- Urban, P. s. E. Ledinegg 205, 428.
- Utiyama, R., S. Sunakawa and T. Imamura (Green-functions) 438.
- Vaccarina, G. (Sillogistica) 5.
- Vagner, V. V. (Verallgemeinerte Gruppen) 246; (Partielle Transformationen) 279.
- Vajnberg, M. M. (Variationstheorie der Eigenwerte) 111; (Vollstetige Operatoren) 338; (Variationsprinzip in der Theorie der Operatorgleichungen) 338.
- Vakin, S. A. (Elektromagnetische Wellen längs eines spiralförmigen Spaltes) 204.
- Vaksebj, A. (Géométrie d'une fonction analytique) 77.
- Val, P. du (Surfaces) 390.
- Valatin, J. G. (Théorie de Dirac, I. II.) 217.
- Valentine, F. A. s. E. Straus 159.
- Valiron, G. (Fonctions algébroides) 85.
- Vallander, S. V. (Integration eines hyperbolischen Systems) 100; (Strömung um ein Profilvergitter) 186.
- Valverde, F. (Monogenität) 300.
- Varnavides, P. (Product of three linear forms) 275.
- Vasil'ev, A. M. (Algebraische Operationen in der Differentialgeometrie) 153.
- Vaughan, H. E. (Well-ordered subsets) 279.
- Vega, R. s. L. Bru 231.
- Velikanov, M. A. (Teilchen in turbulenter Strömung) 189.
- Venkataraman, C. S. ($\Phi(x) = k_1! k_2! \dots k_r!$) 264.
- Vermes, P. (Differential equations of infinite order) 126; (Rings of infinite matrices) 336.
- Vernotte, P. (Somme des séries asymptotiques) 290.
- Verschaffelt, J. E. (Potentiel thermique) 200; (Principe d'Onsager) 200; (Phénomènes de transport) 232.
- Verzaux, P. (Section de choc du lithium) 444.
- Vidskij, V. S. (Folgerung aus Satz von Bernstejn) 61.
- Vidal, J. M. Tharrats s. Tharrats Vidal, J. M. 221.
- Vidro, L. I. und M. V. Volkenstejn (Schwingungsspektren) 231.
- Vigier, J.-P. s. A. Régnier 211.
- Vijayaraghavan, T. s. P. Masani 310.
- Vilenkin, N. Ja. (Fastorthogonale Funktionensysteme) 299.
- Villars, F. (Exchange current effects) 224.
- Vil'ner, I. A. (Anamorphose für analytische Funktionen) 131.
- Vincensini, P. (Congruences de sphères) 395.
- Vincent, J. (Raies et bandes d'absorption) 446.
- Vinograd, R. s. N. Azbelev 242.
- — É. (Kriterium der Instabilität) 95.
- Vinokurov, V. G. (Biorthogonale Systeme) 334.
- Viola, T. (Possibilité de compléter la définition d'une fonction) 286; (Propriétés géométriques de domaines d'intégration) 286; (Domaines réguliers) 286.
- — s. M. Picone 281.
- Visconti, A. (L'équation d'évolution) 212; (Théorie des perturbations) 212.
- Višik, M. I. (Randwertaufgaben für die elliptische Differentialgleichung) 103.

- Visser, C. and A. C. Zaanen (Eigenvalues of compact linear transformations) 123.
- Viswanatham, B. (Infinite differential system) 313.
- Vitali, G. e G. Sansone (Funzioni di variabile reale. II.) 65.
- Voelz, K. (Akustische Resonatoren) 182.
- Voetter, H. (Numerische Berechnung der Eigenwerte) 128.
- Vogel, A. (Grundlagen der Analysis) 50.
- Vogt-Nilsen, N. (Electrolytic double-tank) 234.
- Vol'kenštejn, M. V. und O. B. Pticyñ (Schmelzen von Polymeren) 449.
- — — s. L. I. Vidro 231.
- Volkmann, B. s. H. Rohrbach 53.
- Volpato, M. (Derivazione sotto il segno di integrale) 59.
- Volz, H. (Quantentheorie der Wellenfelder) 213.
- Vooren, A. I. van de (Theodorsen function) 186.
- — — van Veen, J. F. van de (Primzahlen) 271.
- Voß, H. M. (Nonplanar surfaces) 187.
- Vrkljan, V. S. (Champ des mésons) 220.
- Vučković, V. (Théorèmes de moyenne) 288.
- Vulich, B. Z. (Stetige Funktionen in topologischen Räumen) 162.
- W**aadeland, H. (Determinante) 10; (Transcendental equations. I.) 83.
- Waag, E. J. van der (Plans osculateurs. I. II.) 157.
- Wagner, C. (Fredholm integral equations) 345.
- Wait, J. R. (Wire loops) 203.
- Wald, A. (Publications of) 3; (Relation between changes) 376.
- Walker, L. R. s. H. Suhl 431.
- Wallace, A. H. (Invariant matrices) 15.
- — — D. (Map excision theorem) 406.
- Waller, M. D. (Vibrations of free plates) 180.
- Walsh, J. E. (Tests of stability) 362.
- Walter, K. (Enge Doppelsystemen) 238.
- Walters, S. S. (Ascoli's theorem) 68.
- Wang, Chi-teh and G. V. R. Rao (Analogous model giving the nonlinear characteristics) 175.
- Wangness, R. K. (Magnetic resonance) 454.
- Wassermann, G. D. s. O. Theimer 432.
- Watanabe, Y. s. D. Ito 215.
- — — s. Y. Saitô 226.
- Watkins, Ch. E. s. H. L. Runyan 187.
- Watson, G. L. (Cubic polynomial) 271.
- G. N. (Periodic sigma functions) 306.
- K. M. (Charge independence for nuclear phenomena) 225.
- Watzlawek, H. (Gewöhnliche Differentialgleichungen) 90.
- Ważewski, T. (Condition pour qu'une fonction soit monotone) 288; (Propositions de caractère „épidermique“) 313.
- Weaver, M. W. (Semi-group) 19.
- Weber, M. and A. Erdélyi (Rodrigues' formula) 299.
- Weidenhammer, F. (Mathieu'sche Systeme) 95.
- Weil, André (Linear equivalence) 263.
- Weinberg, A. M. (Nuclear reactor theory) 445.
- Weinstein, A. (Problème de Cauchy) 107.
- Weisel, H. (Algebraische Gleichungen) 14.
- Weissinger, J. (Fehlerabschätzung) 133; (Verfahren von Multhopp) 186; (Iterationsverfahren) 341.
- Welter, C. P. (Operation in a special group) 8.
- Welton, T. A. s. M. E. Rose 212.
- Wentzel, G. (Pion-proton scattering) 218; (Skalare Paartheorie) 220; Pseudoscalar meson theory) 439.
- Wenzl, F. (Berechnung komplexer Nullstellen) 130.
- Wergeland, H. s. H. Olsen 438.
- Werle, J. (Relativistic corrections upon nuclear potentials) 444.
- Wermer, J. (Subspaces of normal operators) 337.
- West, V. I. (Correlation problems) 368.
- Westenberg, J. (Median test) 362.
- Weyl, H. (Symmetry) 4; (Strahlungsfelder) 107.
- Whaples, G. (Cyclic algebras) 262.
- Wheland, G. W. and Sh. L. Matlow (Diamagnetic anisotropy) 452.
- White, P. A. (Manifolds with boundaries) 406.
- Whiteman, A. L. (Cyclotomy) 268.
- Whitrow, G. J. (Limits of the physical universe) 3.
- Wick, G. C., A. S. Wightman and E. P. Wigner (Parity of elementary particles) 439.
- Wiebelitz, R. (Funktionalgleichungen der Riemannschen Zetafunktion) 79.
- Wielandt, H. (Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes) 78.
- Wightman, A. S. s. G. C. Wick 439.
- Wigner, E. P. s. G. C. Wick 439.
- Wilker, P. (Zwischenkörper) 36.
- Williams, E. J. (Interactions in factorial experiments) 361; (Tests in multivariate analysis) 363.
- R. M. (Experimental designs) 360.
- Wilson, R. (Theorem of Pólya's) 301.
- Wintner, A. (Logarithms of bounded matrices) 336; (Parallel surfaces) 393; (Isometric surfaces) 393.
- Wishart, J. (*k*-statistics in samples) 357.
- Wiskott, D. (Wellenfunktionen im Coulomb-Feld) 228; (Schrödinger-Gleichung) 438.
- Witt, B. S. de and C. M. de Witt (Quantum theory) 440.
- C. M. de s. B. S. de Witt 440.
- E. (Kombinatorischer Satz) 9.
- Wittich, H. (Lineare Differentialgleichungen) 92.
- Woeste, K. s. S. Flüggé 222.
- Woinowsky-Krieger, S. (Stabilität von Rechteckplatten) 411.
- Woldringh, N. H. s. R. Kronig 448.
- Wolf, E. s. O. Theimer 432.
- F. (Perturbation of operators) 124.

- Wolfenstein, L. and J. Ashkin (Scattering amplitudes) 439.
- Wolff, P. s. D. L. Judd 439.
- Wolfowitz, J. (Abraham Wald) 3.
- — s. A. Dvoretzky 376.
- Wolter, H. (Überbreitbandantennen) 203; (Optiken für Röntgenstrahlen) 434; (Schwarzschildsche Spiegelsysteme streifender Reflexion) 435.
- Wong, Y. K. (Inequalities) 243.
- Wray, J. W. (Non-analytic functions) 300.
- Wrinch, D. („Megamolecular“ structure factor) 235.
- Wróbel, T. H. (Courbure et torsion géodésique) 393.
- — — s. St. Gofab 392.
- Wroe, D. s. R. E. Peierls 445.
- Wu, Ch.-H. and C. A. Brown (Problems of compressible flow) 426.
- T. Y. s. J. D. Cole 198.
- Wuest, W. (Krümmungseffekt) 177; (Grenzschichten an zylindrischen Körpern) 421.
- Wunderlich, W. (*L*-Torsen) 154; (Überall stetige und nirgends differenzierbare Funktion) 287; (*D*-Linien auf Quadriken) 395.
- Wynn, A. H. A. s. B. A. Mauguire 366.
- Wynne, C. G. (Primary aberrations) 435.
- Yamaguchi, Y. (Meson reactions) 226.
- — s. Y. Saitô 226.
- Yamazaki, M. s. D. Ito 215.
- Yang, C. N. (Spontaneous magnetization) 453.
- Ch.-T. (Cohomology theories) 165.
- Yannopoulos, A. J. (Trihedron of a curve) 150.
- Yano, Kentaro (Homothetic transformations) 155; (Vector fields) 156; (Tensor fields) 400.
- Yarbrough, H. s. K. A. Norton 357.
- Yeh, Hsuan (Secondary flow in cascades) 186.
- Yosida, Kôzaku (Brownian motion) 354.
- — and E. Hewitt (Finetely additive measures) 54.
- Young, A. (Quantitative substitutional analysis. IX.) 244.
- D. (Quadrature of analytic functions) 132.
- G. B. W. and C. P. Siska (Supersonic flow) 195.
- Yüh, M. I. s. C. H. Ku 113.
- Yvan, P. (Potentiel-valence libre) 230.
- Zaanen, A. C. (Integral transformations) 339.
- — — s. C. Visser 123.
- Zacharias, M. (Ebene Konfigurationen) 382.
- Zachariasen, W. H. (Anomalous transparency) 236.
- Zadeh, L. A. and K. S. Miller (Ideal filters) 429.
- Zaring, W. M. s. A. W. Goodman 40.
- Zavallo, S. T. (Freie Operatorgruppen) 21.
- Zeller, K. (Faktorfolgen) 64; (Matrixtransformationen) 336; (Integraltransformationen) 120.
- Zener, C. (Interaction between *d*-shells in transition metals. IV.) 456.
- Žgenti, V. S. (Berechnung einer dünnen flachen Schale) 175.
- Ziman, J. M. (Spin wave method. I. II.) 455.
- Zimmermann, W. (Cohomologietheorie) 405; (Thermodynamik eines Fermi-Gases). 452.
- Zippin, L. s. D. Montgomery 25.
- Žitomirskij, Ja. I. (Konvergenz einiger Reihen) 290.
- Zolotarev, G. N. (Lineare Abhängigkeit von Funktionen einer Veränderlichen) 62.
- Zubov, V. P. (Altrussische Mathematik) 1.
- Zwick, S. A. s. M. S. Plesset 201.
- Zwinggi, E. (Zinsfußproblem) 374; (Zinsfuß bei Renten) 374.